

Prof. Waldhäusl
von Prof. Waldhäusl überreicht.

Sonderheft 26
der Österreichischen Zeitschrift
für Vermessungswesen und Photogrammetrie

**Funktionale Modelle der
Streifen- und Streifenblockausgleichungen
mit einfachen und Spline-Polynomen
für beliebiges Gelände**

von

Peter Waldhäusl, Wien

Herausgeber:

**Österreichischer Verein für Vermessungswesen und Photogrammetrie
gemeinsam mit dem
Institut für Photogrammetrie der Technischen Hochschule Wien**

Eigentümer und Verleger:

**Österreichischer Verein für Vermessungswesen und Photogrammetrie
1080 Wien VIII., Friedrich-Schmidt-Platz 3**

Wien 1973

Österreichischer Verein für Vermessungswesen und Photogrammetrie

Friedrich-Schmidt-Platz 3, 1082 Wien

Sonderhefte zur *Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie*

- Sonderheft 1: *Festschrift Eduard Doležal. Zum 70. Geburtstag.* 198 Seiten, Neuauflage, 1948. Preis S 18,—. (Vergriffen.)
- Sonderheft 2: Lego (Herausgeber), *Die Zentralisierung des Vermessungswesens in ihrer Bedeutung für die topographische Landesaufnahme.* 40 Seiten, 1935. Preis S 24,—. (Vergriffen.)
- Sonderheft 3: Ledersteger, *Der schrittweise Aufbau des europäischen Lotabweichungssystems und sein bestanschließendes Ellipsoid.* 140 Seiten, 1948. Preis S 25,—. (Vergriffen.)
- Sonderheft 4: Zaar, *Zweimedienphotogrammetrie.* 40 Seiten, 1948. Preis S 18,—.
- Sonderheft 5: Rinner, *Abbildungsgesetz und Orientierungsaufgaben in der Zweimedienphotogrammetrie.* 45 Seiten, 1948. Preis S 18,—.
- Sonderheft 6: Hauer, *Entwicklung von Formeln zur praktischen Anwendung der flächentreuen Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene.* 31 Seiten. 1949. (Vergriffen.)
- Sonderh. 7/8: Ledersteger, *Numerische Untersuchungen über die Perioden der Polbewegung. Zur Analyse der Laplace'schen Widersprüche.* 59+22 Seiten, 1949. Preis S 25,—. (Vergriffen.)
- Sonderheft 9: *Die Entwicklung und Organisation des Vermessungswesens in Österreich.* 56 Seiten, 1949. Preis S 22,—.
- Sonderheft 11: Mader, *Das Newton'sche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung.* 74 Seiten, 1951. Preis S 25,—.
- Sonderheft 12: Ledersteger, *Die Bestimmung des mittleren Erdellipsoides und der absoluten Lage der Landestriangulationen.* 140 Seiten, 1951. Preis S 35,—.
- Sonderheft 13: Hubeny, *Isotherme Koordinatensysteme und konforme Abbildungen des Rotationsellipsoides.* 208 Seiten, 1953. (vergriffen)
- Sonderheft 14: *Festschrift Eduard Doležal. Zum 90. Geburtstag.* 764 Seiten und viele Abbildungen. 1952. Preis S 120,—.
- Sonderheft 15: Mader, *Die orthometrische Schwerekorrektion des Präzisions-Nivellements in den Hohen Tauern.* 26 Seiten und 12 Tabellen. 1954. Preis S 28,—.
- Sonderheft 16: *Theodor Scheimpflug — Festschrift.* Zum 150jährigen Bestand des staatlichen Vermessungswesens in Österreich. 90 Seiten mit 46 Abbildungen und XIV Tafeln. Preis S 60,—.
- Sonderheft 17: Ulbrich, *Geodätische Deformationsmessungen an österreichischen Staumauern und Großbauwerken.* 72 Seiten mit 30 Abbildungen und einer Luftkarten-Beilage. Preis S 48,—.
- Sonderheft 18: Brandstätter, *Exakte Schichtlinien und topographische Geländedarstellung.* 94 Seiten mit 49 Abb. und Karten und 2 Kartenbeilagen, 1957. Preis S 80,— (DM 14,—).
- Sonderheft 19: *Vorträge aus Anlaß der 150-Jahr-Feier des staatlichen Vermessungswesens in Österreich, 4. bis 9. Juni 1956.*
- Teil 1: *Über das staatliche Vermessungswesen,* 24 Seiten, 1957. Preis S 28,—.
- Teil 2: *Über Höhere Geodäsie,* 28 Seiten, 1957. Preis S 34,—.
- Teil 3: *Vermessungsarbeiten anderer Behörden,* 22 Seiten, 1957. Preis S 28,—.
- Teil 4: *Der Sachverständige — Das k. u. k. Militärgeographische Institut.* 18 Seiten, 1958. Preis S 20,—.
- Teil 5: *Über besondere photogrammetrische Arbeiten.* 38 Seiten, 1958. Preis S 40,—.
- Teil 6: *Markscheidewesen und Probleme der Angewandten Geodäsie.* 42 Seiten, 1958. Preis S 42,—.

Sonderheft 26
der Österreichischen Zeitschrift
für Vermessungswesen und Photogrammetrie

Funktionale Modelle der
Streifen- und Streifenblockausgleichungen
mit einfachen und Spline-Polynomen
für beliebiges Gelände

von

Peter Waldhäusl, Wien

Herausgeber:

Österreichischer Verein für Vermessungswesen und Photogrammetrie
gemeinsam mit dem
Institut für Photogrammetrie der Technischen Hochschule Wien

Eigentümer und Verleger:

Österreichischer Verein für Vermessungswesen und Photogrammetrie
1080 Wien VIII., Friedrich-Schmidt-Platz 3

Wien 1973

Gefördert aus Mitteln des Verbandes der wissenschaftlichen
Gesellschaften Oesterreichs auf Antrag des Oesterreichischen
Vereines für Vermessungswesen und Photogrammetrie.

Copyright by Oesterreichischer Verein für Vermessungswesen
und Photogrammetrie, 1080 Wien, Friedrich Schmidt Platz 3.

Umschlag: Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Wien.

Druck: OeH - Boko - Vervielfältigungen, Wien.

Inhaltsverzeichnis

(A) = mit näheren Erläuterungen oder Beispielen im Anhang

1. Einleitung und Aufgabenstellung	4
VON DER DREHMATRIX ZUR GRUNDGLEICHUNG FÜR DIE AEROTRIANGULA- TIONSAUSGLEICHUNG MIT POLYNOMEN	
2. Die lineare orthogonale Transformation und ihre erste Näherung .	7
3. Zur Größenordnung der Elemente der absoluten Orientierung	8
4. Vernachlässigungen bei den Einzeldrehungen	9
5. Vernachlässigungen bei der Gesamtdrehung	11
6. Vernachlässigungen von höheren Potenzen mit dm	12
7. Uebergang zur Grundgleichung für die polynomialen Streifenaus- gleichungsansätze	13
ALLGEMEINE GRENZEN FÜR DIE ANWENDUNG VON POLYNOMIALAUSGLEICHEN	
8. Grenzen der Anwendungsmöglichkeiten von Polynomialausgleichen, die im polynomialen Ansatz begründet sind	16
8.1 Die absolute Orientierung als limitierender Faktor	16
8.2 Der Einfluss der Erdkrümmung als limitierender Faktor (A)	18
8.2.1 Die Erdkrümmung quer zur Streifenachse	18
8.2.2 Die Krümmung längs der Streifenachse (A)	20
8.2.3 Die Erdkrümmungskorrektur im Auswertegerät	24
8.3 Die Streifenlänge als limitierender Faktor	24
8.4 Die Passpunktanordnung als limitierender Faktor	25
8.5 Das Polynomialmodell an sich als limitierender Faktor	30
9. Grenzen der Anwendungsmöglichkeiten von Polynomialausgleichen, die in den Streifenkoordinaten begründet sind	32
9.1 Zur günstigsten Anordnung der Modellverknüpfungspunkte	32
9.2 Die Streifenglättung, eine wichtige Voraussetzung für die Aerotriangulation mit Streifen	33
9.3 Zur optimal glatten Streifenbildung aus Einzelmodellen	35
9.4 Zur Messgenauigkeit der Auswertegeräte	37
EINFACHE POLYNOMIALANSÄTZE	
10. Der Polynomgrad in Praxis und Literatur	39
11. Die Familie einfacher Ausgleichspolynome zum Ansatz 7(5)	41
12. Vergleich der in der Praxis angewandten, einfachen Polynomver- fahren	44
12.1 Erläuterungen	44

12.2 Abweichungen der in der Praxis üblichen Polynome vom Ansatz 7(5)	45
12.3 Koeffizientenvergleiche und Verfahrensbeschreibungen	47
ANSÄTZE MIT SPLINE-FUNKTIONEN	
13. Zur Auswahl anderer Approximationsfunktionen	56
14. Theorie der Spline-Funktionen	59
14.1 Geschichte und Literaturhinweise	59
14.2 Definitionen und Begriffe	59
14.2.1 Spline-Funktionen	59
14.2.2 Natürliche Spline-Funktionen	60
14.2.3 Spline-Funktionen als abgehackte Potenzfunktionen	60
14.2.4 Natürliche Spline-Funktionen als abgehackte Potenzfunktionen	61
14.2.5 Interpolation, Approximation und Ausgleichung mit Spline- Funktionen	62
14.2.6 Glatteste Interpolierende	64
15. Stückweise Polynome nach Kubik-Ahlberg	65
15.1 Kubische Polynome	65
15.2 Quadratische Polynome	67
15.3 Lineare Polynome	70
AUSGLEICHUNG MIT SPLINE-FUNKTIONEN	
16. Theoretische Grundlagen zur Ausgleichung des Spline-Systems ...	71
16.1 Glattheitsbedingung und Minimumprinzip	71
16.2 Anschauliche Interpretation	72
16.3 Vermittelnde Ausgleichung mit zusätzlichen Minimumsbedingungen für Funktionen der Unbekannten und mit Nebenbedingungen	73
16.4 Verbesserungs- und Bedingungsgleichungen für Streifen- und Streifenblockausgleichungen mit Spline-Systemen nach 7(5)	75
16.4.1 Verbesserungsgleichungen für Passpunkte	75
16.4.2 Verbesserungsgleichungen für Streifenverbindungspunkte	75
16.4.3 Verbesserungsgleichungen für Statoskop- und APR-Punkte	76
17. Räumliche Spline-Streifenausgleiche	77
17.1 Grundpolynome aus der Familie der gewöhnlichen Spline-Funk- tionen bis zum 2. Grad als abgehackte Potenzfunktionen	77
17.2 Grundpolynome aus der Familie der natürlichen Spline-Funk- tionen	80
17.3 Grundpolynome aus der Familie der stückweisen Polynome nach Kubik-Ahlberg	80

17.3.1 Erste Ableitungen kubischer Polynome als Grundpolynome	80
17.3.2 Quadratische stückweise Polynome als Grundpolynome	84
18. Zur Passpunkt- und Knotenverteilung bei Spline-Streifenausgleich- chen (A)	85
ABSCHLIESSENDE BETRACHTUNGEN	
19. Nachwort und zusammenfassende Bemerkungen zur Streifen- und Streifenblockausgleichung mit Polynomialmethoden	88
LITERATURVERZEICHNIS	90
ANHANG	96
A 8. Zur Erdkrümmungskorrektur	97
A18. Zur Flexibilität der Streifenausgleichung mit Spline-Funk- tionen	101
ZUSAMMENFASSUNG.....	104

1. Einleitung und Aufgabenstellung.

Die elektronische Datenverarbeitung hat das Denken und die Technologie auch in der Photogrammetrie grundlegend geändert. Die Photogrammetrie ist längst nicht mehr die Methode der Vermessungstechnik, die Rechnungen vermeidet, sondern sie bedient sich der Rechnung in einem sich immer noch steigenden Ausmass. Dabei kann man heute objektiv zwei Entwicklungsrichtungen beobachten: Eine zum zentralisierten Grosscomputer, eine zur mittleren Datentechnik. Sicher wird ein umfangreicher Rechenprozess an sich wirtschaftlicher an einer Grossanlage ausgeführt. Es gibt aber auch eine Reihe von gültigen Argumenten, die für die mittlere Datentechnik sprechen. Durch sie können einfache Rechenoperationen in direkter Kommunikation mit dem Computer im eigenen Haus hinreichend rasch und ohne Wartezeit ausgeführt werden. Durch sie können vorbereitende Rechenoperationen, vor allem Datenkontrollen und Datenkomprimierung, im unmittelbaren Anschluss oder sogar synchron mit der Datenerfassung, der Messung, vorgenommen werden. Durch sie kann Kleines sofort erledigt, Grosses für die Grossanlage sicherer vorbereitet werden. Mittlere Datenverarbeitungsanlagen, die - für andere Betriebsaufgaben unbedingt benötigt und gerechtfertigt - ohnehin vorhanden sind, können besser ausgenützt werden, wenn man an ihnen auch einige, eigentlich Grossrechenanlagen zufallende Arbeiten vorsieht.

Die Ausgleichung von Aerotriangulationen ist eine Aufgabe, die eigentlich nur dem Grosscomputer zukommt, die aber - mit wesentlichen Leistungseinschränkungen - auch an einer Kleinrechenanlage ihre praktische Bedeutung hat. Und dies gilt im besonderen für die österreichische Photogrammetrie, die im privaten Bereich weitgehend dezentralisiert und auf Kleinbetriebe beschränkt ist.

Dem Bericht der Kommission II der Internationalen Gesellschaft für Photogrammetrie (Kubik und Kure, 1972) über die Anwendung der Aerotriangulation in der Welt kann man - obwohl nicht sehr signifikant - entnehmen, dass 57% mit Polynomialmethoden arbeiten. Dieser hohe Anteil unter den grossen Organisationen wird sich mit der Weiterentwicklung der Grosscomputertechnik wesentlich vermindern. Es kann aber andererseits auch erwartet werden, dass neue und zunächst kleinere Organisationen anfangs wieder mit Polynomialmethoden arbeiten werden.

Im folgenden soll daher versucht werden, einige Voraussetzungen kritisch zu betrachten, die besonders dann wesentlich sind, wenn Aerotriangula-

tionen mit Polynomialmethoden bearbeitet werden sollen, was an kleinen und mittleren Datenverarbeitungsanlagen und besonders für Einzelstreifenaufgaben der Aerotriangulation durchaus zweckmässig ist. Zum besseren Verständnis der Grenzen und Voraussetzungen wird das Funktionalmodell der Polynome für die Streifenkoordinatenkorrektur schrittweise aus der Matrix für die lineare orthogonale Transformation abgeleitet. Es zeigt sich, dass die in der Näherungsdrehmatrix enthaltenen Vereinfachungen und Vernachlässigungen auch für die Streifenausgleichsmethoden mit Polynomen gelten. Aber auch die Annahme, Polynome könnten den Verlauf der Streifen hinreichend beschreiben, ist nur unter bestimmten Voraussetzungen berechtigt. Weitere, die Theorie vereinfachende Annahmen, die man einer Korrekturformelgruppe nicht sofort entnimmt, haben in der Praxis nur sehr begrenzt Gültigkeit. Als eben angenommenes Gelände ist in der Natur nicht immer eben, fehlerfrei absolut orientiert vorausgesetzte Anfangsmodelle erweisen sich als fehlerhaft.

Es ist daher notwendig, einige der in Programmbibliotheken und Literatur angebotenen Streifenausgleichsverfahren zusammenzustellen, zu typisieren und zu klassifizieren sowie ihre eventuell besonderen Voraussetzungen aufzuzeigen. Um dies mit Erfolg tun zu können, müssen vorweg die allgemeinen, für alle Polynomialmethoden gültigen Grundbedingungen behandelt werden. Dabei stösst man sehr bald auf das grösste Problem, das die Anwendbarkeit der Polynomialmethoden sehr eingeschränkt hat, das der zu geringen und nicht steuerbaren Flexibilität.

1963 haben Ackermann und Belling erste Versuche demonstriert, flexiblere Polynomialmethoden mit gestückelten Polynomen anzuwenden. Seit 1971 propagiert Kubik funktionsfähige Verfahren mit Spline-Polynomen, die jedoch ebenso wie die Bellings nur für ebenes Gelände anwendbar sind. Für beliebiges Gelände gültige Verfahren in Spline-Technik fehlen noch. Dafür sollen nun die theoretischen Grundlagen, soweit sie für die Uebertragung in die Praxis erforderlich sind, zusammengestellt werden. Anschliessend soll versucht werden, allgemein gültige, also vor allem für beliebiges Gelände anwendbare Verfahren zu formulieren.

Ein weiteres Ziel dieser Arbeit ist es, besonders auf die in Oesterreich bestehenden Verhältnisse Rücksicht zu nehmen. Das Institut für Photogrammetrie der Technischen Hochschule Wien hat sich die Aufgabe gestellt, Grenzen und Möglichkeiten der Aerotriangulation für Anwendungen in Oesterreich in einer Reihe von Arbeiten zu behandeln und zu versuchen,

die Aerotriangulation und damit die Photogrammetrie weiter zu fördern. Es steht ausser Zweifel, dass eine weitere Verbreitung der Methoden der Aerotriangulation zu einer Steigerung der Wirtschaftlichkeit der Photogrammetrie führen kann.

Anlässlich des letzten Kongresses der Internationalen Gesellschaft für Photogrammetrie in Ottawa 1972 wurde mit Resolution 1 der Kommission III beschlossen, die systematischen Fehler der Aerotriangulation weiter zu untersuchen. Diese Arbeit soll auch dazu einen Beitrag liefern, da Fehler in der "Vorbereitung" und in den funktionalen Ausgleichungsansätzen die Ergebnisse der Aerotriangulation ebenfalls systematisch beeinflussen.

VON DER DREHMATRIX ZUR GRUNDGLEICHUNG FÜR DIE STREIFENTRIANGULATIONS-
AUSGLEICHUNG MIT POLYNOMEN.

2. Die lineare orthogonale Transformation und ihre erste Näherung.

Als lineare orthogonale Transformation gelte $R_{\varphi, \omega, \kappa} = R_1$ im Rechtssystem:

$$R_1 = \begin{pmatrix} \sin\varphi \sin\omega \sin\kappa + \cos\varphi \cos\kappa & \sin\varphi \sin\omega \cos\kappa - \cos\varphi \sin\kappa & \sin\varphi \cos\omega \\ \cos\omega \sin\kappa & \cos\omega \cos\kappa & -\sin\omega \\ \cos\varphi \sin\omega \sin\kappa - \sin\varphi \cos\kappa & \cos\varphi \sin\omega \cos\kappa + \sin\varphi \sin\kappa & \cos\varphi \cos\omega \end{pmatrix} \quad (2(1))$$

Hier sind die Orthogonalitätsbedingungen streng erfüllt. Setzt man für sehr kleine Drehungen dr die $\cos r = 1$ und die $\sin r = dr$, $r = \varphi, \omega, \kappa$, und vernachlässigt man die höheren Potenzen in dr , so erhält man die vielfach verwendete Näherungsmatrix

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & -d\kappa & d\varphi \\ d\kappa & 1 & -d\omega \\ -d\varphi & d\omega & 1 \end{pmatrix} = dR_1 \quad (2(2))$$

Zusammen mit dem Massstabsfaktor

$$M = \begin{pmatrix} 1+dmx & 0 & 0 \\ 0 & 1+dmy & 0 \\ 0 & 0 & 1+dmz \end{pmatrix} = E + dM \quad (2(3))$$

und einem Verschiebungsvektor $\underline{\Delta x}$ ergibt sich die Formel für die absolute Orientierung, die nach J. Töppler, 1972, eine gültige Näherung bis zu Neigungswerten von $dr = 75^\circ$ darstellt :

$$\underline{X} = R_2 M \underline{x} + \underline{\Delta x} \quad (2(4))$$

Wieder unter der Annahme kleiner dm und unter Vernachlässigungen der höheren Fehlerpotenzen wird

$$\underline{X} = \underline{x} + dM \underline{x} + R_3 \underline{x} + \underline{\Delta x} \quad (2(5))$$

$$dM = \begin{pmatrix} dm_x & 0 & 0 \\ 0 & dm_y & 0 \\ 0 & 0 & dm_z \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 0 & -d\kappa & d\varphi \\ d\kappa & 0 & -d\omega \\ -d\varphi & d\omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\Delta x} = \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \end{pmatrix} \quad (2(6))$$

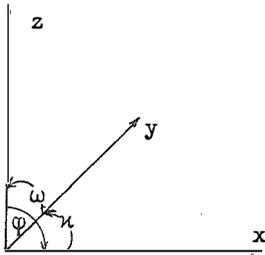


Abb. 2(1): Verwendetes
Koordinatensystem

Formel 2(5) stellt die linearisierte Näherungsgleichung 1.Ordnung für die räumliche Drehung dar, von der, wie später gezeigt werden wird, die Korrekturpolynomsysteme für die photogrammetrische Streifenausgleichung abzuleiten sind. K.Rinner, 1957, wies ausdrücklich darauf hin, dass die Näherungsdrehmatrix nur für differentiell kleine Drehungen angewendet werden darf. Für den Praktiker ist es aber wesentlich, genau zu wissen, was "differentiell klein" bedeutet. Zuerst soll der Unterschied zwischen den Formeln 2(1) und 2(2), dann der zwischen 2(4) und 2(5) untersucht werden.

3. Zur Grössenordnung der Elemente der absoluten Orientierung.

Zunächst ist einmal festzustellen, wie gross die in der Praxis der Luftbildmessung vorkommenden Drehwinkel der absoluten Orientierung überhaupt sind. In der Literatur ist darüber nichts zu finden. Aus den Protokollen des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen über die absolute Orientierung von Einzelmodellen habe ich folgende Werte entnehmen können:

Bei k l e i n m a s s s t ä b l i c h e n Flügen, also grossen Flughöhen, wo relativ geringe Turbulenz ein ruhiges Fliegen und genaues Einhalten der vorgeschriebenen Flughöhe gewährleistet, wo viel Zeit zwischen den aufeinanderfolgenden Aufnahmen für die Flugwegkorrekturen zur Verfügung steht, wo die Basen, der Abstand zwischen den Folgebildern, relativ lang sind, betragen die durchaus zu erwartenden, absoluten Modell-drehungen

$$\begin{array}{lll} \varphi & \text{bis} & 0,7^{\circ}, \\ \omega & \text{bis} & 2,0^{\circ}, \\ \kappa & \text{bis} & 4,0^{\circ}. \end{array} \quad 3(1)$$

Für g r o s s m a s s s t ä b l i c h e Flüge betragen die analogen Erfahrungswerte wegen der ungünstigeren Bedingungen in niedrigeren Flughöhen um etwa 50% mehr :

$$\begin{array}{lll} \psi & \text{bis} & 1,0^{\text{g}}, \\ \omega & \text{bis} & 3,0^{\text{g}}, \\ \kappa & \text{bis} & 6,0^{\text{g}}. \end{array} \quad 3(2)$$

Bei irregulären Flugbedingungen sowie solchen über gebirgigem Gelände mit Fallwinden und starker Turbulenz oder bei extrem grossmasstäblichen Aufnahmen muss man noch grössere Werte erwarten, das Verhältnis der Maximalwerte bleibt aber immer etwa $\psi : \omega : \kappa = 1 : 3 : 6$.

4. Vernachlässigungen bei den Einzeldrehungen.

a. Längsneigung.

$$\left(\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \end{array} \right)_{\psi} = \begin{pmatrix} (\cos\psi - 1) & 0 & (\sin\psi - d\psi) \\ 0 & 0 & 0 \\ -(\sin\psi - d\psi) & 0 & (\cos\psi - 1) \end{pmatrix} \quad 4(1)$$

Für die drei Koordinaten ergeben sich folgende Vernachlässigungen:

$$\begin{aligned} \Delta x &= -x (1 - \cos\psi) - z (d\psi - \sin\psi) \\ \Delta y &= 0 \\ \Delta z &= -z (1 - \cos\psi) + x (d\psi - \sin\psi) \end{aligned} \quad 4(2)$$

Da $(1 - \cos\psi)$ stets positiv ist, werden x und z mit dem gleichen Faktor verkürzt. Da daneben $\Delta y = 0$, erfolgt eine pseudoaffine Modell- oder Streifendeformation. $(d\psi - \sin\psi)$ ist ein reiner Drehfaktor. Dass um einen etwas anderen Winkelwert gedreht wird, ist an sich bedeutungslos, da dadurch keine numerische Deformation des transformierten Punkthauens erfolgt.

b. Querneigung.

$$\left(\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \end{array} \right)_{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\cos\omega - 1) & -(\sin\omega - d\omega) \\ 0 & (\sin\omega - d\omega) & (\cos\omega - 1) \end{pmatrix} \quad 4(3)$$

Die Vernachlässigungen in den einzelnen Koordinaten betragen demnach:

$$\begin{aligned} \Delta x &= 0 \\ \Delta y &= -y (1 - \cos\omega) + z (d\omega - \sin\omega) \\ \Delta z &= -z (1 - \cos\omega) - y (d\omega - \sin\omega) \end{aligned} \quad 4(4)$$

y und z werden mit demselben Faktor $(1 - \cos\omega)$ proportional verkürzt.

x dagegen bleibt unverändert. Es tritt daher wieder eine pseudoaffine Deformation des transformierten Punkthaufens auf. $(d\omega - \sin\omega)$ stellt wieder einen reinen, nicht deformierenden Drehfaktor dar.

c. Kantung.

$$\begin{pmatrix} R_1 - R_2 \\ \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos\kappa - 1) & -(\sin\kappa - d\kappa) & 0 \\ (\sin\kappa - d\kappa) & (\cos\kappa - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 4(5)$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= -x (1 - \cos\kappa) + y (d\kappa - \sin\kappa) \\ \Delta y &= -y (1 - \cos\kappa) - x (d\kappa - \sin\kappa) \\ \Delta z &= 0 \end{aligned} \quad 4(6)$$

Durch den nur bei x und y vorkommenden Faktor $(1 - \cos\kappa)$ wird eine Pseudoaffinität zwischen Lage und Höhe verursacht, die jedoch wegen der relativ kleinen z meist unbedeutend bleibt. Bei grossen κ und grossen z ist ein merkbarer Einfluss zu erwarten. Der Drehfaktor $(d\kappa - \sin\kappa)$ führt zu keiner Modelldeformation.

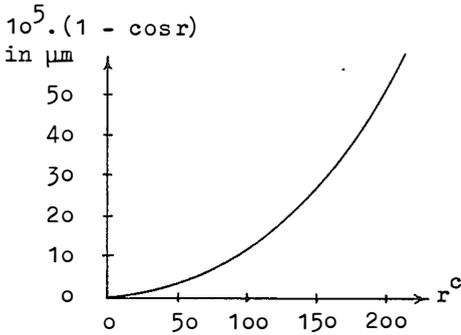
Drehungen um nur eine Koordinatenachse führen zu pseudoaffinen Massstabsfehlern der Modelle oder Streifen, wenn man mit der Näherungsformel statt mit der strengen Drehmatrix arbeitet. Die zahlenmässige Abschätzung des Einflusses des Verkürzungsfaktors $(1 - \cos r)$ auf die Koordinaten im Bildmassstab, in dem sie maximal $10^5 \mu\text{m}$ gross sind, führt zu folgender Tabelle:

r	$10^5 \cdot (1 - \cos r)$
50°	3 μm
64°	5 μm
90°	10 μm
200°	50 μm

4(7)

Während für viele Abschätzungen Winkelwerte von 2° als differentiell klein angesehen werden können, gilt dies für die Näherungsformel der Drehmatrix nicht. Hier beginge man schon bei Drehwinkeln von 1° Fehler, die grösser als die photogrammetrische Messgenauigkeit sind. Da H. Bauer 1973 beim Testblock Oberschwaben nach Bündelblockausgleichung mittlere Koordinatenrestfehler von $\pm 5 \mu\text{m}$ erreicht, muss man bereits sehr enge Schranken setzen: 50° . Die von Töppler 1972 angegebenen 75° sind etwas weniger streng. Die folgende Tabelle zeigt die Zunahme der Pseudoaffini-

tätsfehler mit wachsendem Drehparameter φ oder ω :



4(8)

5. Vernachlässigungen bei der Gesamtdrehung.

Aus der Matrizengleichung

$$\underline{\Delta x} = \begin{pmatrix} R_1 & - R_2 \end{pmatrix} \underline{x} \tag{5(1)}$$

erhält man nach Umsortierung folgende Koordinatenfehler:

$$\begin{aligned} \Delta x &= -x(1 - \cos\varphi \cos\kappa - \sin\varphi \sin\omega \sin\kappa) + y(d\kappa - \cos\varphi \sin\kappa + \sin\varphi \sin\omega \cos\kappa) + \\ &\quad -z(d\varphi - \sin\varphi \cos\omega) \\ \Delta y &= -y(1 - \cos\omega \cos\kappa) - x(d\kappa - \cos\omega \sin\kappa) + \\ &\quad +z(d\omega - \sin\omega) \\ \Delta z &= -z(1 - \cos\omega \cos\varphi) - y(d\omega - \cos\varphi \sin\omega \cos\kappa - \sin\varphi \sin\kappa) + \\ &\quad +x(d\varphi - \sin\varphi \cos\kappa + \cos\varphi \sin\omega \sin\kappa) \end{aligned} \tag{5(2)}$$

Jede Koordinate wird mit einem anderen Faktor proportional verkürzt. Der dadurch entstehende Pseudoaffinitätsfehler beträgt:

$$ddm = \cos\varphi \cos\kappa + \sin\varphi \sin\omega \sin\kappa - \cos\omega \cos\kappa \tag{5(3)}$$

Die Lagekoordinaten werden um jeweils einen anderen Winkel gedreht. Die Drehfaktoren unterscheiden sich voneinander um

$$dd\kappa = \sin\kappa (\cos\omega - \cos\varphi) + \cos\kappa (\sin\omega \sin\varphi). \tag{5(4)}$$

Für eine numerische Abschätzung seien einige typische Extrem- beziehungsweise Durchschnittskombinationen angeführt:

φ^g	ω^g	κ^g	$10^5 \cdot ddm \mu m$	$10^5 \cdot dd\kappa \mu m$
1.0	3.0	10.0	109	58
0.7	2.0	5.0	46	31
0.5	1.5	3.0	26	17
0.5	1.0	0.5	9	12
0.5	0.5	0.5	0	6
0.5	0.5	0.0	-3	6
0.4	0.4	0.4	0	4
0.3	0.3	0.3	0	2

5(5)

z ist in der Regel kleiner als y. (Wenn y der Abstand von der Streifenachse ist, muss unter z analog der halbe maximale Höhenunterschied des Punkthaufens verstanden werden. Aber selbst der ganze Höhenunterschied ist meist kleiner als die halbe Streifenbreite. Eine Ausnahme bilden die Projektionszentren.)

Die z-Glieder haben prinzipiell denselben Aufbau wie die y- und x-Glieder: Summen von Produkten von bis zu drei Winkelfunktionen sin oder cos kleiner Drehwinkel. Es ergeben sich analog zur Lage Pseudoaffinitätsfehler zwischen x und z beziehungsweise y und z einerseits und Pseudoorthogonalitätsfehler $dd\phi$ und $dd\omega$ andererseits. Ihr Einfluss tritt zusätzlich, jedoch wegen der im allgemeinen kleineren z von kleinerer Absolutgrösse auf. Im gebirgigen Gelände gelten demnach alle Einschränkungen in noch stärkerem Masse.

Zusammenfassend ergibt sich schon hier die Regel für die praktische Arbeit: Wann immer die Orientierungsparameter photogrammetrischer Modelle mehr als einige Zehnerminutenbeträge annehmen können, darf die Näherungsdrehmatrix nur zur iterativen Parameterberechnung verwendet werden, die Modelldrehungen selbst sind streng auszuführen. Ein zweiter Iterationsschritt führt dann meist schon zur endgültigen Lösung. (P.Schmid, 1973).

Einzelmodelle, die nur relativ und nicht absolut orientiert gemessen wurden, werden bei einer rechnerischen absoluten Orientierung nach der Näherungsformel "numerisch deformiert", wobei die Pseudoaffinitäts- und Pseudoorthogonalitätsfehler ohne weiteres das Zehnfache der Messgenauigkeit erreichen können.

6. Vernachlässigungen von höheren Potenzen mit dm .

Beim Uebergang von der Transformationsformel ↓ 6(1)

$$\underline{X} = \underline{R}_2 \underline{M} \underline{x} + \underline{\Delta x} = (\underline{E} + \underline{R}_3)(\underline{E} + \underline{dM}) \underline{x} + \underline{\Delta x} = \underline{x} + \underline{dM} \underline{x} + \underline{R}_3 \underline{x} + \underline{R}_3 \underline{dM} \underline{x} + \underline{\Delta x}$$

auf die Näherungsform

$$\underline{X} = \underline{x} + \underline{dM} \underline{x} + \underline{R}_3 \underline{x} + \underline{\Delta x} \tag{6(2)}$$

wird $\underline{R}_3 \underline{dM} \underline{x}$ vernachlässigt. Zu dessen Abschätzung werden die beiden Gleichungssysteme 6(1) und 6(2) ausgeschrieben und etwas umsortiert:

$$\begin{aligned} X &= x + x \, dm_x - y(d\mu + dmy \, d\mu) + z(d\phi + dmz \, d\phi) && + \Delta x_0 \\ Y &= y + y \, dmy + x(d\mu + dm_x \, d\mu) && - z(dw + dmz \, d\omega) + \Delta y_0 \\ Z &= z + z \, dmz && - x(d\phi + dm_x \, d\phi) + y(dw + dmy \, d\omega) + \Delta z_0 \end{aligned} \tag{6(3)}$$

$$\begin{aligned}
 X &= x + x \, dx - y(d\mu \quad) + z(d\varphi \quad) + \Delta x_0 \\
 Y &= y + y \, dy + x(d\mu \quad) - z(dw \quad) + \Delta y_0 \\
 Z &= z + z \, dz - x(d\varphi \quad) + y(dw \quad) + \Delta z_0
 \end{aligned}
 \tag{6(4)}$$

Die beiden Formelgruppen unterscheiden sich voneinander nur durch die mit dm multiplizierten dr , was so lange keine Rolle spielt, wie die dm für alle drei Koordinatenrichtungen gleich gross sind. Die Formeln 6(4) rechnen dann nur mit etwas veränderten Drehgrössen gegenüber jenen in 6(3). Nur die Ungleichheit der dm kann zu einer zusätzlichen, numerischen Deformation führen. Zu deren Abschätzung seien alle dm auf dm_x bezogen, da dem x in Streifen die grösste Dimension zukommt.

$$\begin{aligned}
 ddm_x &= dm_x - dm_x = 0 \\
 ddm_y &= dm_y - dm_x \doteq 10^{-3} \\
 ddm_z &= dm_z - dm_x \doteq 10^{-3}
 \end{aligned}
 \tag{6(5)}$$

Das dazugehörige

$$ddX = \begin{pmatrix} -y \, d\mu \, ddm_y + z \, d\varphi \, ddm_z \\ -z \, dw \, ddm_z \\ y \, dw \, ddm_y \end{pmatrix}
 \tag{6(6)}$$

lässt erkennen, dass für $dr \doteq 10^{-1}$ (entsprechend $6,37^\circ$!), für y bis $10^5 \mu\text{m}$ und für z bis zu $10^4 \mu\text{m}$, die ddX die Grössenordnung von $\pm 10 \mu\text{m}$ erreichen, also die 1-2 fache Messgenauigkeit. Die Glieder mit z in 6(6) sind in der Regel wieder die kleineren und daher für die Abschätzung nicht die Hauptglieder.

Der Uebergang von Formel 6(1) auf Formel 6(2) birgt also weitere Vernachlässigungen in sich, die für grössere Drehwinkel als etwa 6° oder grosse z $10 \mu\text{m}$ erreichen können. Ihre Auswirkungen auf die Modellform sind xy -Orthogonalitätsfehler sowie yz -Verwindungsfehler. Wenn man auch die verbleibenden Fehler im Einzelmodell als verschwindend klein ansehen kann, so können sie doch eine grössere Rolle spielen, wenn sie sich im Streifen oder Block systematisch addieren.

7. Uebergang zur Grundgleichung für die polynomialen Streifenausgleichungsansätze.

Auf Grund der vorigen Abschnitte besteht nun eine klare Vorstellung von jenen Vernachlässigungen, welche in dem linearen Ansatz

$$X = x + dM_x + R_3 x + \Delta x
 \tag{7(1)}$$

für die absolute Orientierung enthalten sind. Zur allgemeinen Form funk-

tional richtiger Streifenausgleichspolynome gelangt man nun, indem man zunächst die Orientierungsunbekannten dm und dr durch Polynome in x $Pol_m(x)$ und $Pol_r(x)$ ersetzt. Die Polynome geben dann für jede Stelle x des Streifens die Grösse des jeweiligen Orientierungselementes an. Bekanntlich stellen aber nun die Koordinatenfehler für Punkte in der Streifenachse eine fortlaufende Summe dar. Wenn $Pol_{mx}(x) = Pol_x(x)$, nur zur Vereinfachung der Schreibweise, den Massstabsfehler in x -Richtung beschreibt, ist der durch ihn verursachte x -Koordinatenfehler an der Stelle x des Streifens

$$\Delta x_{mx} = \int_{x=x_0}^x Pol_x(x) dx, \quad (7(2))$$

wobei das Integral die Summation der x -Fehler über alle vorangegangenen Modelle des Streifens beschreibt. Analoges gilt für die Aufbiegung und für die azimutale Abweichung:

$$\Delta y_{\mu} = \int_{x=x_0}^x Pol_{\mu}(x) dx \quad (7(3))$$

$$\Delta z_{\varphi} = \int_{x=x_0}^x Pol_{\varphi}(x) dx \quad (7(4))$$

Damit ist nun der vollständige Uebergang von der strengen zur genäherten Drehmatrix und weiter zur Grundgleichung für die Streifentriangulation mit Polynomen gegeben:

$$\begin{aligned} X - x &= \int_{x=x_0}^x Pol_x(x) dx + \Delta x_0 - y Pol_{\mu}(x) + z Pol_{\varphi}(x) \\ Y - y &= \int_{x=x_0}^x Pol_{\mu}(x) dx + \Delta y_0 + y Pol_y(x) - z Pol_{\omega}(x) \\ Z - z &= \int_{x=x_0}^x Pol_{\varphi}(x) dx + \Delta z_0 + y Pol_{\omega}(x) + z Pol_y(x) \end{aligned} \quad (7(5))$$

=====
=====
=====

A
B
C

A = "Doppelsummationsglieder"

B = "Verschiebungsanteile und Integrationskonstante"

A + B = "Fehler in der Streifenachse"

C = "Fehler ausserhalb der Streifenachse"

In der z -Gleichung von 7(5) wurde Pol_{mz} durch $Pol_{my} = Pol_y$ ersetzt, weil die z -Werte in der Praxis relativ klein sind und damit praktisch nie zu-

verlässige Informationen zur Bestimmung eines eigenen z - Massstabes liefern. Einen einheitlichen Massstab für alle drei Koordinatenrichtungen anzunehmen, ist nicht realistisch, da die Massstabspolynome auch noch andere Fehler neben denen des Modellmassstabes mitkompensieren müssen: die Streifenaffinitäten auf Grund des Filmeinganges, der in und quer zur Filmlaufrichtung verschieden ist, Reste der in den vorangegangenen Abschnitten behandelten Pseudoaffinitäten, die nur eine rechentechnische Ursache haben, Anteile des Abrollfehlers (W.Brucklacher, 1959) und letztlich noch eine Reihe von Instrumentalfehlerkomponenten.

Die Formeln 7(5) entsprechen in Jordan-Rinner, 1972, Band IIIa/3, den Gleichungen (7) in § 131.4, (8) in § 131.8 beziehungsweise (13) in § 132.6. Das ist nicht anders zu erwarten. In den meisten Veröffentlichungen darüber werden die Gleichungen aus Einzeleinflüssen A,B,C zu einem System einer räumlichen Drehung entsprechend zusammengesetzt. Dann werden sofort die ersten Glieder, die die Doppelsumationen nach Vermeirs Theorie verkörpern, durch Basisfunktionen $f_x(x)$, $f_y(x)$, $f_z(x)$ ersetzt, wodurch sich die immer wieder anzutreffende Form 7(6) ergibt (hier nach Jordan Seite 1754, Formel (8)) :

$$\begin{aligned}
 \Delta x &= f_x(x) - y f'_y(x) - z f'_z(x) \\
 \Delta y &= f_y(x) + y f'_x(x) - z f'_Q(x) \\
 \Delta z &= f_z(x) + y f'_Q(x) + z f'_x(x)
 \end{aligned}
 \tag{7(6)}$$

=====
=====
BF
Z

BF = Basisfunktionen
Z = Zusatzglieder

In 7(6) verkörpern die Einzelpolynome nicht mehr die Vermeir-Elemente der absoluten Orientierung, $f_Q(x)$ ausgenommen ($Q = \omega$). In 7(5) dagegen erkennt man den logischen Zusammenhang mit der Näherungsdrehmatrix sofort. Der Aufbau der Formel 7(6) verleitet dazu, die "Zusatzglieder" als nebensächliche Formelerweiterungen anzusehen, eine Denkweise, die möglicherweise die Ursache für die vielen falschen Polynomialansätze in der Praxis ist. Der Aufbau 7(5) soll bewusst an die im Näherungsansatz enthaltenen Vernachlässigungen erinnern, die in der Literatur der Aero-triangulation bisher noch nirgends hinreichend demonstriert wurden. Des weiteren sei darauf hingewiesen, dass 7(6) mit $f'_x(x)$ nur einen einzigen Massstabsverbesserungsfaktor enthält, Lageaffinitäten daher nicht korrigiert werden können.

ALLGEMEINE GRENZEN FÜR DIE ANWENDUNG VON POLYNOMIALAUSGLEICHEN

8. Grenzen der Anwendungsmöglichkeiten von Polynomiaausgleichen, die im polynomialen Ansatz begründet sind.

8.1 Die absolute Orientierung als limitierender Faktor.

Der der Fehlerapproximation mit Polynomen zu unterwerfende Punkthaufen soll, wie zuvor gezeigt, in jedem seiner Teile bereits bis auf 30 - 50^c, je nach Genauigkeitsforderung, absolut orientiert sein, damit nirgendwo zufolge der Vernachlässigungen in der Näherungsformel für die räumliche Transformation zusätzliche, messbare Deformationen verursacht werden.

Das geometrische Modell der Fehlerapproximation mit Polynomen bei photogrammetrischen Streifenausgleichen sieht vor, dass die Längsneigung φ um eine y-Parallele, die Querneigung ω um eine x-Parallele und die Kantung κ um eine Parallele zur z-Achse erfolgen. Auch aus diesem Grunde soll eine gute Übereinstimmung der Koordinatenachsrichtungen zwischen dem Soll- und dem Istsystem bestehen. Dies kann durch eine Transformation der Landeskoordinaten in ein Sollsystem, dessen x-Achse zur Streifenachse parallel liegt, erreicht werden. Am Ende des Streifenausgleiches werden die Ergebnisse in das Landeskoordinatensystem zurücktransformiert.

Die besondere Kleinheit der Abweichungen zwischen dem Soll- und dem Istsystem kann auf verschiedene Weise praktisch realisiert werden:

- a. Die klassische Vorgangsweise bei der freien Aerotriangulation sieht zunächst eine sorgfältige Bestimmung der Streifenrichtung und damit eines Anfangs- κ vor, dann eine vollständige absolute Orientierung des Anfangsmodelles nach φ, ω, κ und Massstab. Bei langen Streifen wird vielfach auch noch eine Anfangslängsneigung $\Delta\varphi_A$ vorgegeben, um die sonst vielleicht notwendigen bz-Translationen im Analoggerät zu vermeiden.
- b. Bei der Einzelmodell-aerotriangulation wird das Anfangsmodell mittels R_1 , also der strengen Drehmatrix, auf die Sollstreifenkoordinaten der Passpunkte transformiert. An das Anfangsmodell werden, wieder mit R_1 , die Folgemodelle nacheinander hinzuorientiert.

In beiden Fällen (a und b) sind im Anfangsmodell mindestens drei Passpunkte vorzusehen.

- c. An das nur relativ orientierte Anfangsmodell werden die Folgemodelle nacheinander mittels R_1 antransformiert. Anschliessend wird der ganze Streifen auf einmal mit Passpunkten, die über den ganzen Streifen ver-

teilt sein können, absolut orientiert. Dabei besteht die Gefahr, dass durch die Hinzunahme von Höhenpunkten am Streifenrand der Streifenmitte grobe Querneigungsänderungen des Streifens eintreten.

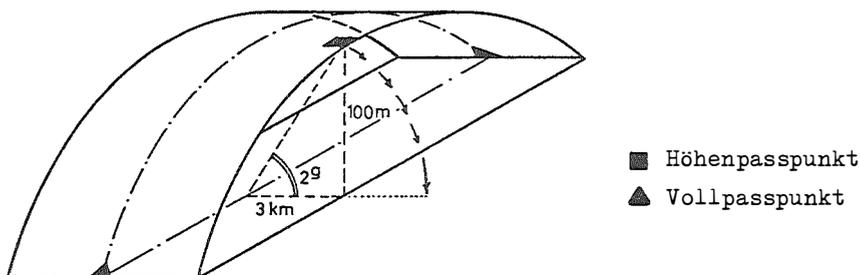


Abbildung 8.1 (1): Fehlerhafte Vororientierung eines Streifens in ω zufolge nicht entsprechender Passpunktanordnung.

d. Die absolute Streifenorientierung kann auch durch Hilfsdaten oder durch bereits absolut orientierte Nachbarstreifen bestimmt werden.

Es genügt jedenfalls nicht, das Anfangsmodell eines Streifens nur relativ zu orientieren und die Basis horizontal anzunehmen, meinend, eine Polynomgleichung wäre in der Lage, die fehlende absolute Orientierung fehlerfrei auszuführen. Es soll auf jeden Fall eine Streifenvororientierung durchgeführt werden. Abbildung 8.1 (2) zeigt vernünftige Passpunktanordnungen für diesen Zweck.

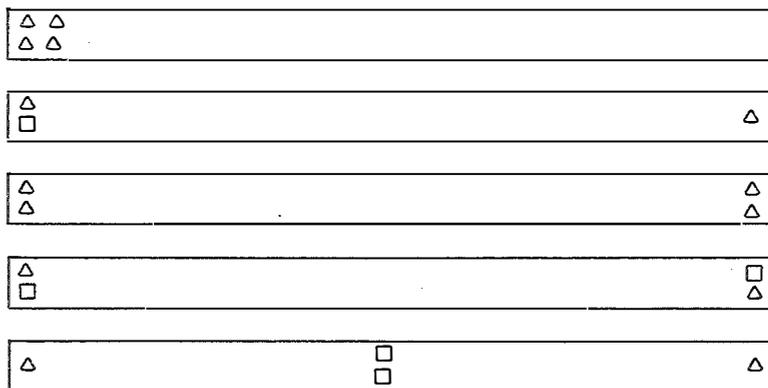


Abbildung 8.1 (2): Gut entsprechende Passpunktanordnungen für die absolute Vororientierung von Streifen. Falls am Streifenende keine Passpunkte zur Verfügung sind, empfiehlt sich eine Vororientierung mit $\Delta\varphi=L/2R$, R...empirisch oder Erdradius.

8.2 Der Einfluss der Erdkrümmung als limitierender Faktor.

8.2.1 Erdkrümmung quer zur Streifenachse.

Ab einem Bildmassstab kleiner als 1:10 000 (1:20 000) übersteigt der Erdkrümmungseinfluss die Höhenmessgenauigkeit entsprechend $\Delta z_E = \pm 5$ (± 10) μm . Den Streifenausgleichsformeln 7 (5) ist dann ein z-Korrekturglied anzufügen:

$$\Delta z_E = + \frac{(y - y_0)^2}{2 R \cdot M_m} \tag{8(1)}$$

Darin sind: $R = 6,37 \cdot 10^9 \text{ mm}$ = Erdradius, y = die Maschinenkoordinate in mm, $y_0 = y$ der Streifenachse, $M_m = 1 : m_m$ der Maschinenmassstab, der sich aus der Transformation der Landeskoordinaten ins Maschinensollsystem ergibt.

Wenn man Δz_E nicht berücksichtigt, begeht man bei Aerotriangulationen von Weitwinkel-Bildern 1:60 000 beispielsweise Fehler von 3 m (am Streifenrand), was der dreifachen Messgenauigkeit entspricht. Auch bei 1:30 000 beträgt der Erdkrümmungseinfluss am Streifenrand noch 0,8 m, was deutlich grösser als die Höhen-Messgenauigkeit von $\pm 0,5$ m ist.

Das Ergebnis der Aerotriangulation würde bei Nichtberücksichtigung von Δz_E auch noch von der Verteilung der Passpunkte beeinflusst, was in Abbildung 8.2(1) schematisch dargestellt wird.

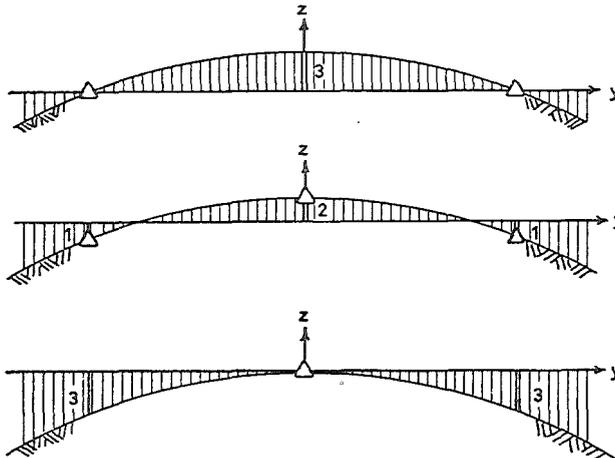


Abb.8.2(1): Darstellung der systematischen Vernachlässigungen bei Nichtberücksichtigung der Erdkrümmung quer zur Streifenachse in Abhängigkeit von der Passpunktanordnung (Fehlerangaben in m unter Annahme des Bildmassstabes 1:60 000).

Wenn grosse Höhenunterschiede im Einzelmodell vorkommen, müssen auch die y -Werte punktweise reduziert werden:

$$\Delta y_E = - \bar{y} \frac{z}{R}, \quad \bar{y} = y - y_0 \quad 8(2)$$

Zur Abschätzung berechnen wir den Erdkrümmungseinfluss im Bild:

$$\Delta y_E' (\mu\text{m}) = - (y' - y_0')_{(\text{mm})} \frac{z_{(\text{m})}}{R_{(\text{km})}}$$

und stellen das Ergebnis in Tab. 8.2(2) zusammen, woraus erkenntlich ist, dass der Erdkrümmungseinfluss und der der Geländehöhe die Präzisionsphotogrammetrie im Gebirge nicht unwesentlich beeinflussen können.

$(y' - y_0')$	50 mm	80 mm	110 mm
z (m)	$\Delta y_E'$ (μm)		
100	1	1	2
200	2	3	3
300	2	4	5
400	3	5	7
500	4	6	9
600	5	8	10
700	5	9	12
800	6	10	14
900	7	11	16
1000	8	13	17
1100	9	14	19
1200	9	15	21
1300	10	16	22
1400	11	18	24
1500	12	19	26
2000	16	25	34
3000	24	38	52
4000	31	50	69
5000	39	63	86

†Tabelle 8.2(2) Erdkrümmungseinfluss $\Delta y_E'$ in μm . Man beachte, dass $\Delta y_E'$ unabhängig von der Flughöhe über Grund berechnet wird.

8.2.2 Die Krümmung längs der Streifenachse.

Analoge Reduktionen wären auch in x-Richtung anzubringen, doch hier wirken die integrierten φ -Fehler wie die Erdkrümmung, sodass die Polynomialausgleiche 7(5) sowohl deren z- als auch deren x-Fehler mitberücksichtigen, kurze Streifen, das heisst unter 50 km Länge, vorausgesetzt.

Bei längeren Streifen, bei denen $z + \Delta z$ wesentlich verschieden von z wird, ist die Erdkrümmungsreduktion schwieriger, da sie nicht einfach durch Zusatzglieder allgemein zu bewältigen ist. F. Ackermann hat 1963 die Frage einer strengen Streifenentkrümmung behandelt und eine Lösung angegeben. Im folgenden soll die Entkrümmungskorrektur direkt aus einem vorläufigen Ausgleichsergebnis abgeleitet werden, wobei als Hypothese akzeptiert werden muss, dass die Geländehöhen immer auf der Fehlerfläche senkrecht stehen, wie es ja auch unserem funktionalen Modell entspricht. Im Gegensatz zu dem von Ackermann angegebenen Verfahren, bei dem für die ganze Streifenlänge in x-Richtung ein konstanter, vom Erdradius beliebig verschiedener Krümmungsradius R_x angenommen wurde, wird sich die Krümmungskorrektur hier, auch bei Verwendung von Spline-Polynomen, nach den veränderlichen Krümmungsverhältnissen richten. Ackermann hat die strenge Entkrümmung als Vorprogramm angesehen, um die Widersprüche zu verkleinern. Dasselbe geschieht auch in dem von E. Breyer 1972 geschriebenen Streifenausgleichsprogramm, das speziell für Schulungszwecke am Institut für Photogrammetrie der Technischen Hochschule Wien ausgerichtet ist.

An mittleren und grösseren Rechenanlagen besteht die durchaus vertretbare Möglichkeit, aus den vorhandenen Soll-Höheninformationen ein nur für die "Streifenachse" gültiges Entkrümmungspolynom

$$\Delta z = \Delta z_0 - a x - \frac{b x^2}{2} - \frac{c x^3}{3} \dots = - \int_0^x \text{Pol}_\varphi(x) dx \quad 8(3)$$

anzusetzen, wobei sorgfältig auf die Stützstellenanzahl und -verteilung (vgl. 8.1) zu achten ist. Die z-Werte können damit vorläufig verbessert, "entkrümmt" werden. Für die Korrekturen der x-Koordinaten gilt:

$$\Delta x = \Delta x_T + \Delta x_A = (z + \Delta z) \text{Pol}_\varphi(x) + \frac{1}{2} \int_0^x \text{Pol}_\varphi^2(x) dx \quad 8(4)$$

Der erste Teil, Δx_T , ist die topographische Korrektur, die hier unbedingt mit den schon berichtigten Höhen $(z + \Delta z)$ anzusetzen ist. Der zweite Term, Δx_A , ist die Abwicklungskorrektur, auch Abrollkorrektur, die sich aus dem Unterschied zwischen der Bogenlänge und der photogrammetrischen Tangentialkoordinate ergibt:

$$\Delta x_A = \int_0^x (1 + \Delta z'^2(x))^{1/2} dx - x$$

Da $\Delta\varphi$ jedenfalls kleiner als 2° ist, wird

$$\text{Pol}_\psi^2(x) = \Delta z'^2(x) \sim 10^{-3} \ll 1 \tag{8(5)}$$

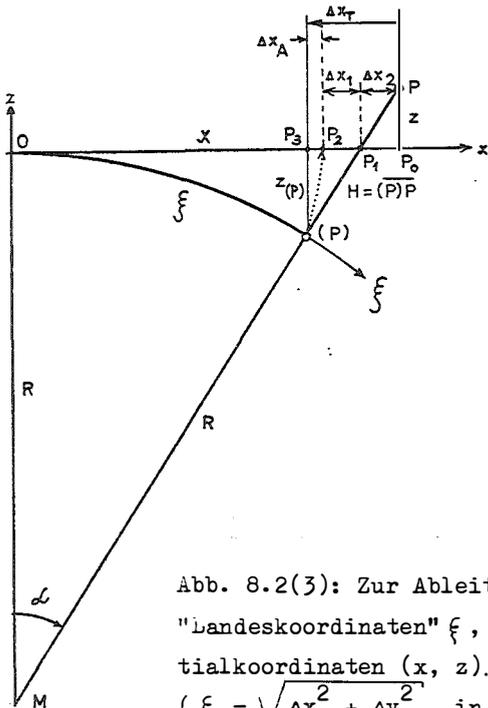
Nach Reihenentwicklung erhalten wir:

$$\Delta x_A = \int_0^x (1 + \frac{1}{2}\Delta z'^2(x) - \dots) dx - x \tag{8(6)}$$

$$\Delta x_A = \frac{1}{2} \int_0^x \Delta z'^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^x (-\text{Pol}_\varphi(x))^2 dx \tag{8(7)}$$

Für die Entkrümmungskorrektur in x-Richtung ist es also nicht erforderlich, den Krümmungs"radius" zu kennen oder zu berechnen. Die Formeln gelten allgemein.

J. Albertz, 1966, hat die Erdkrümmungskorrektur für die Sollkoordinaten abgeleitet. In der Lehrbuchliteratur fehlt jedoch noch immer eine klare Darstellung der folgenden Näherungsformeln für den Zusammenhang zwischen den Landeskoordinaten (ξ , H) und photogrammetrischen Tangentialkoordinaten (x, z):



$$z(P) = -\frac{x^2}{2R}$$

$$\begin{aligned} \vec{OP}_0 &= x \\ \vec{OP}_1 &= x_1 = R \tan \alpha \\ \vec{OP}_2 &= x_2 = R \hat{\alpha} \\ \vec{OP}_3 &= x_3 = R \sin \alpha \\ \vec{P}_3\vec{P}_1 &= \frac{x^3}{2R^2} = R(\tan \alpha - \sin \alpha) \\ \vec{P}_3\vec{P}_2 &= \frac{x^3}{6R^2} = R(\hat{\alpha} - \sin \alpha) \\ \vec{P}_2\vec{P}_1 &= \frac{x^3}{3R^2} = R(\tan \alpha - \hat{\alpha}) \end{aligned} \tag{8(8)}$$

Abb. 8.2(3): Zur Ableitung des Zusammenhangs zwischen "Landeskoordinaten" ξ , H und photogrammetrischen Tangentialkoordinaten (x, z).

$$(\xi = \sqrt{\Delta x_L^2 + \Delta y_L^2} \text{ in Richtung der Streifenachse})$$

$$\xi = R\widehat{\mathcal{L}} = R \arctan \frac{x}{R+z} \doteq x - \frac{x^3}{3R^2} - \frac{xz}{R} = x - \Delta x_1 - \Delta x_2 \quad 8(9)$$

$$H = \frac{z + R(1 - \cos \mathcal{L})}{\cos \mathcal{L}} \doteq z + \frac{x^2}{2R} \quad 8(10)$$

$$x = (R + H) \sin \mathcal{L} \quad 8(11)$$

$$z = (R + H) \cos \mathcal{L} - R \quad 8(12)$$

$$\widehat{\mathcal{L}} = \frac{\xi}{R} \quad 8(13)$$

Die oben angeführten, einfachen Zusammenhänge gelten nicht allgemein, sondern nur für eine Richtung, in unserem Fall für die Streifenachse. 8(9) - 8(13) beschreiben mit 8(1) hinreichend den Erdkrümmungseinfluss für einen Einzelstreifenbereich. Für einen Blockbereich ist es zielführender, sich generell Sollkoordinaten im "photogrammetrischen Tangentialsystem" entsprechend einer orthographischen Projektion zu berechnen, wofür die Formeln (36) aus Albertz, 1966, dienen: (ξ_0, η_0 = Berührungspunkt der Ebene auf der Kugel, im übrigen siehe Abbildung 8.2(4))

$$\begin{aligned} x &= (R + H) \cos \beta \sin \mathcal{A} \\ y &= (R + H) \sin \beta \\ z &= (R + H) \cos \beta \cos \mathcal{A} - R \end{aligned} \quad 8(14)$$

$$\widehat{\mathcal{L}} = \frac{\overline{\xi}}{R}, \quad \overline{\xi} := \xi - \xi_0$$

$$\widehat{\beta} = \frac{\overline{\eta}}{R}, \quad \overline{\eta} := \eta - \eta_0$$

In diesem System kann die Ausgleichung des Blockes erfolgen, ohne dass die Erdkrümmung irgendeinen Zwang ausüben könnte. Anschliessend erfolgt die Rückrechnung ins Landeskoordinatensystem mit den Formeln (37) aus Albertz, 1966:

$$\begin{aligned} \overline{\xi} &= R \cdot \widehat{\mathcal{L}} \\ \overline{\eta} &= R \cdot \widehat{\beta} \\ H &= \frac{R + z}{\cos \mathcal{A} \cos \beta} - R \end{aligned} \quad 8(15)$$

$$\mathcal{A} = \arctan \frac{x}{R + z}$$

$$\beta = \arctan \frac{y \cdot \cos \mathcal{A}}{R + z}$$

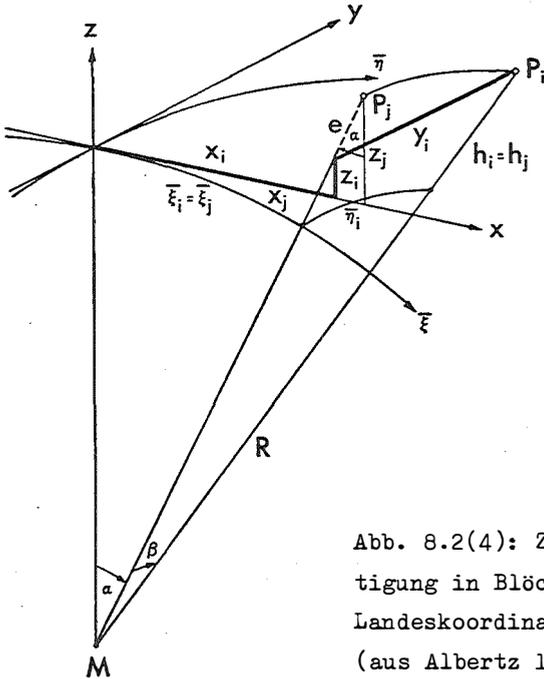


Abb. 8.2(4): Zur Erdkrümmungsberücksichtigung in Blöcken: Zusammenhang zwischen Landeskoordinaten und Blocksollkoordinaten (aus Albertz 1966).

Es lässt sich zeigen, dass die für Streifen anzuwendenden Entkrümmungsformeln 8(1) - 8(4) für eine Kugel mit den Albertz'schen Formeln übereinstimmen. Zur Berücksichtigung der Erdkrümmung für Blockausgleichungen siehe auch G. Otepka, 1973, und vor allem K. Rinner, 1959.

Die Erdkrümmung und die durch die photogrammetrischen Fehler inklusive Refraktion bedingte Streifenaufbiegung müssen also - jedenfalls bei kleinmasstäblichen Aerotriangulationen - berücksichtigt werden, indem man die Streifen nach deren absoluter Orientierung und vor dem eigentlichen Ausgleich systematisch entkrümmt. Die dafür notwendigen Korrekturformeln 8(1) bis 8(4) lauten zusammengefasst:

$$\Delta z_{Ex} = - \int_0^x \text{Pol}_\varphi(x) dx \quad R' = R \text{ im Koordinatenmasstab}$$

$$z : = z + \Delta z_{Ex} + \Delta z_{Ey} = \Delta z_o - a_\varphi x - \frac{b_\varphi x^2}{2} - \dots + \frac{(y - y_o)^2}{2R'}$$

$$y : = y - (y - y_o) \frac{z + \Delta z}{R'}$$

8(16)

$$x : = x + (z + \Delta z_\varphi) \text{Pol}_\varphi(x) + \frac{1}{2} \int_0^x \text{Pol}_\varphi^2(x) dx$$

Analoge Korrekturen verlangt fallweise auch die azimutale Streifenkrümmung, nämlich dann, wenn $(y + \Delta y)$ so verschieden von y ist, dass

$y \cdot \text{Pol}_\kappa(x) \neq (y + \Delta y) \text{Pol}_\kappa(x)$, bzw. dann, wenn die Bogenlänge langer Streifen messbar verschieden von der photogrammetrischen Tangential- (oder Sehnen-) koordinate ist. Der Einfluss der κ -Krümmung kann mit Hilfe folgender Formeln korrigiert werden:

$$\begin{aligned} \Delta z_\kappa &= 0 \\ \Delta y_\kappa &= + \int_0^x \text{Pol}_\kappa(x) dx = \Delta y_0 + a_\kappa x + \frac{b_\kappa x^2}{2} + \dots \\ \Delta x_\kappa &= (y + \Delta y_\varphi + \Delta y_\kappa) \text{Pol}_\kappa(x) + \frac{1}{2} \int_0^x \text{Pol}_\kappa^2(x) dx \end{aligned} \tag{8(17)}$$

8.2.3 Die Erdkrümmungskorrektur im Auswertegerät.

Verschiedene Auswertegeräte ermöglichen eine näherungsweise Erdkrümmungskorrektur oder eine solche einzelner Komponenten: WILD A10; KERN PG2, PG3; JENAer Erdkrümmungsrechner.

Sowohl für die Einzelmodelltriangulation als auch für analoge Streifen-triangulation sind diese Korrekturvorrichtungen auszuschalten, da die absolute Orientierung der Modelle noch nicht bekannt ist. Ausserdem berücksichtigen die meisten Systeme nur die Höhenfehler zufolge Erdkrümmung, nicht die topographischen Lagekorrekturen.

8.3 Die Streifenlänge als limitierender Faktor.

- a. Die polynomiale Beschreibung einer Folge von räumlichen Drehungen hat eine begrenzte Anzahl von Freiheitsgraden. Mit einfachen Polynomen können wir daher die Deformationen nur kurzer Streifen repräsentieren. Die Approximationfähigkeit von Polynomen ist unter anderem eine Funktion des Polynomgrades, des Passpunktabstandes und der Streifenlänge. Quadratische Polynome gestatten keinen Wendepunkt, kubische keinen zweiten. Die Flexibilität einfacher Polynome ist vom geometrischen Modell her beschränkt. F. Ackermann (1965) gibt als Faustformel für die Genauigkeit nach Streifenausgleichen von Streifen ab 10 Modellen und 3 Passpunktgruppen an:

$$\sigma_{\max} \approx 0,12 \sqrt{i^3} \sigma_0 \tag{8(18)}$$

(i = überbrückte Modellanzahl zwischen Passpunktgruppen)

Das "Wurzel aus i^3 "-Gesetz erhielt auch schon H. Schmid, 1949.

Demnach ist bei Streifen von 14 Modellen bereits mit doppelt so grossen Fehlern nach der Ausgleichung mit quadratischen Polynomen (3 Passpunktquerschnitte) zu rechnen wie in Einzelmodellen. Wenn 4 Passpunktquerschnitte gegeben sind und mit kubischen Polynomen gearbeitet wird,

kann man bis zu Streifenlängen von 21 Modellen gehen, ehe $\varphi_{\max} = 2 \varphi_0$ wird. Damit sind praktische Grenzen gesetzt, die zu beachten sind.

Eine weitere Streifenverlängerung ist bei Anwendung gestückelter Polynome möglich, wobei jedes neue Intervall 5 Freiheitsgrade mehr bringt, je einen für die 5 Teilpolynome, die restlichen Koeffizienten sind durch Rand-Bedingungen fixiert. (Vgl. Abschnitt 18).

- b. Ein freier Aerotriangulierungsstreifen erreicht zufolge der Erdkrümmung und der film- und gerätebedingten Konvergenzfehler bereits nach 8 - 20 Modellen, je nach Bildmassstab, eine Grenze, ab der die für die Ausgleichung notwendigen Drehparameter, vor allem φ , grösser als $0,5^\circ$ werden können. Diese Tatsache unterstreicht, dass Polynomialmethoden nur für relativ kurze Streifen ohne Entkrümmung oder zumindest Erdkrümmungselimination eingesetzt werden sollen.

8.4 Die Passpunktanordnung als limitierender Faktor.

8.41 Jede photogrammetrische Messung eines Passpunktes ist mit einem Fehler behaftet, der seinen Ursprung in vielen Einzelkomponenten hat, und diesem versucht sich das Polynom bestmöglich anzupassen. Wenn wir zunächst abstrakt nur diese Fehler betrachten, erkennen wir in ihnen die Ursache von Streifenverspannungen, die keinesfalls zu systematischen Fehlervergrößerungen führen sollen, wie in Abbildung 8.41(1).

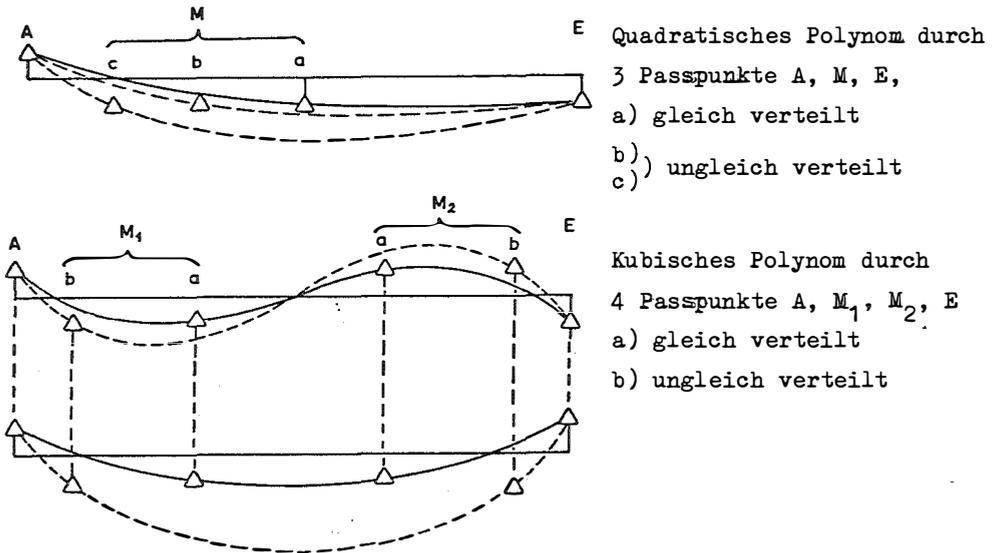


Abb. 8.41(1): Systematische Streifenverspannung durch einzelne Fehler in den Stützstellen.

Für jeden Streifenausgleich gilt daher R e g e l 1 :

Gleichverteilung der Passpunkte - geringste Verspannung des Streifens,
Ungleichverteilung der Passpunkte - grosse Verspannung des Streifens.

Streifenverspannungen, wie sie in Abb. 8.41(1) unten dargestellt sind, treten natürlich nicht immer in der Form auf, sie sind abhängig von den Fehlervorzeichen in allen Kombinationen. Die Wahrscheinlichkeit für die im letzten Schaubild dargestellte Verspannung im Vergleich zu allen möglichen ist, wie man sich leicht abschätzen kann, kleiner als $\frac{2}{7}$.

Das Phänomen der Streifenverspannung ist in der Literatur wiederholt dargestellt worden (Jordan 1972, § 132, Fig. 11, oder Waldhäusl 1963). Für die praktische Arbeit halte ich aber auch die daraus folgenden Regeln für wichtig:

Es genügt nicht, auf die Abhängigkeit des Ausgleichsergebnisses von der Passpunktverteilung hinzuweisen. Man muss auch expressis verbis erklären, wie die Passpunktverteilung zu sein hat. Brucklacher 1959 und Halwax 1961 haben für ihre Streifenausgleiche darauf verwiesen. Bei anderen Autoren fehlen exakte Hinweise völlig.

8.42 Damit die 5 Grundpolynome aus der Familie bis zum 2. Grad ⁺), die den Streifenverlauf der absoluten Orientierungsparameter m_x , m_y , φ , ω und κ sowie den Doppelsummationseinfluss (durch die Integration, die einer Graderhöhung dreier Grundpolynome entspricht) beschreiben, eindeutig aus Koordinatenfehlern bestimmt werden können, werden die in Tab. 8.42(1) angeführten Passpunktmindestanordnungen verlangt.

Die dort ersichtliche, grössere Anzahl erforderlicher Koordinaten gegenüber der Anzahl von unbekanntem Koeffizienten folgt aus der Tatsache, dass die notwendigen Angaben nicht Koordinaten sondern Strecken (m_x, m_y) und Tangenten ($\text{tg } \omega$) sind.

Die Anzahl der Gleichungen könnte theoretisch wohl gleich der der Unbekannten sein. Da man in der Praxis jedoch entweder Lage-, Höhen- oder Vollpasspunkte misst, niemals y- oder x_h -Passpunkte, fallen automatisch mehr Informationen als mindesterforderlich an. Sie nicht zu verwenden, wäre unsinnig.

⁺) 1. Polynome 0. Grades, die, in Gleichung 7(5) eingesetzt, zur Näherungsdrehmatrix R_2 führen, sind als trivial weggelassen worden.

2. Hinsichtlich der Formeln dazu siehe Abschnitt 11.

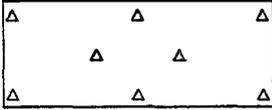
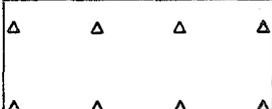
Typ $m_x, m_y, \varphi, \omega, \kappa$ (Grundpolynomgrade) +)	Passpunktverteilung	Unbekannte Koeffizien- ten	Erforderl. Pass- punkte/einzelne Koordinaten
Typ 1 1 1 1 1		13	5/15
Typ 2 1 2 1 2		16	6/18
Typ 1 2 1 2 1		15	6/18
Typ 2 2 2 2 2		18	8/24
	oder 		

Tabelle 8.42(1): Grundtypen von Passpunktmindestanordnungen.

Typ 1 1 1 1 1 verlangt für $(\int \text{Pol}_{m_x}^1(x) dx + \Delta x_0)$ 3 x-Stützstellen,
für $(\text{Pol}_{m_y}^1(x))$ 2 m_y -Stützstellen,
für $(-\int \text{Pol}_{\varphi}^1(x) dx + \Delta z_0)$ 3 z-Stützstellen,
für $(\text{Pol}_{\omega}^1(x))$ 2 $\text{tg}\omega$ -Stützstellen,
für $(\int \text{Pol}_{\kappa}^1(x) dx + \Delta y_0)$ 3 y-Stützstellen.

Analoge Überlegungen gelten für die anderen Typen.

Δ = Vollpasspunkte für x, y und z.

+) Die fünf Ziffern geben der Reihe nach den Grad der Grundpolynome für $m_x, m_y, \varphi, \omega$ und κ an.

Damit sind auch die Grundlagen erkannt, die das Aufstellen weiterer Regeln für Polynomstreifenausgleiche ermöglichen:

R e g e l 2: Zu jedem Polynomtyp gibt es eine ("polynomgerechte") Mindestpasspunktanordnung, die sich aus dem Grad der Grundpolynome unter Berücksichtigung von deren teilweiser Integration ableiten lassen.

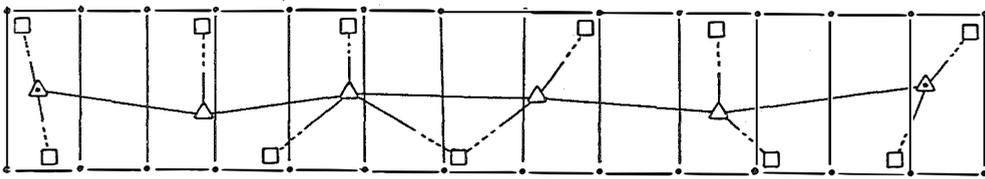
R e g e l 3: Die Anzahl der Polynomkoeffizienten erfordert nicht eine gleiche Anzahl von Passpunktkoordinaten, sondern eine gleiche Anzahl von bestimmten, aus Passpunktkoordinaten definierten, absoluten Orientierungselementen.

R e g e l 4: Die Anzahl der praktisch erforderlichen Passpunktkoordinaten ist stets grösser als die Anzahl der Polynomkoeffizienten. Zur Bestimmung der Polynomkoeffizienten aus Passpunktkoordinaten wird daher zweckmässigerweise stets eine (vermittelnde) Ausgleichung angesetzt werden.

R e g e l 5: Es erscheint besser, den Polynomgrad niedriger anzusetzen, als sich der Gefahr einer Streifenverspannung durch funktional nicht polynomgerechte Passpunktanordnung auszusetzen.

8.43 In Sonderfällen ist es zweckmässig, das durch die Grundpolynome fixierte Polynomialausgleichsmodell so zu modifizieren, dass kein darin enthaltenes Element unbestimmt bleibt. Ein solcher Sonderfall ist das besonders für den Strassenbau vorkommende "Doppelpolygon". Kein geodätisches Doppelpolygon im Sinne zweier paralleler, verknüpfter Polygonzüge, sondern das ihm verwandte, bei dem ein streifenachsnaher Polygonzug das Aeropolygon kontrolliert; am Streifenrand liegen nur Höhenpasspunkte, keine Lagepasspunkte vor. Und diese Höhenpasspunkte seien auch noch nicht bestimmt, nur die Zenitsdistanzen seien dorthin - vom Polygonzug aus - beobachtet: Ein durchaus wirtschaftlicher und praktischer Fall, etwa wie in Abb. 8.43(1).

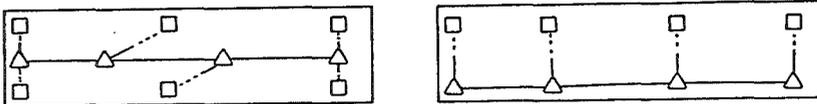
Die Passpunkte seien aus Zeitgründen vor dem Flug und/oder aus Personal-mangel erzwungenermassen an einem einzigen Tag mit einer Polygonzugspartie gemessen. Wegen der Schwierigkeit des Geländes seien die Höhenpunkte am Streifenrand nicht begangen worden (Gebirgstal).



- Aeropunkte, zu bestimmen
- △ Rückwärtsschnitte } x, y, z
- △ Polygonpunkte }
- Höhenpasspunkte (Zenitdistanz vorhanden)

Abb. 8.43(1)

Vor der Aerotriangulation wäre kein Modell auf Grund der wenigen Passpunkte absolut orientierbar. Aerotrianguliert man dann aber, indem man $Pol_{mx}(x) = Pol_{my}(x)$ für den meist schmalen Auswertebereich entlang der Streifenachse zulässt, so stehen für den neu entstandenen Typ 2=2222 mit der erforderlichen Minimalanordnung Abb. 8.43(2) hinreichend Streifeninformationen zur Verfügung.



- Höhenpasspunkt, nur Zenitdistanz bekannt
- △ Vollpasspunkt (= Polygonpunkt)

Abb. 8.43(2): Minimalpasspunktanordnung für Typ 2=2222

Da die Höhenpasspunkte selbst zunächst unbekannt sind, wird üblicherweise folgender Weg beschritten:

Zunächst erfolgt ein Ausgleich mit $Pol_{\omega}(x) = Pol_{my}(x) = 0$, also etwa nach Typ 1o1o1 oder Typ 2o2o2. Das Resultat ergibt ausreichend genaue Koordinaten, um die schiefen (Raum-) Entfernungen zu den gemessenen Zenitdistanzen zu berechnen. Daran schliesst sich die nun mögliche Berechnung der Höhen selbst an, mit deren Hilfe, als Passpunkte, die Streifenausgleichung durchgeführt wird, diesmal mit dem kompletten Polynom (Typ 2=2222). Sollte die Kontrollrechnung bezüglich der Strecken und Zenitdistanzen noch zu grosse Widersprüche ergeben, ist nach einem zweiten Ablauf derselben Prozedur mit verbesserten Passpunkthöhen mit dem endgültigen Ergebnis zu rechnen. An Grossrechenanlagen lassen sich die Zenitdistanzen selbst in den Ausgleich einbauen (Stark 1970, Stephani 1971, Wong 1972).

Aus diesen oder ähnlichen "Sonderfällen" ergibt sich

R e g e l 6: Bei der Auswahl der relativ am besten geeigneten Polynomtype muss man sich auch den Erfordernissen der Passpunkte anpassen können. Ein Idealpolynomsystem allein genügt für die Praxis nicht.

8.5 Das Polynomialmodell an sich als limitierender Faktor.

Wenn man die durch die doppelte Summation zufälliger Uebertragungsfehler entstandenen Streifenfehler durch stetige Polynome approximiert, so kann dies keine ideale Lösung, eben nur eine mehr oder weniger gute Approximation ergeben. Die die einzelnen zufälligen Fehler mit beachtende Einzelmodelltriangulation kann im Falle von Einzelstreifen auch nichts Besseres tun, als sich den Sollinformationen bestmöglich anzupassen. Und diese sind auf die Passpunktinformationen beschränkt. Ein geringfügig besseres Ergebnis folgt bei der Einzelmodelltriangulation aus der Gleichzeitigkeit der Behandlung des Streifenbildungs- und des Streifenausgleichsprozesses, wobei man den Grad der Approximation an die Nachbarbedingungen sowie an die Passpunktbedingungen mit Gewichten regulieren kann.

Wir wissen jedoch, dass - zumindest bei der Analogaerotriangulation - die Streifendeformationen mit systematischem und pseudosystematischem Erscheinungsbild gegenüber jenen mit rein stochastischem weit überwiegen und dass die Polynomialapproximation eine praktisch durchaus brauchbare Methode darstellt. Eine Ueberbetonung der stochastischen "Streifenknicke" wäre unrichtig. Für Einzelstreifenausgleiche ist eine Weiterverwendung der Polynomialapproximation durchaus gerechtfertigt. An Hand von Abb. 8.5(1) soll anschaulich erläutert werden, welche Fehler man begeht, wenn man die Aeropolygone durch "Aeropolynome" approximiert.

Im Fall a seien gleich grosse, systematische Knicke Δd_r bzw. Δd_m angenommen und dichteste Passpunktinformationen vorhanden, sodass eine optimale Approximation möglich ist.

Im Fall b seien die Passpunkte nur an den Modellübergangsstellen gegeben, wodurch sich die Approximationsfehler schon verdoppeln.

Im Fall c liege eine rein stochastische Knickfolge vor und nur wenige Passpunkte. Die Abweichungen f_c des Aeropolygons vom "Aeropolynom" können nicht mehr auf triviale Art abgeschätzt werden. Hier liegt der Hauptgrund für das nur begrenzte Entsprechen der Polynommethoden, auch im Rahmen der Blockausgleiche, die als Ausgleich dafür die grössere Passpunktdichte bei nur geringer Streifenlänge erfordern. f_c lässt sich nur über die strengere Fehlertheorie und über umfangreiche Tests ab-

schätzen (Lit.: Ackermann 1965 und Jordan 1972), woraus sich die wichtige Formel 8(18) ergeben hat.

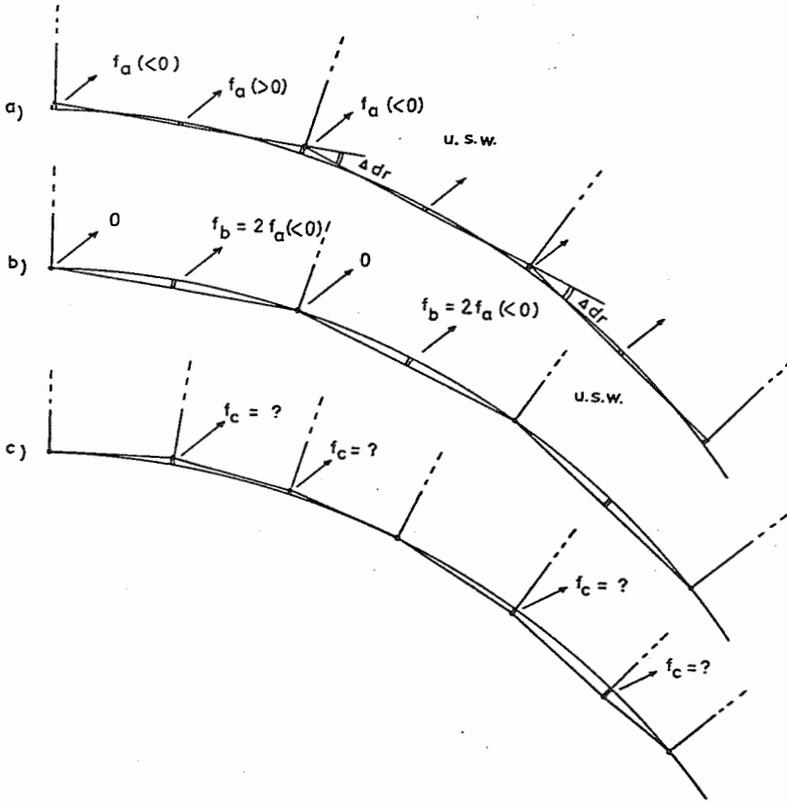


Abb. 8.5(1): Anschauliche Darstellung der systematischen Vernachlässigungen, die man begeht, wenn Aeropolygone durch Polynome approximiert werden. Weitere Erklärungen im Text. Die dargestellten Vernachlässigungen sind sehr klein:

$$f_a^{(r)} = \frac{b \cdot \Delta dr}{16 \vartheta^3} = \frac{10^5 \cdot 2}{16 \cdot 6366} \doteq \pm 2 \mu\text{m} \quad (r = \varphi, \omega, \kappa)$$

$$f_a^{(m)} = \frac{b \cdot \Delta dm}{16} = \frac{10^5 \cdot 10^{-4}}{16} \doteq 0 \quad (m = mx, my)$$

8(19)

$$f_b = 2 f_a = - 4 \mu\text{m}$$

$$f_c = k f_a \quad k = ?$$

9. Grenzen der Anwendungsmöglichkeiten von Polynomausgleichsformeln,
die in den Streifenkoordinaten begründet sind.

9.1 Zur günstigsten Anordnung der Modellverknüpfungspunkte.

Damit die Einzelfehler in den Modellübergangspasspunkten beim Folgemodellanschluss, d.h. bei der Streifenbildung, kein zu grosses Gewicht bekommen, ist auf eine dichte und gleichmässige Verteilung der Modellübergangspasspunkte sorgfältig zu achten, eine Aufgabe, die zu den wichtigen Vorbereitungsarbeiten gehört. Abb. 9.1(1) zeigt die in der Praxis üblichen Anordnungen.

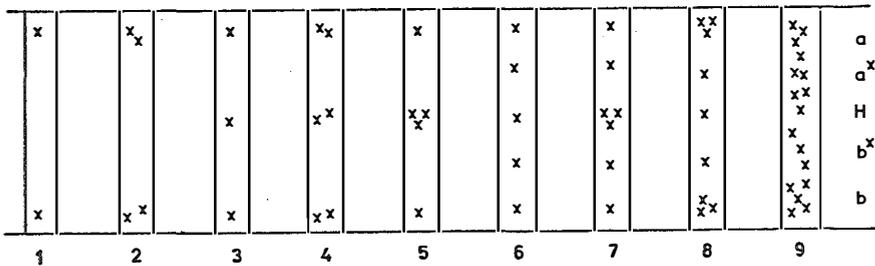
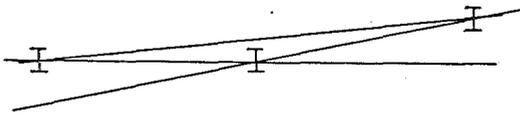


Abb. 9.1(1): Anordnungen der Modellanschlusspunkte (auch Übergangspasspunkte) in der Praxis der Aerotriangulation.

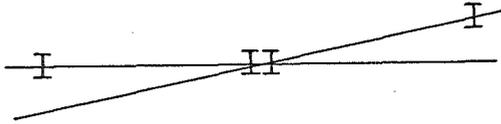
- 1 Einzelne Punkte nur in den Modellecken (a,b)
- 2 Doppelpunkte nur in den Modellecken
- 3, 4 analog 1, 2 auch in Nadirpunktnähe (a, H, b)
- 5 dem Nadirpunkt wird grösseres Gewicht gegeben
- 6 Gleichverteilung über den Anschlussquerschnitt (a, a^x, H, b^x, b) mit 5 Punkten
- 7, 8 mit verschiedenen Gewichtsverteilungen, sonst wie 6
- 9 grosse Dichte, etwa bei Katasterauswertungen

Dem Fall 9 kommt natürlich die grösste Sicherheit und Genauigkeit zu, er ist in der Praxis aber nur vertretbar, wenn die Vielzahl der Punkte nicht erst künstlich markiert oder ausgewählt werden muss.

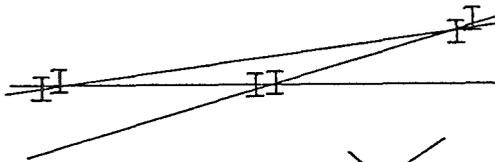
Fall 6 ermöglicht gerade noch hinreichend, dass die Modelle über den ganzen y-Querschnitt hinweg kontrolliert und aneinander gefügt werden können, dass lokale Messschwierigkeiten sich nicht übermässig auswirken können, dass grobe Messfehler oder Identifizierungsfehler sicher erkannt werden können. Die Fälle 1-5 sind zwar die praktisch am häufigsten angewandten, für einen gehobenen Anspruch an Genauigkeit und Zuverlässigkeit genügen sie jedoch nicht, wie Abb. 9.1(2) beweist.



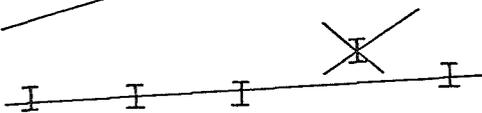
Welcher Punkt ist falsch gemessen?
Eine Ueberbestimmung deckt den Fehler nie auf.



Ebenso nicht wirksam kontrolliert.



Wieder keine neue Information;
nah beieinander gelegene Punkte weisen häufig dieselben bild- oder geräte-bedingten Messfehler auf.



Klare Fehlerausscheidung möglich.
5 Punkte = relativ grosse Sicherheit.

Abb. 9.1(2): Zur Fehleraufklärung in Modellanschlusspunkten. Die mit I bezeichnete Grösse entspricht dem sechsfachen mittleren Messfehler.

5 gleichmässig über den Modellanschlussquerschnitt verteilte Punkte müssen daher als redliches Erfordernis ingenieurmässiger Aerotriangulation angesehen werden. Weniger als 5 lassen jedenfalls verminderte Genauigkeit erwarten. Zur Streifenverbindung im Blockverband gilt analog, dass Bindepunkte im Mindestabstand etwa halber Basislängen vorgesehen werden sollen. Auch Ebner 1971 erhielt so wesentlich bessere Blockausgleichungsergebnisse und vertritt die starke Modellverknüpfung.

9.2 Die Streifenglättung, eine wichtige Voraussetzung für die freie Aerotriangulation mit Streifen.

Eine Aerotriangulation kann nicht genauer werden, als es die Klaffen zwischen den Folge- bzw. Nachbarmodellen zulassen. Wenn die Leistungsfähigkeit der Aerotriangulation, ihre Genauigkeit und Wirtschaftlichkeit ausgenutzt oder gar gesteigert werden sollen, müssen wir trachten, möglichst stetige Modellübergänge zu erzeugen. Die grössten Anschlussdifferenzen treten am Streifenrand und damit an der Grenze zum Nachbarstreifen auf, gerade dort, wo durch die Aerotriangulation Passpunkte für die Detailauswertung bestimmt werden sollen. Es genügt daher nicht, nur die Streifenachse klaffenfrei zu machen und die Punkte ausserhalb der Streifenachse im Ueberlappungsbereich zweier Modelle zu mitteln.

Abbildung 9.2(2) zeigt, wie die Koordinaten der Modellübergangspunkte durch eine bloße Mittelung verändert werden, während die nur in einem Modell vorkommenden Punkte gegenüber Abbildung 9.2(1) unverändert bleiben. Das an den ursprünglichen Anschlussdifferenzen erkennbare, grosse Streuungsband an den Streifenrändern bleibt also trotz der Mittelbildung erhalten. Die Situation kann sich durch die Streifenausgleichung noch weiter verschlechtern (Abbildung 9.2(3)).

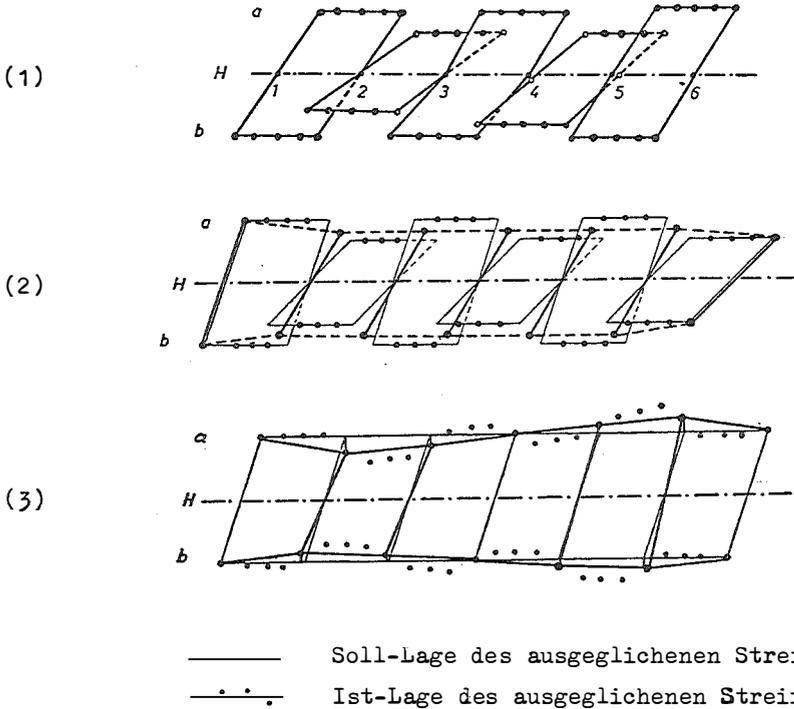


Abb. 9.2(1-3): Fehler der Streifenkoordinaten vor und nach quadratischem Polynomialausgleich mit 6 Passpunkten, wenn keine Streifen-glättung erfolgt.

Die Anschlussdifferenzen haben ihre Hauptursache in systematischen Film- und Instrumentalfehlern. Am grössten sind sie bei der freien Aeropolygonierung mit Hilfe der sogenannten Universalauswertegeräte. 1964 hat der Verfasser ein einfaches Verfahren angegeben, mit dessen Hilfe die Streifenkoordinaten geglättet werden können. Das Folgemodell wird mittels einer Helmerttransformation in der yz - Ebene unter Verwendung von mindestens 5 gleichmässig über den Anschlussquerschnitt verteilten Punkten an das Vormodell antransformiert. Der aus der Helmerttransformation gewonnene Massstab wird auf x angewendet, wonach noch eine mittlere x - Anrückungskorrektur angebracht wird. Die Längsneigung bleibt dabei unver-

ändert. Das Streuungsband am Streifenrand wird durchschnittlich auf 30 - 50% seiner ursprünglichen Breite reduziert. Das Verfahren ist einfach und kann somit auch in der mittleren Datentechnik ohne Schwierigkeiten programmiert werden.

9.3 Zur optimal glatten Streifenbildung aus Einzelmodellen.

Aus den zuvor diskutierten Gründen empfiehlt sich folgender praktischer Streifenbildungsvorgang bei der Einzelmodell-aerotriangulation, falls Streifenkoordinaten als Input für die Ausgleichung benötigt werden, wie dies bei den Polynommethoden der Fall ist:

1. Räumliche Drehstreckung mit R_1 oder einer äquivalenten strengen Orientierungsmatrix. Die Transformationselemente werden aus den Koordinaten
 - a. des Projektionszentrums und der Modellanschlussgeländepunkte oder
 - b. der Modellanschlusskreuzpunkte in 2 z-Ebenen nach Abbildung 9.3(1) bestimmt. Damit sind φ und κ so gut, wie es mit den Modellmessdaten möglich ist, übertragen.
2. Zur Verbesserung des Massstabs- und Querneigungsanschlusses wird nun eine Helmerttransformation in der yz-Ebene nur mit den Geländepunkten und ohne das Projektionszentrum durchgeführt, wonach ω , γ , z und der Massstab m optimal angeschlossen sind.
3. Mit dem zuletzt erhaltenen Massstabsverbesserungsfaktor dm werden alle x des Folgemodelles verbessert und letztlich werden
4. alle x der Modellanschlusspunkte vermittelnd an die des Vormodelles angerückt, und somit auch noch die x -Translation erhalten.

Bei der in 2. enthaltenen differentiellen Drehung $d\omega$ handelt es sich um eine Größenordnung $d\omega < 10^{\circ}$. Und damit ist schon ausgedrückt, dass die durch das Modell der Helmerttransformation getroffene Vernachlässigung auch bei grossem κ kleiner als die φ -Orientierungsgenauigkeit ist. Der obige Vorschlag weicht in 2 Punkten wesentlich von der allgemein geübten Praxis ab, die nur nach 1.a vorgeht: Erstens wird eine rechnerische Methode des Folgemodellanschlusses ohne Projektionszentrum vorgeschlagen, die eine Alternative besonders dann darstellt, wenn sich die Projektionszentren von Modell zu Modell im Auswertegerät verändern oder leicht verändern können. Zweitens wird das Ergebnis der räumlichen Transformation, für die man der Längsneigung wegen auch Punkte ausserhalb der Gelände-

fläche benötigt, durch eine nachfolgende Glättungsoperation so verbessert, dass die Geländepunkte über die ganze Streifenbreite im Anschlussquerschnitt zusammenpassen.

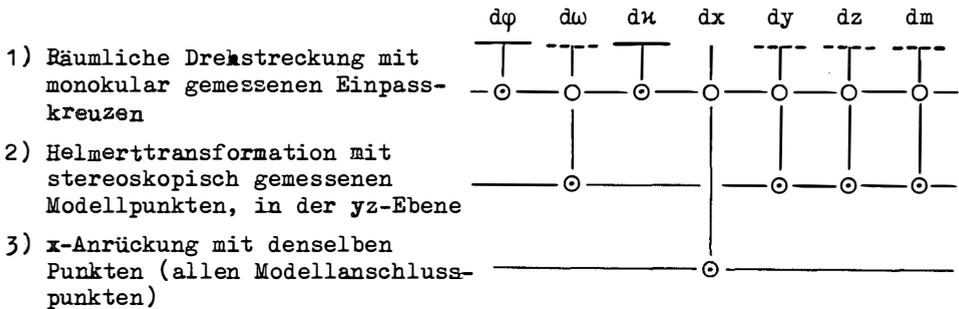
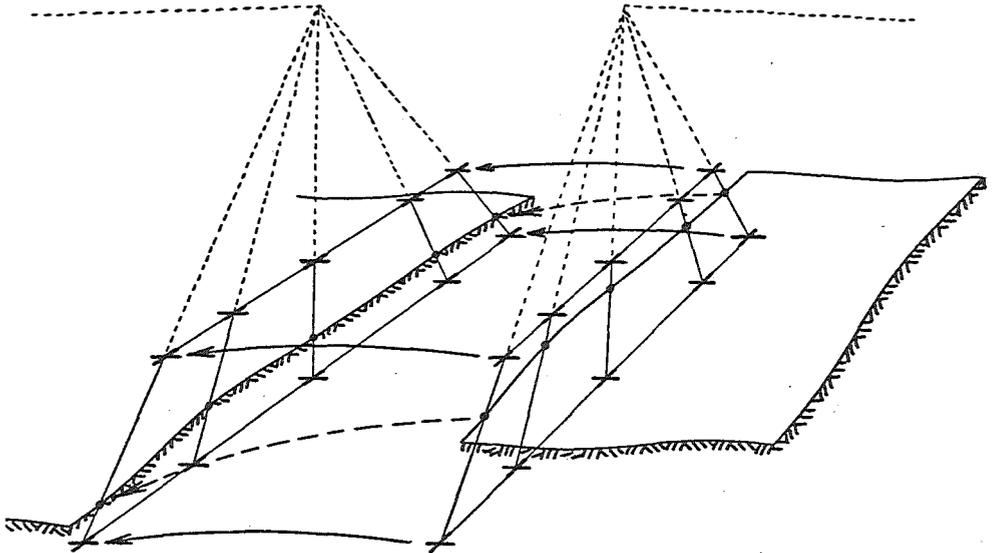


Abb. 9.3(1): Folgmodellanschluss über Einpasskreuze und Modellanschlusspunkte. ○ = Zwischenergebnis ⊙ = Endergebnis.

Um uns eine Grössenvorstellung von den oben behandelten Anschlussdifferenzen zu machen, entnehmen wir dem Handbuch für Vermessungskunde, Band IIIa/3, 1972, S. 1685, die folgende Tabelle:

$$\begin{aligned} \Delta x &= 10 \mu\text{m} \\ \Delta y &= 25 \mu\text{m} \text{ (im Bildmassstab)} \\ \Delta z &= 50 \mu\text{m} \end{aligned}$$

Die Anschlussdifferenzen erreichen demnach etwa das Dreifache der Einzelmodellmessgenauigkeit. Es können jedoch noch wesentlich grössere Werte vorkommen. Beispiele aus der langjährigen Praxis des Bundesamtes

für Eich- und Vermessungswesen in Wien sind zum Beispiel im Anhang von Waldhäusl, 1968, zu finden, in denen Klaffen bis zum Siebenfachen der Messgenauigkeit dargestellt sind. Und diese Fälle sind für gebirgisches Gelände durchaus nicht selten. Die Notwendigkeit und Zweckmässigkeit einer Streifenglättung von analog frei triangulierten Streifen stehen bei mitteleuropäischen Anforderungen an die Genauigkeit der Ergebnisse ausser Frage.

Auch bei der Antransformation der Folgemodelle an die Vormodelle bei der Einzelmodelltriangulation lässt sich eine optimale Stetigkeit des zu erzeugenden Streifens erzielen. Hier muss ebenso den systematischen, photogrammetrischen Fehlern, den sogenannten Modelldeformationen aller Art, Rechnung getragen werden. Das heisst, es muss dafür gesorgt werden, dass das Projektionszentrum optimal zur Uebertragung der Längsneigung herangezogen wird, denn dafür gibt es nichts Besseres, es darf aber nicht verhindern, dass der Massstab und die Querneigung mit Hilfe aller Modellanschlusspunkte und ohne "Einfluss von oben" bestimmt werden. Ziel muss sein, dass der Folgemodellanschluss dort optimal wird, wo man später weiterzuarbeiten hat. Am Projektionszentrum ist später niemand mehr interessiert, wenn es einmal seine Funktion als φ -Uebertragungshilfe erfüllt hat. Nach der Aerotriangulation ist es bedeutungslos. Es ist wichtiger, dass die Geländemodelle bestmöglich zusammenpassen, als dass man ein nur theoretisch schönes Zusammenpassen der Projektionszentren erzwingt.

Eine weitere, einfache Möglichkeit besteht darin, für die Modell-Antransformation nur die x-Koordinaten des Projektionszentrums zu verwenden, sodass das φ bestimmbar ist, die übrigen 6 Transformationselemente, vor allem ω und y-Massstab, jedoch nicht unnötig "verzerrt" werden. Es ist, wie gesagt, besser, den Modelldeformationen nachzugeben und deren systematischen Anteil durch den Streifenausgleich mitverbessern zu lassen, als - aus einer Zwangsvorstellung heraus - die Identität der Projektionszentren zu erzwingen. Dieser Weg wurde neuerdings auch von P. Schmid, 1973, in einer vom Verfasser betreuten Diplomarbeit mit Erfolg beschritten. Eingehende Untersuchungen darüber werden gesondert veröffentlicht werden.

9.4 Zur Messgenauigkeit der Auswertegeräte.

Für numerische Arbeiten sollten die Auswertegeräte einer sorgfältigen, periodischen Kontrolle unterzogen werden. Die Aerotriangulation ist

oft mit demselben Bildmaterial durchzuführen, wie die nachfolgende Kartierung. Der grösstmöglichen Wirtschaftlichkeit wegen wird der Bildmassstab gerne so klein, wie es die geforderte Kartiergenauigkeit gerade noch zulässt, gewählt. Für die numerische Auswertung vorher, also für die Aerotriangulation, wird mindestens um den Faktor 2 mehr Genauigkeitsleistung gefordert. Wer dann mit einem Kartiergerät arbeiten muss, ist gezwungen, ihm das Letzte an Genauigkeitsleistung abzuverlangen. Und das setzt sorgfältigste Gerätejustierung voraus. In gebirgigem Gelände muss die Gerätejustierung gleichzeitig über einen grösseren z-Bereich geprüft werden. Die Arbeitsgruppe II/2` Standardtests der Internationalen Gesellschaft für Photogrammetrie hat eine Reihe von Testvorschlägen ausgearbeitet, die die Firmentestanweisungen wirkungsvoll ergänzen. Hier sei nur - wegen der Bedeutung der ständigen Qualitätskontrolle - auf die Arbeiten dieser Gruppe hingewiesen:

R. Burkhardt 1968, M. Döhler 1972, G. Bormann 1968, M. Döhler und K. Wolferts 1968, B. Makarovic 1968-1971, K. Szangolies 1968-1973, P. Waldhäusl 1968, G. Bormann und K. Hasler 1972, R.-P. Mark 1968, 1972, K. Schürer 1972.

EINFACHE POLYNOMIALANSATZE.

10. Der Polynomgrad in Praxis und Literatur.

Die in den beiden vorigen Abschnitten behandelten Voraussetzungen bedürfen noch einiger Ergänzungen aus Praxis und Literatur.

Die bislang im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen (BAEV), Wien, geübte Vorgangsweise beim Streifenausgleich ist die einzige, mir bekanntgewordene, die schon vor der Ära der Polynomausgleiche in einem graphischen Verfahren konsequent mit dem Verlauf der Orientierungselemente gearbeitet hat. Die sogenannte Bundesamtsmethode stellt eine weitgehende Verbesserung der bis 1950 bekannten Streifenausgleichsmethoden dar. Sie wurde von einem Team von Ingenieuren 1950 bis 1953 entwickelt (*). Die Grundlagen bildeten die Arbeiten von O.v.Gruber (1935), F. Nowatzky (1940), W. Schermerhorn und K. Neumaier (1939, 1940) sowie von J.M. Zarzycki (1949).

In der graphisch-rechnerischen Version (1950 - 1960) wurden im Laufe der etwa zwei Stunden pro Modell benötigten Ausgleichsarbeiten je Streifen sieben Kurven gezeichnet, die folgenden Elementen entsprachen:

1. $\text{Pol}_{my}(x)$ aus Passpunktangaben,
2. $-\int \text{Pol}_{\phi}(x) + \Delta z_0$ aus Passpunktangaben,
3. $\text{Pol}_{\omega}(x)$ aus Passpunktangaben,
4. $\int \text{Pol}_{\kappa}(x) + \Delta y_0$ aus Passpunktangaben,
5. $-\text{Pol}_{\phi}(x)$ Differentialkurve nach 2.,
6. $\text{Pol}_{\kappa}(x)$ Differentialkurve nach 4.,
7. $\int \text{Pol}_{mx}(x) + \Delta x_0$ aus Passpunktangaben.

F. Halwax hat die fünf Originalkurven (1,2,3,4,7) einheitlich durch quadratische Polynome ersetzt, die aus je drei Angaben (Anfang, Mitte und Ende des Streifens !) ermittelt werden. Dazu werden je zwei Vollpasspunkte, angeordnet entsprechend Typ 1 2 1 2 1 in Tab. 8.42(1), ohne Ausgleichung verwendet. Eine Quasiausgleichung geschieht manuell, indem die Sollwerte an den sechs Passpunktstellen so lange verändert werden, bis sich das Ergebnis hinreichend sowohl allen verfügbaren Passpunkten als auch den Nachbarstreifenpunkten genähert hat.

*) Dem Team der Abteilung Photogrammetrie gehörten an:
K. Neumaier; J. Ebenhöf, W. Krejci, B. Send, H.G. Jerie,
F. Halwax (vgl. Halwax 1961); J. Bernhard, H. Muzik.
Den wesentlichsten Anteil trug W. Krejci bei.

Die Methode hat sich insgesamt an vielen hundert Streifen beliebig gebirgigen Geländes bewährt. Besonders aus der Zeit der graphischen Aerotriangulationsausgleichung, die mit relativ vielen Passpunkten ausgeführt wurde, besitzen wir Einblick in das Verhalten der Streifendeformationen nach freien Aerotriangulationen. Es gilt als Regel, dass sich die y-Massstabsverbesserung (1) und die Querneigungsverbesserung (3) durch Fast-Gerade, äusserstenfalls durch kaum gekrümmte Kurven 2. Grades darstellen lassen. Die Aufbiegungskurve (2), die Azimutkurve (4) sowie die "x-Restkurve" (7) zeigen stetig gekrümmten Verlauf (2. bis 3. Ordnung) mit so geringen Krümmungsänderungen, dass Halwax quadratische Polynome für ausreichend hielt, wenn nur längere Streifen nach der Ganzstreifenausgleichung in Teilstreifen zu etwa 10 Modellen behandelt werden. Kubische Glieder würden bei gleicher Genauigkeit des Ergebnisses sicherlich 15 - 20 Modelle bearbeiten lassen.

W. Hofmann zeigt in Finsterwalder-Hofmann, 1968, S. 375 ff., dass die Streifenachsdeformationen nach einer ganzen, rationalen Funktion dritten Grades der Modellnummern - und damit der Streifenlänge - verlaufen.

In Jordan-Rinner, 1972, S. 1787 und S. 1975, finden wir nach sehr eingehenden Diskussionen der hier behandelten Problematik folgende Schlussfolgerungen:

(S.1787): "Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass in der Praxis überwiegend Fälle auftreten, die sich an die Schemafälle mit 3 oder 4 Passpunktgruppen anlehnen. In diesen Fällen erbringen Polynome 2. oder 3. Grades einfach durchzuführende, effektive Ausgleichungen, die nur wenig hinter strengeren Ausgleichungen (nach der Theorie von Vermeir, Ackermann 1961, 1965) zurückstehen.

Man benützt für Streifen mit

- 3 Passpunktgruppen: Polynome 2. Grades,
- 4 Passpunktgruppen: Polynome 2. Grades, falls der Abstand der Gruppen kleiner als etwa 4 - 6 Basislängen ist, anderenfalls 3. Grades,
- Passpunkten im ersten und letzten Modell: Polynome 3. Grades (mit Hinweis auf mögliche Verfälschung durch lokale Fehler)."

(S.1975): "Die einfachen Standardfälle der Passpunktanordnungen können mit Polynomen 2. oder 3. Grades ausgeglichen werden. Die Genauigkeitsergebnisse sind von denen strengerer Ausgleichungen nicht wesentlich unterschieden."

Nach diesen kompetenten, theoretisch und praktisch fundierten, zusammenfassenden Feststellungen können wir konkrete Polynomialausgleichssysteme zusammenstellen und diskutieren.

11. Die Familie einfacher Ausgleichspolynome zum Ansatz 7(5).

Der allgemeine Ansatz für die Streifenausgleichspolynome gestattet es, zunächst eine Familie einfacher Streifenausgleichspolynome \mathbb{T}_3^{AT} (bis zum dritten Grad) mit Grundpolynomen \mathbb{T}_2^G ($= \text{Pol}_{mx}, \text{Pol}_{my}, \text{Pol}_\varphi, \text{Pol}_\omega, \text{Pol}_\kappa$; bis zum zweiten Grad) anzugeben.

Die \mathbb{T}_2^G haben die Form:

$\text{Pol}_0 = a$ 11(1)

$\text{Pol}_1 = a + b x$

$\text{Pol}_2 = a + b x + c x^2$

Der Fall Pol_0 ist trivial. Er führt, in 7(5) eingesetzt, nur zur linearen Näherungsmatrix R_2 . Er sei daher aus den weiteren Betrachtungen ausgeschlossen.

Anmerkung: Theoretisch ist der Fall Pol_0 allerdings interessant, weil er, wenn wir an gestückelte Polynome denken, vgl. K. Kubik, 1972, zusammen mit den Längs- und Querbedingungsgleichungen den Uebergang zur Aero-triangulationsausgleichung mit Einzelmodellen darstellt.

Die linearen und/oder quadratischen Grundpolynome sind nun in sinnvoller Weise, das heisst nach den in Abschnitt 10 dargelegten theoretischen und praktischen Kenntnissen, in die Grundgleichung 7(5) einzusetzen. Wie im Abschnitt 8.42, Tabelle 1, sollen vier Grundtypen von Streifenausgleichsformeln unterschieden werden:

Typ 1 1 1 1 1

Typ 1 2 1 2 1

Typ 2 1 2 1 2

Typ 2 2 2 2 2

Die fünf Ziffern geben wieder, wie in Tab. 8.42(1), der Reihe nach den Grad der Grundpolynome für $mx, my, \varphi, \omega, \kappa$ an.

Wenn man die Polynome Pol_2 in den allgemeinen Ansatz 7(5) einsetzt und das Ergebnis matrizenrichtig nach den Koeffizienten ordnet, kommt man zu folgender Formelgruppe:

$$\Delta x = B \cdot u \quad 11(2)$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & . & . & x & . & z & . & -y & \frac{x^2}{2} & . & xz & . & -xy & \frac{x^3}{3} & . & x^2z & . & -x^2y \\ . & 1 & . & . & . & y & . & -z & x & . & xy & . & -xz & \frac{x^2}{2} & . & x^2y & . & -x^2z & \frac{x^3}{3} \\ . & . & 1 & . & . & z & -x & y & . & . & xz & \frac{x^2}{2} & xy & . & . & x^2z & -\frac{x^3}{3} & x^2y & . \end{array} \right)$$

$$u = (\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, a_x, a_y, a_\varphi, a_\omega, a_\kappa, b_x, b_y, b_\varphi, b_\omega, b_\kappa, c_x, c_y, c_\varphi, c_\omega, c_\kappa)^T$$

Aus dem Ansatz 7(5) folgt direkt das Bildungsgesetz für die in den Formeln vorkommenden Submatrizen:

Sei

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & . & . \\ . & 1 & . \\ . & . & 1 \end{pmatrix} = (c_{ij}) = \underline{E}, \quad \text{für die constanten Koeffi-} \quad 11(3)$$

zienten in der Submatrix zu

$$u_c = (\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0)^T$$

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} x & . & z & . & -y \\ . & y & . & -z & x \\ . & z & -x & y & . \end{pmatrix} = (l_{ij}) \quad \text{für die linearen Koeffi-} \quad 11(4)$$

zienten in der Submatrix zu

$$u_l = (a_x, a_y, a_\varphi, a_\omega, a_\kappa)^T$$

$$\underline{Q} = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} & . & xz & . & -xy \\ . & xy & . & -xz & \frac{x^2}{2} \\ . & xz & \frac{x^2}{2} & xy & . \end{pmatrix} = (q_{ij}) \quad \text{für die quadratischen Koeffi-} \quad 11(5)$$

zienten in der Submatrix zu

$$u_q = (b_x, b_y, b_\varphi, b_\omega, b_\kappa)^T$$

$$\underline{K} = \begin{pmatrix} \frac{x^3}{3} & . & x^2z & . & -x^2y \\ . & x^2y & . & -x^2z & \frac{x^3}{3} \\ . & x^2z & \frac{x^3}{3} & x^2y & . \end{pmatrix} = (k_{ij}) \quad \text{für die kubischen Koeffi-} \quad 11(6)$$

zienten in der Submatrix zu

$$u_k = (c_x, c_y, c_\varphi, c_\omega, c_\kappa)^T$$

dann ist

$$\underline{\Delta x} = \underline{B} \underline{u} = \underline{C} \underline{u}_c + \underline{L} \underline{u}_l + \underline{Q} \underline{u}_q + \underline{K} \underline{u}_k \quad 11(7)$$

wobei

$$(q_{ij}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (k_{ij}) \quad 11(8)$$

$$(l_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x} (q_{ij}) \quad 11(9)$$

11.1 Typ 1 1 1 1 1

$$\underline{\Delta x} = \underline{B}_1 \cdot \underline{u}_1 = \underline{C} \underline{u}_c + \underline{L} \underline{u}_l + \underline{Q} \underline{u}_q \quad 11(10)$$

$$\underline{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & . & . & x & . & z & . & -y & \frac{x^2}{2} & . & xz & . & -xy \\ . & 1 & . & . & y & . & -z & x & . & xy & . & -xz & \frac{x^2}{2} \\ . & . & 1 & . & z & -x & y & . & . & xz & -\frac{x^2}{2} & xy & . \end{pmatrix} \quad 11(11)$$

$$\underline{u}_1 = (\Delta x_o, \Delta y_o, \Delta z_o; a_x, a_y, a_\varphi, a_\omega, a_\kappa; b_x, b_y, b_\varphi, b_\omega, b_\kappa)^T \quad 11(12)$$

Dieser Ansatz weist 3 konstante, 5 lineare und 5 quadratische, insgesamt 13 Koeffizienten auf. Er ist für kurze Streifen beliebigen Geländes bis zu ca. 12 Modellen Streifenlänge geeignet, falls man $\sigma_{\max} \leq 2\sigma_o$ verlangt und mindestens 3 gleichverteilte Passpunktgruppen anordnet. Siehe Tab. 8.42(1).

11.2 Typ 1 2 1 2 1

$$\underline{\Delta x} = \underline{B}_2 \cdot \underline{u}_2 = \underline{C} \underline{u}_c + \underline{L} \underline{u}_l + \underline{Q} \underline{u}_q + \underline{K}_2 \underline{u}_k \quad 11(13)$$

$$\underline{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & . & . & x & . & z & . & -y & \frac{x^2}{2} & . & xz & . & -xy & . & . \\ . & 1 & . & . & y & . & -z & x & . & xy & . & -xz & \frac{x^2}{2} & x^2 y & -x^2 z \\ . & . & 1 & . & z & -x & y & . & . & xz & -\frac{x^2}{2} & xy & . & x^2 z & x^2 y \end{pmatrix} \quad 11(14)$$

$$\underline{u}_2 = (\Delta x_o, \Delta y_o, \Delta z_o; a_x, a_y, a_\varphi, a_\omega, a_\kappa; b_x, b_y, b_\varphi, b_\omega, b_\kappa; c_y, c_\omega)^T \quad 11(15)$$

Hier erscheint der Grad der Polynome der Nicht-Doppelsummationselemente um eins erhöht. Der Vorteil dieser Annahme kann darin gesehen werden, dass jedes seiner 5 Teilpolynome, nämlich $(\text{Pol}_{my}(x)), (-\int \text{Pol}_\varphi(x) dx), (\text{Pol}_\omega(x)), (\int \text{Pol}_\kappa(x) dx), (\int \text{Pol}_{mx}(x) dx)$, vom selben Grade ist, so dass sie an kleinen Rechenanlagen durch dasselbe Unterprogramm berechnet werden können, wie es z.B. bei Halwax, 1961, geschieht.

Der Ansatz weist 3 konstante, 5 lineare, 5 quadratische und 2 kubische, insgesamt 15 Koeffizienten auf. Er ist ebenso für kurze Streifen beliebigen Geländes bis zu etwa 12 Modellen geeignet, falls man $\sigma_{\max} \leq 2\sigma_o$ verlangt. Am Streifenrand ist dieser Ansatz etwas flexibler und verlangt um mindestens einen Passpunkt mehr (Tab. 8.42(1)).

11.3 Typ 2 1 2 1 2

$$\underline{\Delta x} = \underline{B}_3 \cdot \underline{u}_3 = \underline{C} \underline{u}_c + \underline{L} \underline{u}_l + \underline{Q} \underline{u}_q + \underline{K}_3 \underline{u}_k \quad 11(16)$$

$$\underline{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & . & . & x & . & z & . & -y & \frac{x^2}{2} & . & xz & . & -xy & \frac{x^3}{3} & x^2 z & -x^2 y \\ . & 1 & . & . & y & . & -z & x & . & xy & . & -xz & \frac{x^2}{2} & . & . & \frac{x^3}{3} \\ . & . & 1 & . & z & -x & y & . & . & xz & \frac{x^2}{2} & xy & . & . & \frac{x^3}{3} & . \end{pmatrix} \quad 11(17)$$

$$\underline{u}_3 = (\Delta x_o, \Delta y_o, \Delta z_o; a_x, a_y, a_\phi, a_\omega, a_\kappa; b_x, b_y, b_\phi, b_\omega, b_\kappa; c_x, c_\phi, c_\kappa)^T \quad 11(18)$$

Gegenüber Typ 1 1 1 1 1 erhält dieser Typ für die Doppelsummations-
 elemente je einen Koeffizienten 3. Grades dazu. Durch die Inter-
 relationen treten in der x-Gleichung drei neue Glieder, in den anderen
 beiden Gleichungen nur jeweils das kubische, neue Glied auf. Dieser An-
 satz kann verwendet werden, wenn in der Streifenmitte nur Achspasspunk-
 te zur Verfügung stehen. Insgesamt verfügt dieses System über 16 Frei-
 heitsgrade. (Passpunktverteilung in Tab. 8.42(1). Dieser Typ ist für
 Streifen bis zu einer Länge von maximal 20 Modellen verwendbar, wenn
 man $\sigma_{max} = 2\sigma_o$ erwartet, und ist für beliebiges Gelände gültig.

11.4 Typ 2 2 2 2 2

$\underline{\Delta x} = \underline{B} \cdot \underline{u}$. Wir erhalten das vollständige Formelsystem 11(2), welches
 ebenfalls für Streifen bis zu etwa 20 Modellen geeignet ist, gegenüber
 dem vorigen Typ jedoch um 2 Freiheitsgrade mehr hat, wofür in Streifen-
 mitte eine zusätzliche Passpunktgruppe notwendig wird. Die Passpunkte in
 Streifenmitte, die für die Nichtdoppelsummationselemente gegenüber dem
 vorigen Typ neu erforderlich sind, können natürlich auch zu den anderen
 Passpunkten an den Streifendritteln gelegt werden (Siehe Tab. 8.42(1)).
 Insgesamt verfügt dieser Typ über 18 Freiheitsgrade. Erwartet man wieder,
 dass $\sigma_{max} = 2\sigma_o$, so erscheint dieser Typ für Streifen beliebigen Ge-
 ländes und von 20 Modellen Länge geeignet.

12. Vergleich der in der Praxis angewandten, einfachen Polynomverfahren.

12.1 Erläuterungen:

In Tabelle 12(1) sind eine Auswahl gebräuchlicher, zum Teil sogar viel
 angewandeter Polynome zusammengestellt. Die Koeffizientensortierung
 nach Koordinatenpotenzen lässt fehlende Glieder sofort erkennen. Einige
 der Verfahren sind hinsichtlich ihres funktionalen Aufbaues unbefrie-
 digend, obwohl sie in Rechenprogrammibliotheken für einen praktischen
 Einsatz angeboten werden. Die meisten der Verfahren wurden auch von

E. Breyer, 1972, für Schulungszwecke programmiert. Die Rechenarbeiten erfolgten am Rechenzentrum der Technischen Hochschule Wien. Die Programme sind praxisreif, enthalten jedoch eine grosse Anzahl von Variationsmöglichkeiten, damit sie speziell für Lehre und Versuchsreihen im Studienbetrieb geeignet sind.

Die Typenbezeichnung gibt jeweils den Grundpolynomgrad in der nun schon gewohnten Reihenfolge an: mx, my, φ, ω, κ. Falls Pol_κ(x) durch zwei verschiedene Polynome Pol_{κx}(x) und Pol_{κy}(x) ersetzt wurde, wie dies zum Beispiel bei den unabhängigen Polynomen der Fall ist, stehen die Polynomgrade an der Stelle für den κ-Grad übereinander, oben für x, unten für y. In den Formeln wurden die Submatrizen entsprechend erweitert.

In den Verfahrensbeschreibungen wurden die einzelnen Korrekturglieder matrizengerecht nach den Koeffizienten angeordnet, wodurch insbesondere die Interrelationen zwischen den drei Korrekturgleichungen leicht beurteilt werden können.

In allen Formeln gilt selbstverständlich:

$$\begin{aligned}
 x &:= x - x_0 & x_0 &= \text{Streifenanfang} \\
 y &:= y - y_0 & y_0 &= \text{Streifenachse} \\
 z &:= z
 \end{aligned}$$

12.2 Abweichungen der in der Praxis üblichen Polynome vom Ansatz 7(5).

Wenn man von den als Sonderfall zu betrachtenden konformen Polynomen (Schut 1964) absieht, weisen die in der Praxis angewandten Polynomialausgleiche gegenüber dem Ansatz 7(5) reguläre und irrationale Abweichungen auf.

a. z = 0. Für ebenes Gelände wird angenommen, dass die topographischen Korrekturen vernachlässigbar klein seien. Es sollte jedoch für jeden praktischen Fall abgeschätzt werden, ob diese Annahme berechtigt ist: Ein Streifen sei streng vororientiert mit R₁, sodass dr ≤ 0,3^g. Gesucht sei jener maximal zulässige Höhenunterschied ΔH, bis zu dem die topographischen Korrekturen weniger als 10 μm im Bild betragen.

$$\frac{\Delta H \cdot 0,3^g}{63,7^g} \leq m_b \cdot 10^{-5} \quad M = \frac{m_b}{1000} \quad \Delta H_{\text{max.zul.}} \doteq 2 M \text{ (m)}$$

=====

- Beispiele: 1. M = 10 ΔH = 20 m
 2. M = 30 ΔH = 60 m

Die aus dieser Vereinfachung folgenden Vernachlässigungen können also

schon bei sehr geringen Geländehöhenunterschieden grösser als $10 \mu\text{m}$ (!) im Bild werden.

- b. $c_i = 0$, ($i = mx, my, \varphi, \omega, \kappa$). Für kurze Streifen werden die kubischen Glieder entweder alle oder teilweise weggelassen, um mit weniger Passpunkten auszukommen. Dadurch wird natürlich auch die Streifenlänge beschränkt. Diese Vereinfachung entspricht nicht mehr der Fehlerfortpflanzung der zufälligen Fehler.
- c. $\text{Pol}_{\kappa}(x)$ wird durch zwei voneinander unabhängige Polynome $\text{Pol}_{\kappa x}(x)$ und $\text{Pol}_{\kappa y}(x)$ ersetzt. Dadurch können xy -(Pseudo)-Orthogonalitätsfehler korrigiert werden. Diese Massnahme setzt voraus, dass gute und mehr Lagepasspunkte gemessen werden, da durch die Vergrösserung der Anzahl der Freiheitsgrade die Redundanz des Systems verringert wird. Und damit wird es zunehmend schwerer, Passpunktfehler aufzudecken, wie Identifizierungsfehler, Messfehler, Beobachtungsfehler, Rechenfehler.
- d. $\text{Pol}_{mx}(x) = \text{Pol}_{my}(x)$. Diese Massnahme, von Brucklacher, 1959, als wesentlich gefordert, obwohl sie oft der Praxis widerspricht, kann nützlich oder notwendig sein, um in Achs- oder Polygonzugsnähe hinreichende Streifenanpassung mit minimalem Passpunktaufwand zu erhalten. Allgemein lehne ich sie ab, weil mir sowohl die praktische Erfahrung als auch theoretische Ueberlegungen (s. Abschn. 7) die Zweckmässigkeit von 2 unabhängigen Massstabpolynomen erwiesen haben.
- e. $\left. \begin{array}{l} (1) \Delta x_0 = \Delta y_0 = \Delta z_0 = 0 \\ (2) a_i = 0, i = mx, my, \varphi, \omega, \kappa \end{array} \right\} \text{Das Anfangsmodell wird als fehlerfrei absolut orientiert vorausgesetzt.}$

Diese Entscheidungen stellen Zwangsbedingungen dar, die keine optimale Approximation mehr zulassen. Das Korrekturpolynomsystem wird am Streifenanfang fest eingespannt, der Streifen verspannt. Die Passpunkt- und Einstellfehler des Anfangsmodelles erscheinen nach der absoluten Orientierung zwar gering, sie sind aber sicher nicht so klein, dass sie, mit der Folgemodellanzahl multipliziert, keine Auswirkungen etwa auf das Streifenendmodell hätten.

Die Bedingungen (1) erschweren lediglich ein optimales Anpassen an eventuell vorhandene Passpunkte in den ersten der Folgemodelle. Ausgleichs, die sich solcher Vereinfachungen bedienen, haben sich folgerichtig in der Praxis nicht durchgesetzt.

12.3 Koeffizientenvergleich und Verfahrensbeschreibungen.

12.3.1 Koeffizientenvergleich.

$\Delta x = \Delta x_o + \text{Massstab} + \text{Azimut} + \text{Aufbiegung}$ $\Delta y = \Delta y_o + \text{Azimut} + \text{Massstab} + \text{Verwindung}$ $\Delta z = \Delta z_o + \text{Aufbiegung} + \text{Verwindung} + \text{Massstab}$											
Methode	1	x	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	y	xy	x^2y	z	xz	x^2z	Typ
BAEV TH 1 LANG	$\Delta x = \Delta x_o$	a_x	b_x	c_x	$-a_{\kappa}$	$-b_{\kappa}$	$-c_{\kappa}$	a_{φ}	b_{φ}	c_{φ}	2 2 2 2 2
	$\Delta y = \Delta y_o$	a_{κ}	b_{κ}	c_{κ}	a_y	b_y	c_y	$-a_{\omega}$	$-b_{\omega}$	$-c_{\omega}$	
	$\Delta z = \Delta z_o$	$-a_{\varphi}$	$-b_{\varphi}$	$-c_{\varphi}$	a_{ω}	b_{ω}	c_{ω}	a_y	b_y	c_y	
BAEV TH 1 KURZ	$\Delta x = \Delta x_o$	a_x	b_x	.	$-a_{\kappa}$	$-b_{\kappa}$.	a_{φ}	b_{φ}	.	1 2 1 2 1
	$\Delta y = \Delta y_o$	a_{κ}	b_{κ}	.	a_y	b_y	c_y	$-a_{\omega}$	$-b_{\omega}$	$-c_{\omega}$	
	$\Delta z = \Delta z_o$	$-a_{\varphi}$	$-b_{\varphi}$.	a_{ω}	b_{ω}	c_{ω}	a_y	b_y	c_y	
BAEV TH 2	$\Delta x = \Delta x_o$	a_x	b_x	.	$-a_{\kappa x}$	$-b_{\kappa x}$.	a_{φ}	b_{φ}	.	1 2 1 2 1
	$\Delta y = \Delta y_o$	a_{κ}	b_{κ}	.	a_y	b_y	c_y	$-a_{\omega}$	$-b_{\omega}$	$-c_{\omega}$	
	$\Delta z = \Delta z_o$	$-a_{\varphi}$	$-b_{\varphi}$.	a_{ω}	b_{ω}	c_{ω}	a_y	b_y	c_y	
van der WEELE	$\Delta x = \Delta x_o$	a_m	b_m	c_m	$-a_{\kappa}$	$-b_{\kappa}$	$-c_{\kappa}$.	.	.	2=2 2 1 2
	$\Delta y = \Delta y_o$	a_{κ}	b_{κ}	c_{κ}	a_m	b_m	c_m	.	.	.	z = 0
	$\Delta z = \Delta z_o$	$-a_{\varphi}$	$-b_{\varphi}$	$-c_{\varphi}$	a_{ω}	b_{ω}	
SCHWI- DEFSKY	$\Delta x = \Delta x_o$	a_x	b_x	1 1 1 1(1)
	$\Delta y = \Delta y_o$.	b_{κ}	.	a_y	b_y	z = 0
	$\Delta z = \Delta z_o$	$-a_{\varphi}$	$-b_{\varphi}$.	a_{ω}	b_{ω}	
GRAMA- STET- TEN	$\Delta x = \Delta x_o$	a_x	b_x	.	$-a_{\kappa x}$	$-b_{\kappa x}$	1 1 1 1 1
	$\Delta y = \Delta y_o$	$a_{\kappa y}$	$b_{\kappa y}$.	a_y	b_y	z = 0
	$\Delta z = \Delta z_o$	$-a_{\varphi}$	$-b_{\varphi}$.	a_{ω}	b_{ω}	
ZAR- ZYCKI	$\Delta x = \Delta x_o$	a_x	b_x	.	$-a_{\kappa x}$	$-b_{\kappa x}$	$-c_{\kappa x}$.	.	.	1 2 1 2 1
	$\Delta y = \Delta y_o$	$a_{\kappa y}$	$b_{\kappa y}$.	a_y	b_y	c_y	.	.	.	z = 0
	$\Delta z = \Delta z_o$	$-a_{\varphi}$	$-b_{\varphi}$.	a_{ω}	b_{ω}	c_{ω}	.	.	.	
FORMEL 20	$\Delta x = \Delta x_o$	a_m	b_m	.	$-a_{\kappa}$	$-b_{\kappa}$.	a_{φ}	b_{φ}	.	1=1 1 1 1
	$\Delta y = \Delta y_o$	a_{κ}	b_{κ}	.	a_m	b_m	.	$-a_{\omega}$	$-b_{\omega}$.	
	$\Delta z = \Delta z_o$	$-a_{\varphi}$	$-b_{\varphi}$.	a_{ω}	b_{ω}	.	a_m	b_m	.	
MARŠIK	$\Delta x = \Delta x_o$	a_x	b_x	.	.	$-b_{\kappa x}$	1 1 1 1(1)
	$\Delta y = \Delta y_o$.	$b_{\kappa y}$.	a_y	b_y	z = 0
	$\Delta z = \Delta z_o$	$-a_{\varphi}$	$-b_{\varphi}$.	a_{ω}	b_{ω}	

12.3.2 Verfahrensbeschreibungen.

Kurzbeschreibung eines Polynomialausgleichsverfahrens																									
Bezeichnung: BAEV - TH 1 - LANG	Typ: 2 2 2 2 2 z = beliebig																								
Maximal zulässige Streifenlänge für Restfehler $\leq 2 \sigma_0$: 13 - 20 Modelle																									
$\underline{\Delta x} = \underline{B} \cdot \underline{u}$ $\underline{B} = \left(\begin{array}{ccc ccc ccc} 1 & . & . & x & . & z & . & -y & \frac{x^2}{2} & . & xz & . & -xy & \frac{x^3}{3} & . & x^2z & . & -x^2y \\ . & 1 & . & . & . & y & . & -z & x & . & xy & . & -xz & \frac{x^2}{2} & . & x^2y & . & -x^2z & \frac{x^3}{3} \\ . & . & 1 & . & . & z & -x & y & . & . & xz & -\frac{x^2}{2} & xy & . & . & x^2z & -\frac{x^3}{3} & x^2y & . \end{array} \right)$ $\underline{u}^T = (\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0; a_x, a_y, a_\varphi, a_\omega, a_\kappa; b_x, b_y, b_\varphi, b_\omega, b_\kappa; c_x, c_y, c_\varphi, c_\omega, c_\kappa)$																									
Passpunktmindestanfordernisse: Vollpasspunkte: 8 Höhenpasspunkte:																									
<table border="1" style="width: 100%; height: 40px; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%; text-align: center;">Δ</td> <td style="width: 25%;"></td> <td style="width: 25%; text-align: center;">Δ</td> <td style="width: 25%;"></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">Δ</td> <td></td> <td style="text-align: center;">Δ</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Δ</td> <td></td> <td style="text-align: center;">Δ</td> <td style="text-align: center;">Δ</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">oder</p> <table border="1" style="width: 100%; height: 40px; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%; text-align: center;">Δ</td> <td style="width: 25%;"></td> <td style="width: 25%; text-align: center;">Δ</td> <td style="width: 25%;"></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">Δ</td> <td></td> <td style="text-align: center;">Δ</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Δ</td> <td></td> <td style="text-align: center;">Δ</td> <td style="text-align: center;">Δ</td> </tr> </table>		Δ		Δ			Δ		Δ	Δ		Δ	Δ	Δ		Δ			Δ		Δ	Δ		Δ	Δ
Δ		Δ																							
	Δ		Δ																						
Δ		Δ	Δ																						
Δ		Δ																							
	Δ		Δ																						
Δ		Δ	Δ																						
Programm: FORTRAN IV IBM 7040 TH Wien Koeffizienten: 18																									
Anmerkungen: Universell und funktionell vollständig nach Ansatz 7(5).																									
Literatur: Breyer 1972 Waldhäusl 1972																									

Kurzbeschreibung eines Polynomiauxgleichsverfahrens								
Bezeichnung: BAEV - TH 1 - KURZ	Typ: 1 2 1 2 1 z = beliebig							
Maximal zulässige Streifenlänge für Restfehler $\leq 2 \sigma_0$: 12 Modelle								
$\underline{\Delta x} = \underline{B} \cdot \underline{u}$								
$\underline{B} = \left(\begin{array}{ccc ccc cc} 1 & . & . & x & . & z & . & -y & \frac{x^2}{2} & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & y & . & -z & x & . & xy & . & -xz & \frac{x^2}{2} & x^2 y & -x^2 z \\ . & . & 1 & . & . & z & -x & y & . & . & . & . & . & x^2 z & x^2 y \end{array} \right)$								
$\underline{u}^T = (\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0; a_x, a_y, a_\varphi, a_\omega, a_\kappa; b_x, b_y, b_\varphi, b_\omega, b_\kappa; c_y, c_\omega)$								
Passpunktmindestanforderungen: Vollpasspunkte: 6 Höhenpasspunkte:								
<table border="1" style="width: 100%; height: 60px;"> <tr> <td style="width: 33%; text-align: center;">Δ</td> <td style="width: 33%; text-align: center;">Δ</td> <td style="width: 33%; text-align: center;">Δ</td> </tr> <tr> <td style="width: 33%; text-align: center;">Δ</td> <td style="width: 33%; text-align: center;">Δ</td> <td style="width: 33%; text-align: center;">Δ</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">oder</p> <table border="1" style="width: 100%; height: 60px; margin-top: 10px;"> <tr> <td style="width: 100%;"></td> </tr> </table>		Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	
Δ	Δ	Δ						
Δ	Δ	Δ						
Programm: FORTRAN IV IBM 7040 TH Wien	Koeffizienten: 15							
<p>Anmerkungen: Universeil und funktional vollständig nach Ansatz 7(5). Dieses Verfahren ist eine vereinfachte Version des vorigen. Es ist funktional vergleichbar mit der von F.Halwax 1961 angegebenen Methode, jedoch als vermittelnder Ausgleich praktisch ohne Beschränkungen aufwendig programmiert.</p>								
Literatur: Breyer 1972, Waldhäusl 1972, Halwax 1961.								

Kurzbeschreibung eines Polynomialausgleichsverfahrens

Bezeichnung: van der WEELE

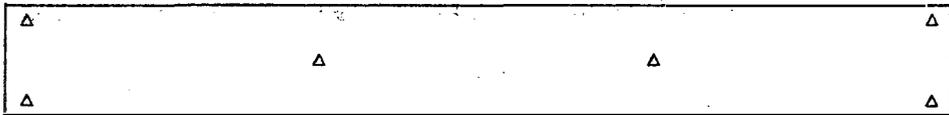
Typ: 2 = 2 2 1 2 z = konstant

Maximal zulässige Streifenlänge für Restfehler $\leq 2 \sigma_0$: 12 (6) Modelle

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & . & . & x & . & . & -y & \frac{x^2}{2} & . & . & -xy & \frac{x^3}{3} & . & . & -x^2 y \\ . & 1 & . & . & . & y & . & . & xy & . & . & \frac{x^2}{2} & . & x^2 y & . & \frac{x^3}{3} \\ . & . & 1 & . & . & -x & y & . & . & . & -\frac{x^2}{2} xy & . & . & -\frac{x^3}{3} & . & . \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}^T = (\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0; a_m = a_m, a_\varphi, a_\omega, a_\kappa; b_m = b_m, b_\varphi, b_\omega, b_\kappa; c_m = c_m, c_\varphi, c_\kappa)$$

Passpunktmindestanforderungen: Vollpasspunkte: $\frac{6}{4}$ Höhenpasspunkte: $\frac{0}{2}$



oder



Programm: FORTRAN IV IBM 7040 TH Wien

Koeffizienten: 14 (7)

Anmerkungen: Van der Weele hat für die Streifenachse ein kubisches Polynom angesetzt (nach Roelofs 1949). Der Ansatz wurde - für ebenes Gelände - für Punkte ausserhalb der Streifenachse erweitert. Es wird vorausgesetzt, dass $dm_x = dm_y$. Auf diese Weise hätten sich die obigen 14 Koeffizienten ergeben, mit denen das Verfahren an der TH Wien programmiert wurde. Seinerzeit hatte van der Weele aber noch angenommen, dass das Anfangsmodell fehlerfrei absolut orientiert war. Die oben unterstrichenen Koeffizienten wurden = 0 gesetzt. Es galt dann die Koeffizientenzahl 7. Damit würden im Rahmen der OEEPE (Solaini u. Trombetti 1961) sehr umfangreiche Versuche unternommen, die die Streifenverspannungen klar erkennen liessen. Die 7 Unbekannten liessen sich einfach mit Handrechenmaschine aus den Aehnlichkeitstransformationen des Anfangs- und des Endmodelles berechnen. Die Praxis hat dann deutlich gemacht, dass man ohne die Stützung der Streifenmitte nur bei sehr kurzen Streifen auskommt. Das Verfahren ist nicht universell.

Literatur: Roelofs 1949, van der Weele 1953, Solaini u. Trombetti 1961

Kurzbeschreibung eines Polynomialausgleichsverfahrens

Bezeichnung: SCHWIDEFSKY

Typ: 1 1 1 1 (1) z = konstant

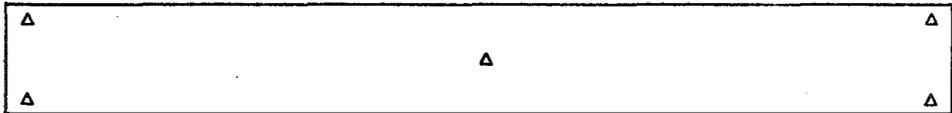
Maximal zulässige Streifenlänge für Restfehler $\leq 2 \sigma_0$: - Modelle

$$\underline{\Delta x} = \underline{B} \cdot \underline{u}$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & . & . & x & . & . & . & ? & . & \frac{x^2}{2} & . & . & . & ? & . & . \\ . & 1 & . & . & y & . & . & . & ? & . & xy & . & . & . & . & \frac{x^2}{2} \\ . & . & 1 & . & . & -x & y & . & . & . & . & -\frac{x^2}{2} & xy & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}^T = (\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0; a_x, a_y, a_\varphi, a_\omega, ? \quad ? \quad ?; b_x, b_y, b_\varphi, b_\omega, ? \quad ?; b_{\mu}^x, b_{\mu}^y)$$

Passpunktmindesterfordernisse: Vollpasspunkte: 5 Höhenpasspunkte:



oder



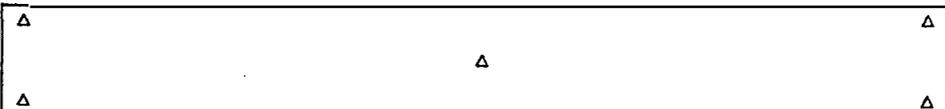
Programm: FORTRAN IV IBM 7040 TH Wien

Koeffizienten: 12

Anmerkungen: Die Koordinatenverbesserungen werden nach einem Ansatz mit drei völlig unabhängigen Polynomen, die funktional unvollständig sind, berechnet. In der Δy - Gleichung fehlt a_{μ}^y , in der Δx - Gleichung fehlen a_{μ}^x und b_{μ}^x . Das Verfahren führt ohne die drei fehlenden Glieder zu keinen brauchbaren Ergebnissen.

Literatur: Schwidefsky 1964, S. 288, Finsterwalder- Hofmann 1965, S.379

Kurzbeschreibung eines Polynomiauxgleichsverfahrens	
Bezeichnung: FORMEL 20	Typ: 1 1 1 1 z = beliebig
Maximal zulässige Streifenlänge für Restfehler $\leq 2 \sigma_0$: ca. 8 Modelle	
$\underline{\Delta x} = \underline{B} \cdot \underline{u}$	
$\underline{B} = \left(\begin{array}{cccc cccc} 1 & . & . & x & . & z & . & -y & \vdots & \frac{x^2}{2} & . & xz & . & -xy & \vdots & \\ . & 1 & . & . & . & y & . & -z & x & . & xy & . & -xz & . & \frac{x^2}{2} & \vdots & \\ . & . & 1 & . & . & z & -x & y & . & . & xz & -\frac{x^2}{2} & xy & . & . & \vdots & \end{array} \right)$	
$\underline{u}^T = (\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, a_m = a_m, a_\varphi, a_\omega, a_\kappa \quad ; \quad b_m = b_m, b_\varphi, b_\omega, b_\kappa \quad ; \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots)$	
Passpunktmindestanforderungen: Vollpasspunkte: 3 Höhenpasspunkte: 2	
<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> $\begin{array}{ccc} \Delta & & \Delta \\ & \Delta & \\ \Delta & & \Delta \end{array}$ </div> <p style="text-align: center;">oder</p> <div style="border: 1px solid black; height: 40px; width: 100%; margin-top: 5px;"></div>	
Programm: FORTRAN IV IBM 7040 TH Wien	Koeffizienten: 11
<p>Anmerkungen: Die Formel 20, so benannt nach Vorlesungen von K. Neumaier an der TH Wien, entspricht in Jordan-Rinner der Gleichung (14) auf Seite 1755 und folgt aus der Theorie von Vermeir, wenn man nur konstante Übertragungsfehler annimmt. Allein daraus ist ersichtlich, dass ohne weitere Koeffizienten bzw. Freiheitsgrade ein Anpassen an die Auswirkungen der zusätzlichen, stochastischen Übertragungsfehler überhaupt nicht denkbar ist. (Vergleiche Abschnitt 11.2) Der Maßstabsfehler wird für x und y einheitlich angenommen. Das Verfahren ist für die Praxis nicht geeignet.</p>	
<p>Literatur: Neumaier 1964, Jordan-Rinner 1972, Ackermann 1965, Vermeir 1954.</p>	

Kurzbeschreibung eines Polynomiaausgleichsverfahrens	
Bezeichnung: MARŠIK	Typ: 1 1 1 1 $\begin{matrix} 1(x) \\ 1(y) \end{matrix}$ z = konstant
Maximal zulässige Streifenlänge für Restfehler $\leq 2 \sigma_0$: - Modelle	
$\underline{\Delta x} = \underline{B} \cdot \underline{u}$	
$\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & . & . & x & . & . & . & ? & . & \frac{x^2}{2} & . & . & . & -xy & . \\ . & 1 & . & . & y & . & . & . & ? & . & xy & . & . & . & \frac{x^2}{2} \\ . & . & 1 & . & . & -x & y & . & . & . & . & -\frac{x^2}{2} & xy & . & . \end{pmatrix}$	
$\underline{u}^T = (\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, a_x, a_y, a_\varphi, a_\omega, ? \quad ? \quad b_x, b_y, b_\varphi, b_\omega, b_{\kappa^x}, b_{\kappa^y})$	
Passpunktmindestanfordernisse: Vollpasspunkte: 5 Höhenpasspunkte:	
	
oder	
	
Programm:	Koeffizienten: 13
Anmerkungen: Drei völlig unabhängige Gleichungen, wie bei der Methode Gramastetten. Es fehlen jedoch ganz wesentliche Koeffizienten, ohne deren Ergänzung das Verfahren keine brauchbaren Ergebnisse liefern kann.	
Literatur: Maršik 1972	

Kurzbeschreibung eines Polynomialausgleichsverfahrens													
Bezeichnung: SCHUT	Typ: konform z = konstant												
Maximal zulässige Streifenlänge für Restfehler $\leq 2 \sigma_0$: Modelle													
$\underline{\Delta x} = \underline{B} \cdot \underline{u}$													
$\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & x & -y & \frac{(x^2-y^2)}{2} & -xy & \frac{(x^3-3xy^2)}{3} & \frac{(3x^2y-y^3)}{3} & \dots\dots \\ \cdot & 1 & y & x & xy & \frac{(x^2-y^2)}{2} & \frac{(3x^2y-y^3)}{3} & \frac{(x^3-3xy^2)}{3} & \dots\dots \end{pmatrix}$													
$\underline{u}^T = (a_0, b_0; a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3)$													
Passpunktmindestanforderungen: Lagepasspunkte: 12 Höhenpasspunkte:													
<table border="1" style="width: 100%; height: 60px; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%; text-align: center;">Δ</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Δ</td> <td style="text-align: center;">Δ</td> <td style="text-align: center;">Δ</td> <td style="text-align: center;">Δ</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Δ</td> <td style="text-align: center;">Δ</td> <td style="text-align: center;">Δ</td> <td style="text-align: center;">Δ</td> </tr> </table>		Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ
Δ	Δ	Δ	Δ										
Δ	Δ	Δ	Δ										
Δ	Δ	Δ	Δ										
oder													
<table border="1" style="width: 100%; height: 60px; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%;"></td> <td style="width: 25%;"></td> <td style="width: 25%;"></td> <td style="width: 25%;"></td> </tr> </table>													
Programm: FORTRAN IV, NRC Ottawa, Canada	Koeffizienten: 8												
Anmerkungen: Konforme Polynome genügen den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen:													
$\frac{\partial \Delta x}{\partial x} = \frac{\partial \Delta y}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Delta x}{\partial y} = - \frac{\partial \Delta y}{\partial x}$													
<p>und bilden differentiell kleine Bereiche ähnlich ab. Die Ausgleichung kann direkt zwischen den Landeskoordinaten und den beliebig orientierten Maschinenkoordinaten erfolgen. Für beliebiges Gelände ist dieses Verfahren nicht modifizierbar. Die nichtlinearen y-Glieder entsprechen nicht unserem funktionalen Modell. Die Strahlfläche der Streifenkorrekturen darf nicht in y-Richtung gekrümmt werden. Das müssen zusätzliche Passpunkte in Streifenachsnähe ausmitteln. Damit verlieren die ohnehin nur für ebenes Gelände gültigen, konformen Transformationen ihre praktische Bedeutung, ausgenommen als einfaches Näherungsverfahren für die Näherungswertbestimmung bei einigen der Blockausgleichungsverfahren.</p>													
Literatur: Schut 1964, Jordan-Rinner 1972, S.1789 - 1790.													

ANSATZE MIT SPLINE-FUNKTIONEN

13. Zur Auswahl anderer Approximationsfunktionen.

Einfache Polynome sind, wie wir aus den vorangegangenen Diskussionen gesehen haben, in ihrer Approximationsfähigkeit beschränkt, sie sind für lange Streifen zu wenig flexibel. Es soll nun versucht werden, für den allgemeinen Streifenausgleichsansatz 7(5) andere, um eine Stufe leistungsfähigere Funktionen zu finden, die vor allem längere Streifen und solche mit mehr Soll-Informationen auszugleichen vermögen. Für die Auswahl von Approximationsfunktionen nennt Kubik, 1971, folgende Kriterien: Sie sollen stetig, flexibel und möglichst glatt sein, ferner soll ihr mathematischer Aufbau eine sichere und rasche numerische Berechnung ermöglichen.

Ackermann hat 1965 darauf hingewiesen, "dass die folgerichtige Entwicklung der mehrfachen, verketteten Polynome zu einer Lösung führt, die identisch ist mit der durch einen Grenzübergang auf kontinuierliche Korrekturfunktionen modifizierten, strengen Streifenausgleichung nach Vermeir. Diese optimale, in der erwähnten Modifikation strenge Streifenausgleichung weist in jedem einzelnen Passpunktintervall ⁺) ein Polynom 3. Grades auf. Die Verknüpfung der einzelnen Polynome ist durch Gleichheit der Funktionswerte sowie der ersten und zweiten Ableitungen nach x an den Uebergangsstellen gekennzeichnet. Ausserdem ist jeweils am ersten und letzten Passpunkt eines Streifens die zweite Ableitung nach x der betreffenden Korrekturpolynome gleich 0." (Womit wesentliche Merkmale der natürlichen Splinefunktionen $S_3(x)$ beschrieben waren).

Belling (1963) hat die kombinierten Polynome 2. Grades in seiner Diplomarbeit behandelt.

Erstmals praktisch programmiert und eingesetzt wurden gestückelte Polynome dritten Grades in der Photogrammetrie durch K. Kubik (1971).

Der Kubik'sche Ansatz gilt aber nur für ebenes Gelände. Für beliebiges Gelände sind mir bisher keine Verfahren der Aerotriangulationsausgleichung mit Spline-Technik bekannt.

Da die Theorie der Spline-Funktionen relativ jung und in photogrammetrischen Fachkreisen fast unbekannt ist, soll im folgenden Abschnitt näher darauf eingegangen werden.

⁺) Gemeint ist hiermit in der praktischen Photogrammetrie Passpunktgruppenintervall.

14. Theorie der Spline-Funktionen.

14.1 Geschichte und Literaturhinweise.

Spline-Funktionen sind auch in der Mathematik noch nicht allzulange bekannt. Sie wurden erstmals 1946 von I.J. Schoenberg, Mathematics Research Center, U.S. Army, and Department of Mathematics, University of Wisconsin, Madison, erwähnt. Der Grossteil der Theorie über Spline-Funktionen ist erst in den letzten 10 Jahren erschienen. Ich beziehe mich im folgenden ohne besondere weitere Erwähnung auf:

Schoenberg 1964

Greville 1969 +)

Stetter 1969

Ahlberg 1967

Jahn 1972 +)

+) mit weiteren Literaturhinweisen.

Anmerkung: Im folgenden wird nicht immer streng zwischen (offenen) und [abgeschlossenen] Intervallen unterschieden, es sei denn, dass eine Unterscheidung zwingend notwendig ist.

14.2 Definitionen und Begriffe.

14.2.1 Spline-Funktionen.

Gegeben sei eine wachsende Folge reeller Zahlen (x_i) , $i = 1(1)n$,

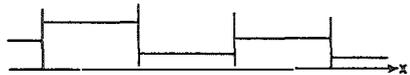
$x_i < x_{i+1}$.

(α) Eine Spline-Funktion $S_m(x)$ vom Grad m mit den Knoten x_i , $i=1(1)n$, ist eine in jedem Intervall (x_i, x_{i+1}) , $i=0(1)n$, $x_0 := -\infty$, $x_{n+1} := +\infty$, durch ein Polynom vom Grad $\leq m$ definierte Funktion.

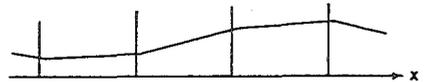
(β) Sie selbst und ihre Ableitungen $S_m^{(j)}(x)$, $j=1(1)m-1$ seien überall (zumindest stückweise) stetig.

Beispiele: (Abb. 14.2.1 (1 - 4))

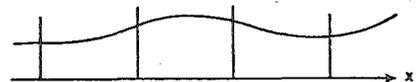
$S_0(x)$ = Treppenfunktion
(β nicht definiert)



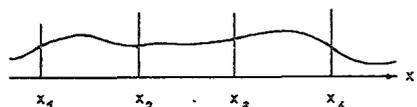
$S_1(x)$ = stetiger Polygonzug



$S_2(x)$ = glatter Parabelzug



$S_3(x)$ = glatter und stetig gekrümmter, kubischer Parabelzug



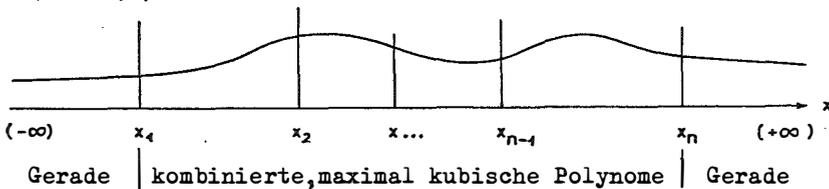
14.2.2 Natürliche Spline-Funktionen.

Eine natürliche Spline-Funktion hat eine endliche Anzahl Knotenstellen $x_i, i=1(1)n$ im Intervall (x_1, x_n) . Im Inneren dieses Intervalles ist der Maximalgrad der Polynome ungerade ($\leq 2k-1$), in den beiden Aussenintervallen $(-\infty, x_1)$ und $(x_n, +\infty)$ je $\leq (k-1)$.

Beispiel: $k = 2$

$$\begin{aligned} m_i &= 2k - 1 = 3 && (i \dots \text{'innen'}) \\ m_a &= k - 1 = 1 && (a \dots \text{'aussen'}) \end{aligned}$$

Abb.14.2.2 (1)



14.2.3 Spline-Funktionen als abgehackte Potenzfunktionen.

Schoenberg und Whitney haben (1953) bewiesen, dass jede Spline-Funktion $S_m(x)$ aus $S_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$, das ist die Familie aller Spline-Funktionen vom Grade m mit den Knoten $x_i, i=1(1)n$, durch abgehackte Potenzfunktionen (truncated power functions) eindeutig dargestellt werden kann:

$$S_m(x) = p(x) + \sum_{j=1}^m c_j (x - x_j)_+^m \quad \text{mit } p(x) \in \mathcal{P}_m \quad 14(1)$$

\mathcal{P}_m ist die Familie aller Polynome vom Maximalgrad m .

Das "+" gibt an, dass $(x - x_j)_+^m$ nur positiv definiert ist, für $x_j \geq x$ ist $(x - x_j)_+^m = 0$.

Beispiel für eine abgehackte Potenzfunktion:

$$y = c(x - x_1)_+^2$$

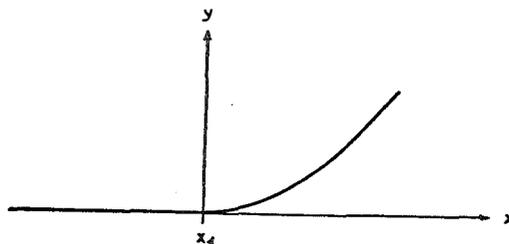


Abb.14.2.3 (1)

14.2.4 Natürliche Spline-Funktionen als abgehackte Potenzfunktionen.

$$S_{2k-1}(x) = p(x) + \sum_{j=1}^n c_j (x - x_j)_+^{2k-1} \quad \text{mit } p(x) \in \tilde{\mathcal{T}}_{k-1} \quad 14(2)$$

und $\sum_{j=1}^n c_j x_j^r = 0, \quad r = 0(1)k-1$

Diese Bedingung folgt aus der Definition der natürlichen Spline-Funktionen für die beiden Aussenintervalle $(-\infty, x_1)$, $(x_n, +\infty)$, wonach in $(x_n, +\infty)$ $S_{2k-1}(x) \in \tilde{\mathcal{T}}_{k-1}$ sein soll und daher alle Potenzen höher als $(k-1)$ verschwinden müssen.

Beispiele:

a) $S_3(x) \in \mathcal{N}_3(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x \in (a \leq x_1, x_n \leq b) \quad 14(3a)$

$x \in (a, x_1) \quad S_3(x) = a_0 + b_0 x \quad 14(3b)$

$x \in (x_1, x_2) \quad S_3(x) = a_0 + b_0 x + c_1 (x-x_1)_+^3$

$x \in (x_2, x_3) \quad S_3(x) = a_0 + b_0 x + c_1 (x-x_1)_+^3 + c_2 (x-x_2)_+^3$

⋮

$x \in (x_{v-1}, x_v) \quad S_3(x) = (a_0 + \sum_{j=1}^{v-1} c_j x_j^3) + (b_0 + \sum_{j=1}^{v-1} 3c_j x_j^2)x + (-\sum_{j=1}^{v-1} 3c_j x_j)x^2 + (\sum_{j=1}^{v-1} c_j)x^3$

$x \in (x_n, b) \quad S_3(x) = (a_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j^3) + (b_0 + \sum_{j=1}^n 3c_j x_j^2)x$

wobei gleichzeitig $\sum_{j=1}^n c_j x_j = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^n c_j = 0. \quad 14(3c)$

b) Da später auch quadratische Spline-Funktionen zu berücksichtigen sind, sei analog zu $S_3(x) \in \mathcal{N}_3(x_1, x_2, \dots, x_n)$ auch die gerade, normale Spline-Funktion (keine natürliche!) $S_2(x) \in \mathcal{S}_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ so dargestellt, dass $S_2(x) \in \tilde{\mathcal{T}}_1, \quad x \in (a, x_1) \vee (x_n, b)$, indem $\sum_{j=1}^n c_j = 0.$

$x \in (a, x_1) \quad S_2(x) = a_0 + b_0 x \quad 14(4)$

$x \in (x_1, x_2) \quad S_2(x) = a_0 + b_0 x + c_1 (x^2 - 2x_1 x + x_1^2)_+$

$x \in (x_2, x_3) \quad S_2(x) = a_0 + b_0 x + \sum_{j=1}^2 c_j (x-x_j)_+^2$

⋮

$x \in (x_{v-1}, x_v) \quad S_2(x) = a_0 + b_0 x + \sum_{j=1}^{v-1} c_j (x-x_j)_+^2 =$

$= (a_0 + \sum_{j=1}^{v-1} c_j x_j^2) + (b_0 + \sum_{j=1}^{v-1} 2c_j x_j)x + (\sum_{j=1}^{v-1} c_j)x^2$

⋮

$$\begin{aligned}
 x \in (x_n, b) \quad S_2(x) &= a_0 + b_0 x + \sum_{j=1}^n c_j (x-x_j)_+^2 = \\
 &= (a_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j^2) + (b_0 - \sum_{j=1}^n 2c_j x_j) x
 \end{aligned}$$

da gleichzeitig $\sum_{j=1}^n c_j = 0$.

c) Der Vollständigkeit wegen ergibt sich für $k = 1, m = 1$
 $S_1(x) \in \mathcal{N}_1(x_1, x_2, \dots, x_n), p(x) = a_0, S_1(x) \in \tilde{\mathcal{N}}_1 :$

$$x \in (a, x_1) \quad S_1(x) = a_0 \quad 14(5)$$

$$x \in (x_1, x_2) \quad S_1(x) = a_0 + c_1(x-x_1)_+ = (a_0 - c_1 x_1) + c_1 x$$

$$x \in (x_2, x_3) \quad S_1(x) = a_0 + \sum_{j=1}^2 c_j (x-x_j)_+ = (a_0 - \sum_{j=1}^2 c_j x_j) + (\sum_{j=1}^2 c_j) x$$

⋮

$$x \in (x_{v-1}, x_v) \quad S_1(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{v-1} c_j (x-x_j)_+ = (a_0 - \sum_{j=1}^{v-1} c_j x_j) + (\sum_{j=1}^{v-1} c_j) x$$

⋮

$$x \in (x_n, b) \quad S_1(x) = a_0 + \sum_{j=1}^n c_j (x-x_j)_+ = (a_0 - \sum_{j=1}^n c_j x_j)$$

14.2.5 Interpolation, Approximation und Ausgleichung mit Spline-Funktionen.

Zur Abklärung der Begriffe sei festgehalten:

1. Interpolation: $S(x)$ geht genau durch alle Stützstellen. Das setzt voraus, dass die Anzahl der Freiheitsgrade von $S(x)$ der Stützstellenanzahl gleich ist. Es liegt keine Ueberbestimmung vor. 2 Fälle sind zu unterscheiden:

1.1 Interpolation an den Knotenstellen:

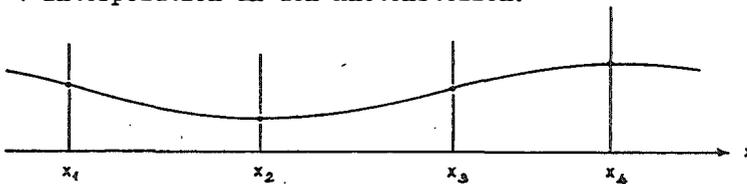


Abb. 14.2.5.(1)

$x_v = x_\varrho$	$v = 1(1)n$	Knotenstellen
$n = r$	$\varrho = 1(1)r$	Referenzstellen

1.2 Interpolation nicht streng an den Knotenstellen:

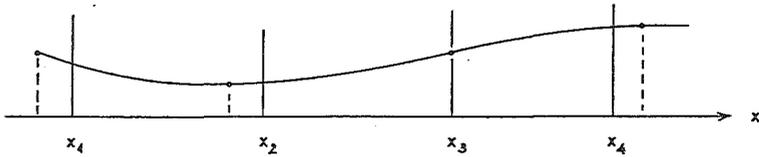


Abb. 14.2.5.(2)

$$\begin{aligned} x_v &\sim x_\varphi & v &= 1(1)n \\ n &= r & \varphi &= 1(1)r \end{aligned}$$

$$x_\varphi < x_v < x_{\varphi+m-1} \quad m = \text{Grad von } S(x)$$

2. Approximation: Die Anzahl der Freiheitsgrade von $S(x)$ wird durch eine zusätzliche, variabel gewichtete (g_2/g_1) Bedingung eingeschränkt, derzufolge die Summe aller Krümmungsquadrate im Gesamtbereich so klein wie möglich werden soll. Die Anzahl der Stützstellen ist gleich der der Knoten. Es liegt ein spezielles Ausgleichsproblem mit nur einer Überbestimmung vor.

$$\bar{E}(u) = g_1 \sum_{i=1}^r p_i (S_j(x_i) - y_i)^2 + g_2 \int_a^b (S_j''(x))^2 dx \rightarrow \text{Min.} \quad 14(6)$$

wobei u = Unbekanntenvektor

2.1 Approximation an den Knotenstellen:

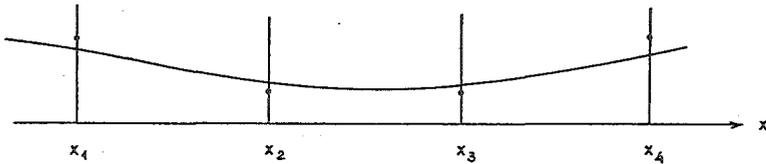


Abb. 14.2.5.(3)

$$\begin{aligned} x_v &= x_\varphi & v &= 1(1)n & \text{Knotenstellen} \\ n &= r & \varphi &= 1(1)r & \text{Referenzstellen} \end{aligned}$$

2.2 Approximation nicht streng an den Knotenstellen:

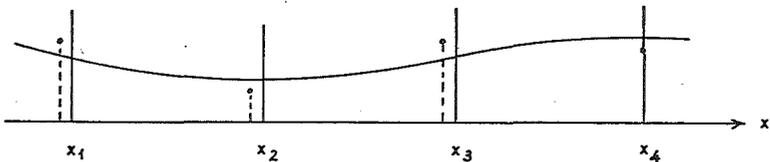


Abb. 14.2.5.(4)

$$\begin{aligned} x_v &\sim x_\varphi & v &= 1(1)n & \text{Knotenstellen} \\ n &= r & \varphi &= 1(1)r & \text{Referenzstellen} \\ x_\varphi &< x_v < x_{\varphi+m-1} & & & \end{aligned}$$

3. Ausgleichung: Die Anzahl der Stützstellen ist grösser als die der Knotenstellen. Die Stützstellen liegen a priori nicht nur an den Knotenstellen: $n < r$

3.1 Ausgleichung ohne Glattheitsbedingung. $\varepsilon_2 = 0$

$$E(u) = \sum_{i=1}^r p_i (S_3(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \text{Min.} \quad 14(7)$$

Mit $n = r$ erhält man den Fall 1.2 und, falls auch $x_v = x_g$, den Fall 1.1 als Spezialfälle von 3.1.

3.2 Ausgleichung mit Glattheitsbedingung $\varepsilon_2 \neq 0$

Die unbekanntenen Koeffizienten u von $S(x)$ folgen aus dem Minimum der erweiterten Euklidischen Norm 14(6).

Mit $n = r$ erhält man den Fall 2.2 und, falls auch $x_v = x_g$, den Fall 2.1 als Spezialfälle von 3.2.

3.1 ist ebenfalls eine Spezialisierung von 3.2 durch $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 0$.

Für $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = \infty$ trägt die Glattheitsbedingung nichts zum Ergebnis bei, die Vielzahl der Punkte mit grossen Gewichten erzwingt das mit der Anzahl der Freiheitsgrade mögliche Minimum.

Für $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = 0$ erhält man die Ausgleichsgerade.

14.2.6 Glatteste Interpolierende.

Die natürlichen Spline-Funktionen $\mathcal{N}_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zeichnen sich durch die in Greville, 1969, und Jahn, 1972, nachgewiesene Eigenschaft aus, nach der Definition

$$\sigma(f) = \int_a^b [f^{(k)}(x)]^2 dx \rightarrow \text{Min. mit } n > k \geq 1 \quad 14(8)$$

die glattesten Interpolierenden unter allen denkbaren $f \in C^{k-1}[a, b]$ mit mindestens stückweise stetigem $f^{(k)}$ darzustellen. Für kubische, natürliche Spline-Funktionen $S_3(x) \in \mathcal{N}_3(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $a \leq x_{v-1} \ll x_v \leq b$, $v = 1(1)n$, mit bekannten Ordinaten y_v und Punktgewichten p_v , gilt insbesondere, dass genau ein $S_3(x)$ aus der Klasse $\mathcal{N}_3(x_1, x_2, \dots, x_n)$ existiert, sodass für jedes $f \in C^1[a, b]$ mit mindestens stückweise stetiger

2. Ableitung f''

$\sigma(S_3) \leq \sigma(f)$ und $\sigma(S_3) = \sigma(f)$ nur, wenn $S_3 \equiv f$.

15. Stückweise Polynome nach Kubik - Ahlberg.

15.1 Kubische Polynome.

K. Kubik, 1971a, empfiehlt, für die Koordinatenverbesserungen für Punkte der Streifenachse kubische Polynome nach Ahlberg 1967 anzusetzen. In jedem Intervall (s_{v-1}, x_v) , $v = 2(1)n$, definiert er eine kubische Parabel mit den Funktionswerten $S_{(v)}(x_{v-1}) = y_{v-1}$ und $S_{(v)}(x_v) = y_v$ sowie den 1. Ableitungen $S'_{(v)}(x_{v-1}) = y'_{v-1}$ und $S'_{(v)}(x_v) = y'_v$ als Parametern. Die Parameter sind dann jeweils zwei Nachbarintervallen gemeinsam.

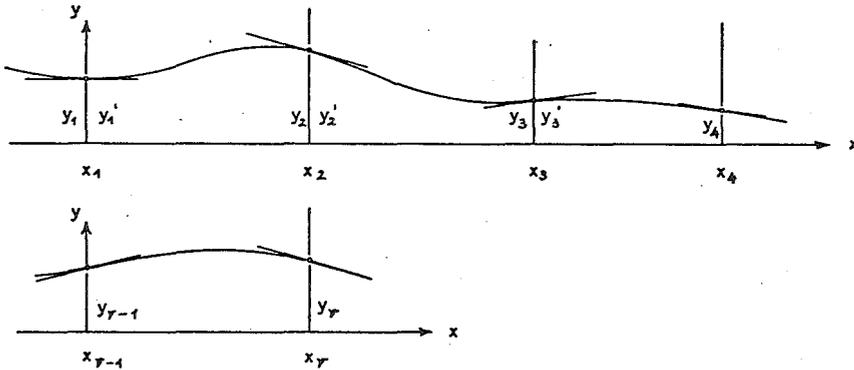


Abb. 15.1.(1) : Zur Kubik'schen Darstellung der stückweisen Polynome.

Die Parabeln lassen sich durch diese 4 Parameter wie folgt darstellen ("Hermite-Interpolation"):

$$l_v = (x_v - x_{v-1}), \quad \bar{x} = (x - x_{v-1})_+, \quad x \in (x_{v-1}, x_v).$$

$$S_{(v)}(x) = a + b\bar{x} + c\bar{x}^2 + d\bar{x}^3$$

$$S_{(v)}(x) = (y_{v-1}) + (y'_{v-1})\bar{x} + \left(\frac{3(y_v - y_{v-1})}{l_v^2} - \frac{(y'_v + 2y'_{v-1})}{l_v} \right) \bar{x}^2 + \left(\frac{y'_v + y'_{v-1}}{l_v^2} - \frac{2(y_v - y_{v-1})}{l_v^3} \right) \bar{x}^3 \quad 15(1)$$

$$S_{(v)}(x) = \left(1 - \frac{3\bar{x}^2}{l_v^2} + \frac{2\bar{x}^3}{l_v^3} \right) y_{v-1} + \left(\frac{3\bar{x}^2}{l_v^2} - \frac{2\bar{x}^3}{l_v^3} \right) y_v + \left(\bar{x} - \frac{2\bar{x}^2}{l_v} + \frac{\bar{x}^3}{l_v^2} \right) y'_{v-1} + \left(\frac{-2\bar{x}}{l_v} + \frac{\bar{x}^3}{l_v^2} \right) y'_v \quad 15(2)$$

Ersetzt man das Intervall- \bar{x} durch das Streifen- x , so erhält man die numerisch günstige Ahlberg'sche Darstellung in Differenzen, die die

Größenordnung der l_v haben:

$$S_{(v)}(x) = \frac{(x_v - x)^2 \left[2(x - x_{v-1}) + l_v \right]}{l_v^3} y_{v-1} + \frac{(x - x_{v-1})^2 \left[2(x_v - x) + l_v \right]}{l_v^3} y_v +$$

$$+ \frac{(x_v - x)^2 (x - x_{v-1})}{l_v^2} y'_{v-1} - \frac{(x - x_{v-1})^2 (x_v - x)}{l_v^2} y'_v \quad 15(3)$$

Eine Sortierung nach Potenzen von x ist numerisch ungünstiger als eine solche nach Potenzen von $(x - x_{v-1}) = \bar{x}$.

Für 7(5) benötigen wir auch die 1. Ableitungen

$$S'_{(v)}(x) = (y'_{v-1}) + \left(\frac{6(y_v - y_{v-1})}{l_v^2} - \frac{2(y'_v + 2y'_{v-1})}{l_v} \right) \bar{x} +$$

$$+ \left(\frac{3(y'_v + y'_{v-1})}{l_v^2} - \frac{6(y_v - y_{v-1})}{l_v^3} \right) \bar{x}^2 \quad 15(4)$$

$$S''_{(v)}(x) = - \frac{6(x_v - x)(x - x_{v-1})}{l_v^3} y_{v-1} + \frac{(x_v - x)(x_v - x - 2(x - x_{v-1}))}{l_v^2} y'_{v-1} +$$

$$+ \frac{6(x_v - x)(x - x_{v-1})}{l_v^3} y_v - \frac{(x - x_{v-1})(2(x_v - x) - (x - x_{v-1}))}{l_v^2} y'_v \quad 15(5)$$

Wenn man will, dass an den inneren Intervallgrenzen x_v , $v = 2(1)n-1$, auch die 2. Ableitungen übereinstimmen, muss für jeden dieser Knoten die folgende Bedingung erzwungen werden:

$$3 \frac{l_{v+1}}{l_v} y_{v-1} + 3 \left(\frac{l_v}{l_{v+1}} - \frac{l_{v+1}}{l_v} \right) y_v - 3 \frac{l_v}{l_{v+1}} y_{v+1} + l_{v+1} y'_{v-1} + 2(l_{v+1} + l_v) y'_v +$$

$$+ l_v y'_{v+1} = 0 \quad 15(6)$$

In Kubik's Veröffentlichungen über Ausgleichsmethoden mit gestückelten Polynomen 1971(a) (Photogrammetrische Wochen Karlsruhe) und 1972 (12. IGPh Kongress in Ottawa) ist diese Bedingungsgleichung weggelassen worden, weil man bei photogrammetrischen Anwendungen mit den äusserst kleinen Δ_v und grossen l_v sicher über die Notwendigkeit eines stetigen Ueberganges der Krümmungsverhältnisse an den Intervallgrenzen verschiedener Meinung sein kann. Den normalen Spline-Bedingungen entspricht die Erfüllung der obigen Bedingungsgleichung, die man jedenfalls dann ansetzen wird, wenn man, wie Kubik in 1971(b), noch an andere Anwendungen für Spline-Funktionen denkt.

In Kubik 1971(b) ist noch eine zweite Darstellung für kubische Polynome als Funktion von y_{v-1} , y_v , y''_{v-1} und y''_v mit einer Bedingungsgleichung für $y'(x_v)$, $x_v \in [x_{v-1}, x_v] \wedge [x_v, x_{v+1}]$, angegeben. Wenn $x \in [x_{v-1}, x_v]$, dann gilt

$$S_{(v)}(x) = y''_{v-1} \frac{(x_v - x)^3}{6l_v} + y''_v \frac{(x - x_{v-1})^3}{6l_v} + \left(y_{v-1} - \frac{y''_{v-1} l_v^2 (x_v - x)}{6} \right) + \left(y_v - \frac{y''_v l_v^2}{6} \right) \frac{(x - x_{v-1})}{l_v}, \text{ oder} \quad 15(7)$$

$$S_{(v)}(x) = ((x_v - x)^3 - l_v^2 (x_v - x)) \frac{y''_{v-1}}{6l_v} + ((x - x_{v-1})^3 - l_v^2 (x - x_{v-1})) \frac{y''_v}{6l_v} + \frac{(x_v - x)}{l_v} y_{v-1} + \frac{(x - x_{v-1})}{l_v} y_v, \quad v = 2(1)n. \quad 15(8)$$

Die Bedingungsgleichung lautet:

$$\frac{1}{6} y''_{v-1} + \frac{1}{3} \frac{1}{l_{v+1}} y''_v + \frac{1}{6} y''_{v+1} = \frac{y_{v+1}}{l_{v+1}} - \left(\frac{1}{l_{v+1}} + \frac{1}{l_v} \right) y_v + \frac{y_{v-1}}{l_v}, \quad v = 2(1)n-1 \quad 15(9)$$

In dieser Form stellen die kubischen Polynome eine normale Spline-Funktion 3. Grades dar, die nur innerhalb (x_1, x_n) definiert ist:

$$S(x) \in S_3(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad 15(10)$$

$$S(x) = S_v(x) \quad x \in (x_{v-1}, x_v) \quad v = 2(1)n$$

$S_v(x_v) = S_{v+1}(x_v)$	garantiert durch Parameterwahl
$S'_v(x_v) = S'_{v+1}(x_v)$	garantiert durch Nebenbedingung oder Parameterwahl
$S''_v(x_v) = S''_{v+1}(x_v)$	garantiert durch Parameterwahl oder Nebenbedingung

Für eine Anwendung in der in 7(5) schematisch vorgesehenen Art kommen kubische Polynome nicht in Frage, da durch die Integration eine weitere Graderhöhung einträte. Hier müsste man vom Schema abweichen und den umgekehrten Weg gehen, nämlich $S_3(x)$ und $S'_3(x)$ für $\int \text{Pol}(x) dx$ und $\text{Pol}(x)$ setzen. Für die Nichtdoppelsummationselemente (ω und my) benötigt man dann aber andere Spline-Funktionen 2. Grades.

15.2 Quadratische Polynome.

Für quadratische Polynome wählt Kubik 1971(a) für jedes Intervall (x_{v-1}, x_v) , $v = 2(1)n$, als Parameter die Funktionswerte an den Intervallgrenzen

$S(x_{v-1}) = y_{v-1}$ und $S(x_v) = y_v$ und ferner die Krümmung $S''_{(v)}(x) = A_v = 2c_v$. Die Intervallpolynome $S_{(v)}(x)$ sind dann

$$S_{(v)}(x) = a_v + b_v \bar{x} + c_v \bar{x}^2, \quad \text{wobei } \bar{x} := x - x_{v-1} \quad \forall x \in [x_{v-1}, x_v]$$

$$S_{(v)}(x) = (y_{v-1}) + \left(\frac{y_v - y_{v-1}}{l_v} - \frac{A_v l_v}{2} \right) \bar{x} + \frac{A_v}{2} \bar{x}^2 \quad 15(11)$$

oder, geordnet nach den Parametern y_{v-1} , y_v und A_v :

$$S_{(v)}(x) = \left(1 - \frac{\bar{x}}{l_v} \right) y_{v-1} + \left(\frac{\bar{x}}{l_v} \right) y_v + \left(\frac{\bar{x}^2}{2} - \frac{l_v \bar{x}}{2} \right) A_v \quad 15(12)$$

Für den gesamten Interessenbereich $x \in (x_1, x_n)$ gilt:

$$S(x) := \begin{array}{ll} S_{(2)}(x) & x \in (x_1, x_2) \\ S_{(3)}(x) & x \in (x_2, x_3) \\ \vdots & \\ S_{(n)}(x) & x \in (x_{n-1}, x_n) \end{array} \quad 15(13)$$

oder kurz

$$S(x) := S_{(v)}(x) \quad x \in (x_{v-1}, x_v) \quad , \quad v = 2(1)n$$

An den inneren Intervallgrenzen x_v , $v = 2(1)n-1$, müssen auch die

1. Ableitungen y'_v zwischen den Folgepolynomen übereinstimmen:

$$S'_{(v)}(x) = \frac{y_v - y_{v-1}}{l_v} - \frac{A_v l_v}{2} + A_v (x - x_{v-1}) \quad 15(14)$$

$$S'_{(v)}(x) = -\frac{1}{l_v} y_{v-1} + \frac{1}{l_v} y_v + \frac{(x - x_{v-1}) - (x_v - x)}{2} A_v$$

$$\text{Für } x = x_v \in (x_{v-1}, x_v) : y'_v = -\frac{1}{l_v} y_{v-1} + \frac{1}{l_v} y_v + \frac{1}{2} A_v$$

$$\text{Für } x = x_v \in (x_v, x_{v+1}) : y'_v = -\frac{1}{l_{v+1}} y_v + \frac{1}{l_{v+1}} y_{v+1} - \frac{1}{2} A_{v+1}$$

Durch Gleichsetzen folgt die Bedingungsgleichung, die anlässlich der Parameterberechnung für alle inneren Knoten x_v , $v = 2(1)n-1$, anzusetzen ist:

$$\frac{1}{l_v} y_{v-1} - \left(\frac{1}{l_v} + \frac{1}{l_{v+1}} \right) y_v + \frac{1}{l_{v+1}} y_{v+1} - \frac{1}{2} A_v - \frac{1}{2} A_{v+1} = 0 \quad 15(15)$$

In dieser Form stellt $S(x)$ wieder eine normale Spline-Funktion 2. Grades dar, die nur für $[x_1, x_n]$ definiert ist:

$$S(x) \in \mathcal{S}_2(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$S(x) := S_{(v)}(x) \quad x \in [x_{v-1}, x_v]$$

$$v = 2(1)n$$

$$S_{(v)}(x_v) = S_{(v+1)}(x_v) \quad \text{garantiert durch Parameterwahl}$$

$$S'_{(v)}(x_v) = S'_{(v+1)}(x_v) \quad \text{garantiert durch Nebenbedingung}$$

Quadratische Spline-Funktionen dieser Art weisen in $[x_1, x_n]$ $(2n-1)$ Unbekannte auf, n Funktionswerte y_v und $(n-1) \cdot 2$ Ableitungen A_v . Die $(n-2)$ Bedingungsgleichungen für die inneren Knoten bewirken, dass insgesamt $(2n-1) - (n-2) = (n+1)$ Freiheitsgrade bestehen, sodass mindestens $(n+1)$ voneinander unabhängige Referenzinformationen, möglichst gleichmässig über $[x_1, x_n]$ verteilt, erforderlich sind.

Um später die Koordinatenfehler zufolge der veränderlichen Doppelselemente m_x , ϕ und κ erfassen zu können (Vergleiche "A" in 7(5)), müssen wir $S(x)$ integrieren.

Für $x \in [x_{v-1}, x_v]$, $v = 2(1)n$ ist

$$\int_{x_1}^x S(x) dx = \sum_{i=2}^{v-1} \left(\int_{x_{i-1}}^x S_{(i)}(x) dx \right) + \int_{x_{v-1}}^x S_{(v)}(x) dx = I + II \tag{15(16)}$$

worin detailliert aus 15(11):

$$I = \sum_{i=2}^{v-1} \left\{ \int_{x=0}^1 S_{(i)}(\bar{x}) d\bar{x} = y_{i-1} \bar{x} + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{2l_i} - \frac{A_i l_i}{4} \right) \bar{x}^2 + \frac{A_i}{6} \bar{x}^3 \right\} \Big|_0^1 =$$

$$= \sum_{i=2}^{v-1} \left\{ (y_{i-1} + y_i) \frac{l_i}{2} - \frac{A_i l_i^3}{12} \right\}$$

$$II = \int_{\bar{x}=0}^{(x-x_{v-1})} S_{(v)}(\bar{x}) d\bar{x} = y_{v-1} (x-x_{v-1}) + \left(\frac{y_v - y_{v-1}}{2l_v} - \frac{A_v l_v}{4} \right) (x-x_{v-1})^2 +$$

$$+ \frac{A_v}{6} (x-x_{v-1})^3$$

$$\int_{x_1}^x S(x) dx = \sum_{i=2}^{v-1} \left(\frac{l_i}{2} y_{i-1} + \frac{l_i}{2} y_i - \frac{l_i^3}{12} A_i \right) + \frac{1}{2l_v} (x-x_{v-1}) (l_v + x_v - x) y_{v-1} +$$

$$\frac{(x-x_{v-1})^2}{2l_v} y_v + (x-x_{v-1})^2 (2(x_v - x) - l_v) \frac{1}{12} A_v$$

$$= \text{Pol}(y_1, \dots, y_v, A_2, \dots, A_n)$$

Wenn man also für einen beliebigen Passpunkt aus dem Intervall $[x_{v-1}, x_v]$ eine Verbesserungsgleichung aufstellt, so enthält diese sämtliche Parameter der Vorintervalle und des eigenen Intervalles.

Prinzipiell ist also auch hier der Weg, vom Grundpolynom auszugehen und die Koordinatenverbesserungen nach 7(5) anzusetzen, möglich.

15.3 Lineare Polynome.

Für lineare Polynome werden als Parameter die Funktionswerte

$S_{(v)}(x_{v-1}) = y_{v-1}$ und $S_{(v)}(x_v) = y_v$ eingeführt.

$S_{(v)}(x) = a_v + b_v \bar{x}$ mit $\bar{x} := (x - x_{v-1})$ und $l_v := (x_v - x_{v-1})$:

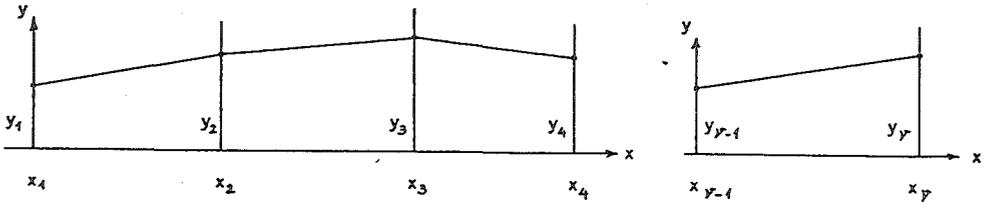


Abb. 15.3(1): Gestückelte lineare Polynome nach Kubik.

Wenn $x \in (x_{v-1}, x_v)$:

$$S_{(v)}(x) = y_{v-1} + \frac{y_v - y_{v-1}}{l_v} \bar{x} = \frac{(x_v - x)}{l_v} y_{v-1} + \frac{(x - x_{v-1})}{l_v} y_v \quad 15(17)$$

Durch alle $S_{(v)}(x)$ wird eine normale Spline-Funktion in $[x_1, x_n]$ definiert.

$$S(x) \in \mathcal{S}_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad 15(18)$$

$$S(x) := S_{(v)}(x) \quad \begin{array}{l} x \in [x_{v-1}, x_v] \\ v = 2(1)n \end{array}$$

$S_{(v)}(x_v) = S_{(v+1)}(x_v)$ garantiert durch Parameterwahl

Zum Aufbau der Gleichungen 7(5) mit $S(x)$ wird wieder deren Integration benötigt:

$$\int_{x_1}^x S(x) dx = \sum_{i=2}^{v-1} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} S_{(i)}(x) dx \right) + \int_{x_{v-1}}^x S_{(v)}(x) dx = I + II \quad 15(19)$$

$$I = \sum_{i=2}^{v-1} \frac{l_i}{2} (y_{i-1} + y_i)$$

$$II = \int_{x_{v-1}}^x S_{(v)}(x) dx = \frac{(x - x_{v-1})((x_v - x_{v-1}) + (x_v - x))}{2l_v} y_{v-1} + \frac{(x - x_{v-1})^2}{2l_v} y_v$$

AUSGLEICHUNG MIT SPLINE-FUNKTIONEN

16. Theoretische Grundlagen zur Ausgleichung des Spline-Systems.

16.1 Glattheitsbedingung und Minimumprinzip.

Wenn wir auch für unsere normalen Spline-Funktionen im System 7(5) eine Glattheitsbedingung $\sigma_g(S)$ definieren, so sollte dabei versucht werden, folgende Ziele zu erreichen:

a. Starke Krümmungen der "Grund-Spline-Funktionen" bzw. "Grundpolynome" sollen gedämpft werden.

Das ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass die Krümmungsänderungen der einzelnen Summanden in 7(5) minimiert werden müssen.

b. Die Dämpfung soll generell steuerbar und

c. zwischen den Einzelspline-Funktionen (für die 5 Orientierungsparameter, einerseits Dreh-, andererseits Massstabsfaktoren) regulierbar sein.

In Anlehnung an 14(7) sei daher definiert:

$$\sigma_g(S) = g_2 \sum_{e=1}^E \int_{x_1}^{x_n} q_e (S_e^{(m)}(x)) \quad \rightarrow \text{ad Min.} \quad 16(1)$$

Diese Glattheitsbedingung erweitert das Minimumprinzip:

$$g_1 [pvv] + g_2 [qff] \rightarrow \text{Min.}$$

oder ausführlich

$$g_1 \sum_{i=1}^r p_{ix} (SS_x(x_i) - \Delta x_i)^2 + g_2 \sum_{e=1}^E \int_{x_1}^{x_n} q_e (S_e^{(m)}(x))^2 dx \rightarrow \text{Min.} \quad 16(2)$$

Unter Einhaltung allfälliger Nebenbedingungen $\underline{B}^T \underline{u} + \underline{t} = \underline{Q}$

$g_1, g_2 \dots$ Gewichte zur Steuerung der Dämpfung, $g_2 = 0$ schaltet die Dämpfung überhaupt aus, $g_2 \rightarrow \infty$ bewirkt eine völlige Löschung der Glieder höchster Ordnung (Bedingung b).

$p_{ix} \dots \dots$ Gewichte der 3 Koordinatenverbesserungen der r Passpunkte.

$q_e \dots \dots$ Gewichte der E Einzel-Spline-Funktionen (Bedingung c).

$SS_x \dots \dots$ Kombiniertes Spline-System, die 3 Zeilen in 7(5).

$S_e^{(m)}(x) \dots$ Die m-te Ableitung der e-ten Grund-Spline-Funktion.

$\underline{B}^T \underline{u} + \underline{t} = \underline{Q}$.. Knotenbedingungen an den inneren Knoten bei Anwendung der Polynome nach Kubik, oder Randbedingungen zwecks Naturalisierung von Spline-Funktionen.

Während Kubik, der Spline-Approximationstheorie 14.2.5.2 folgend, jeweils die $(k-1)$ -te Ableitung der Teilpolynome k -ten Grades zur Glättung verwendet, sei hier bewusst darauf abgezielt, die Krümmungsänderungen der Teilpolynome oder die Krümmungen der Grundpolynome zur blossen Dämpfung heranzuziehen.

Wenn die Teilpolynome die Form $\Delta x_i = a + bx + cx^2 + dx^3$ haben, dann bedeutet $\int_{x_1}^x (\Delta x'''(x))^2 dx = \sum_{v=1}^{n-1} (6d_v)^2 (x_v - x_{v-1})$ die Fläche der intervallweise quadrierten Treppenfunktion.

16.2 Anschauliche Interpretation.

Durch Jerie, 1960, hat die Photogrammetrie gelernt, die Ausgleichsaufgaben auch im Sinne des in der Mechanik bekannten Satzes von Castigliano zu sehen, demzufolge jener Gleichgewichtszustand eines elastischen Systems eintritt, für den die erforderliche Formänderungsarbeit am kleinsten ist. Jerie hat auch gezeigt, dass die Normalgleichungen der Ausgleichsrechnung nichts anderes sind als der mathematische Ausdruck für die Gleichgewichtsbedingungen für analoge elastische Systeme.

Der hier vorliegende Fall betrifft die vermittelnde Ausgleichung eines interrelierten Spline-Systems mit zusätzlicher Minimumsbedingung für dessen Glattheit und mit fallweise notwendigen Knotenbedingungen.

Mechanisch müsste man den Ansatz 16(2) folgendermassen interpretieren: An allen Stellen $q = 1(1)r$, den Passpunkten oder Stützstellen, greifen Federkräfte $F = p \cdot v$ derart an, dass die Formänderungsenergie $U = 0,5[pv]$ an allen Federn zusammengenommen ein Minimum wird. Den Federkräften setzt das Spline-System seine elastischen Eigenkräfte entgegen, sodass die Verzerrungsenergie des Spline-Systems

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E J (S''(x))^2 dx$$

ebenfalls mit zum Minimum wird. Den Gewichtsfaktoren g_1 und g_2 kommt daher die Bedeutung von Proportionalitätsfaktoren zu, mit deren Hilfe die beiden Kraftsysteme relativ zueinander geeicht werden. In g_2 steckt auch das Trägheitsmoment J des Spline-Systems. Die Gewichte q_e entsprechen den Elastizitätsmodulen E der Einzelsplines. Wählt man in der Glattheitsbedingung σ_g statt der zweiten Ableitungen $S''(x)$ die weniger streng wirksamen dritten Ableitungen $S'''(x)$, so würde dies mechanisch bedeuten, dass die Summe aller Schnittquerkräfte-Quadrate Q^2 statt der Biegemoment-Quadrate M^2 zum Minimum gemacht wird.

$$S'''(x) = Q = \frac{\partial W}{\partial x} \quad .+)$$

Abbildung 16.2.(1) möge die Zusammenhänge noch weiter veranschaulichen.

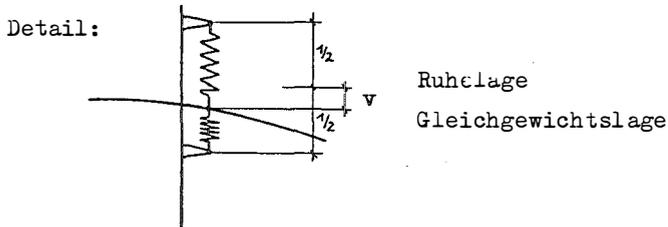
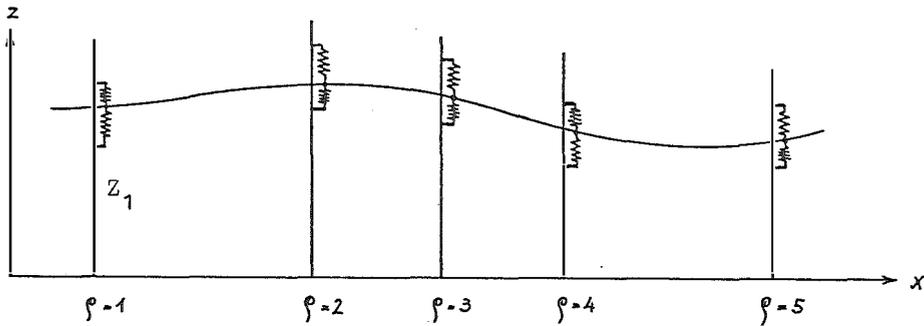


Abb. 16.2.(1): Zur mechanischen Interpretation des Spline-Ausgleichs. In Ruhelage befinden sich die Kupplungsbolzen der Einstelleinheiten (nach Jerie, 1960) in der Sollhöhe Z . Der Spline-Ausgleich bewirkt, dass die Kupplungsbolzen um Beträge v_i aus der Ruhelage ausweichen.

16.3 Vermittelnde Ausgleichung mit zusätzlicher Minimumsbedingung für Funktionen der Unbekannten und mit Nebenbedingungen.

Literatur: E. Gotthardt, 1967
 E. Gotthardt, 1968
 J. Stetter, 1969
 K. Kubik, 1971 (a)
 K. Kubik, 1971 (b)

Die Verbesserungsgleichungen nach 7(5) haben die Form:

$$-\underline{v} = \underline{A} \cdot \underline{u} - \underline{l}$$

mit den Gewichten $(g_1 \cdot p) = \underline{P}$

+) H. Parkus "Mechanik der festen Körper." 2.Auflage, Springer Verlag, Wien, 1966.

Sie sind a priori linear und auf gute Näherungen bezogen, da ja nur dann der Ansatz 7(5) möglich ist. Gegeben sind ferner die Bedingungs-
gleichungen in Form von Knotenbedingungen

$$\underline{B}^T \underline{u} + \underline{t} = \underline{0} \quad 16(4)$$

und die zusätzlichen Minimumsbedingungen für die Glattheit des Systems, die stets als quadratische Form $\underline{u}^T \underline{M} \underline{u}$ geschrieben werden können. Aus der Minimumsbedingung nach Gauss erweitert um die mit den Lagrange'schen Multiplikatoren $2\underline{k}$ multiplizierten Nebenbedingungen und den Zusatz-Minimumsforderungen an die Glattheit

$$\underline{v}^T \underline{P} \underline{v} + \underline{u}^T \underline{M} \underline{u} + 2\underline{k}^T (\underline{B}^T \underline{u} + \underline{t}) \longrightarrow \text{Min.} \quad 16(5)$$

erhält man nach Differentiation und Nullsetzen wieder ein symmetrisches Gleichungssystem:

$$2\underline{v}^T \underline{P} \underline{d} \underline{v} + 2\underline{u}^T \underline{M} \underline{d} \underline{u} + 2\underline{k}^T \underline{B}^T \underline{d} \underline{u} + 2\underline{d} \underline{k}^T (\underline{B}^T \underline{u} + \underline{t}) = \underline{0} \quad 16(6)$$

$$-\underline{v} = \underline{A} \underline{u} - \underline{l}$$

$$-\underline{d} \underline{v} = \underline{A} \underline{d} \underline{u} \quad 16(7)$$

$$\underline{B}^T \underline{u} + \underline{t} = \underline{0}$$

16(7), in 16(6) einsetzen, ergibt 16(8)

$$\begin{pmatrix} \underline{A}^T \underline{P} \underline{A} + \underline{M} & \vdots & \underline{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{B}^T & \vdots & \underline{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \vdots \\ \underline{k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \underline{A}^T \underline{P} \underline{l} \\ \vdots \\ -\underline{t} \end{pmatrix} = \underline{0} \quad 16(8)$$

Falls keine Nebenbedingungen vorliegen, degeneriert 16(8) zu

$$(\underline{A}^T \underline{P} \underline{A} + \underline{M}) \underline{u} - \underline{A}^T \underline{P} \underline{l} = \underline{0} \quad 16(9)$$

Wenn man auch noch die Glattheitsbedingungen weglässt ($g_2 = 0$), erhält man die Form des gewöhnlichen Normalgleichungssystems für vermittelnde Beobachtungen:

$$\underline{A}^T \underline{P} \underline{A} \underline{u} - \underline{A}^T \underline{P} \underline{l} = \underline{0} \quad 16(10)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass 16(8) wohl symmetrisch, aber nicht positiv definit ist, da in der Hauptdiagonale 0-Elemente auftreten. Eine Lösung mit dem Gauss'schen Algorithmus ist jedoch ebenfalls möglich. Die Fehlerrechnung sei praxisorientiert auf die Ermittlung der Einzelverbesserungen $\underline{v} = \underline{l} - \underline{A} \underline{u}$, die gewichtete Fehlerquadratsumme $[pvv]$ und auf die Berechnung des mittleren Gewichtseinheitsfehlers m_0 beschränkt:

$$m_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{n - (n_u - n_b)}} \quad 16(11)$$

n = Anzahl der Verbesserungsgleichungen 16(3)

n_u = Anzahl der Unbekannten u in den Verbesserungsgleichungen

n_b = Anzahl der Bedingungs-gleichungen 16(4)

16.4 Verbesserungs- und Bedingungsgleichungen für Streifen- und Blockausgleichung mit Spline-Systemen nach 7(5).

16.4.1 Verbesserungsgleichungen für Passpunkte:

$$-v_x = \int_{x_1}^x S_x(x) dx + \Delta x_0 - y S_{\mu}(x) + z S_{\varphi}(x) - (X-x)$$

$$-v_y = \int_{x_1}^x S_{\mu}(x) dx + \Delta y_0 + y S_y(x) - z S_{\omega}(x) - (Y-y) \quad 16(12)$$

$$-v_z = -\int_{x_1}^x S_{\varphi}(x) dx + \Delta z_0 + y S_{\omega}(x) + z S_y(x) - (Z-z)$$

Für n_H Höhenpasspunkte werden n_H Gleichungen für v_z , für n_L Lagepasspunkte 2 n_L solche für v_x und v_y , für n_V Vollpasspunkte 3 n_V für alle drei v aufgestellt, je in allen Streifen, in denen die Punkte vorkommen. Alle zusammen bilden das System

$$-v_p = A_p \cdot u - l_p$$

von n_p Gleichungen mit den Gewichten p_p . Für $(n_H + n_L + n_V)$ Passpunkte ergibt sich im Falle nur eines Streifens:

$$n_p = n_H + 2n_L + 3n_V \quad 16(13)$$

Im Block sind die n_p für alle Streifen zu addieren.

16.4.2 Verbesserungsgleichungen für Streifenverbindungspunkte.

$$-v_x = \left(\int_{x_1}^x S_x(x) dx + \Delta x_0 - y S_{\mu}(x) + z S_{\varphi}(x) \right)_{s_i} - \left(\int_{x_1}^x S_x(x) dx + \Delta x_0 - y S_{\mu}(x) + z S_{\varphi}(x) \right)_{s_{i+1}} - (x_{s_i} - x_{s_{i+1}})$$

$$-v_y = \left(\int_{x_1}^x S_{\mu}(x) dx + \Delta y_0 + y S_y(x) - z S_{\omega}(x) \right)_{s_i} - \left(\int_{x_1}^x S_{\mu}(x) dx + \Delta y_0 + y S_y(x) - z S_{\omega}(x) \right)_{s_{i+1}} - (y_{s_i} - y_{s_{i+1}}) \quad 16(14)$$

$$-v_z = \left(\int_{x_1}^x S_{\varphi}(x) dx + \Delta z_0 + y S_{\omega}(x) + z S_y(x) \right)_{s_i} - \left(\int_{x_1}^x S_{\varphi}(x) dx + \Delta z_0 + y S_{\omega}(x) + z S_y(x) \right)_{s_{i+1}} - (z_{s_i} - z_{s_{i+1}})$$

Kommt ein Streifenverbindungspunkt in mehr als zwei, allgemein in s Streifen vor, dann sind $3(s-1)$ Verbesserungsgleichungen aufzustellen.

Alle diese Verbesserungsgleichungen zusammengenommen bilden ein System von n_{SV} Gleichungen:

$$-v_{SV} = A_{SV} \cdot u - l_{SV} \quad 16(15)$$

mit den Gewichten p_{SV} .

Für Passpunkte dürfen nicht gleichzeitig auch Verbesserungsgleichungen v_{SV} aufgestellt werden, es sei denn, für bei v_P nicht verwendete Koordinaten.

16.3.3 Verbesserungsgleichungen für Statoskop- und APR-Punkte.

Für jedes Projektionszentrum sowie für eine bestimmte, vorausgewählte Anzahl von APR-Punkten lassen sich bei Anwendung eines Radarprofil-schreibers (APR) zusätzliche Verbesserungsgleichungen aufstellen, wird nur ein Statoskop eingesetzt, dann nur für die Projektionszentren:

$$Z_0(x) = \text{Pol}_1^{(B)}(x) \quad 16(16)$$

sei die iterativ oder simultan ausgeglichene Höhe der barometrischen Referenz-Niveaufläche. Dann gilt für jedes Projektionszentrum mit Statoskopregistrierung:

$$-v_{St} = - \int_{x_1}^x S_\varphi(x) dx + \Delta z_0 + y S_\omega(x) + z S_y(x) - (Z_0(x) + \Delta z_{St} - z) \quad 16(17)$$

mit dem Gewicht p_{St} .

und für die APR-Punkte:

$$-v_{APR} = - \int_{x_1}^x S_\varphi(x) dx + \Delta z_0 + y S_\omega(x) + z S_y(x) - (Z_0(x) + \Delta z_{St} - \Delta h_{APR} - z) \quad 16(18)$$

mit dem Gewicht p_{APR} .

Die obigen Verbesserungsgleichungen haben wieder die allgemeine Form

$$-v_{St} = A_{St} u - l_{St} \quad 16(19)$$

$$-v_{APR} = A_{APR} u - l_{APR} \quad 16(20)$$

Alle Verbesserungsgleichungen

$$v = \begin{pmatrix} v_P \\ \dots \\ v_{St} \\ \dots \\ v_{APR} \\ \dots \\ v_{SV} \end{pmatrix} \quad 16(21)$$

tragen gemeinsam, mit P gewichtet, zum Aufbau der Normalgleichungen bei.

17. Räumliche Spline-Streifenausgleiche.

17.1 Grundpolynome aus der Familie der gewöhnlichen Spline-Funktionen

bis zum 2. Grad als abgehackte Potenzfunktionen.

$$S_1(x) = p_0(x) + \sum_{j=1}^{n-1} c_j (x-x_j)_+^1 \quad p_0(x) \in \tilde{\mathcal{H}}_0 \quad +) \quad 17(1)$$

$$S_2(x) = p_1(x) + \sum_{j=1}^{n-1} c_j (x-x_j)_+^2 \quad p_1(x) \in \tilde{\mathcal{H}}_1$$

Analog Abschnitt 11 könnten nun wieder die bei einfachen Polynomen sinnvollen 4 Typen der Reihe nach untersucht werden. Da die Spline-Streifenausgleiche gegenüber den einfachen Polynomialansätzen lediglich den Vorteil haben, ohne Graderhöhung längere Streifen verarbeiten zu können, genügt es, den allgemeinsten und für lange Streifen sinnvollsten Typ S 22222 exemplarisch zu behandeln:

Der Darstellung 11(7) folgend erhalten wir nun

$$-\underline{v} = \underline{C}u_c + \underline{L}u_1 + \underline{Q}u_q + \sum_{j=1}^{n-1} K_{j-kj} u_{-kj} - \underline{\Delta x} \quad 17(2)$$

Die Verbesserungsgleichungen sind je nach dem x des betreffenden Passpunktes verschieden lang. Ihr Anteil am Aufbau der Normalgleichungen bewirkt jedenfalls eine fast vollbesetzte Matrix.

Der Beitrag der Glattheitsbedingung 16(1) zu den Normalgleichungen erhält die Form 17(5):

$$S_e''(x) = \sum_{j=1}^{n-1} 2c_{ej} \quad 17(3)$$

$$\sigma_g = g_2 \sum_{e=1}^E \int_{x_1}^{x_n} q_e (S_e''(x))^2 dx$$

Wegen der Spline-Darstellung in Summen abgehackter Potenzfunktionen ist intervallweise zu integrieren. Nach Zusammenfassen erhalten wir:

$$\sigma_g = 4g_2 \sum_{e=1}^E q_e \sum_{v=2}^n ((x_v - x_{v-1}) (\sum_{j=1}^{v-1} c_{ej})^2) \rightarrow \text{ad Min.} \quad ++ \quad 17(4)$$

$$\frac{\delta \sigma_g}{\delta c_{ej}} = 8g_2 q_e \sum_{v=2}^{j+1} ((x_v - x_{v-1}) (\sum_{i=1}^{v-1} c_{ei})) = \text{ad 0} \quad ++ \quad 17(5)$$

+) Allgemein haben wir $j = 1(1)n$. Da aber das Intervall (n, ∞) praktisch uninteressant ist, sobald $x_n > x$, d.h. kein x die Intervallgrenze x_n überschreitet, können die c_n in u, und n als Summationsgrenze weglassen werden.

++) Im Anhang detailliert beschrieben.

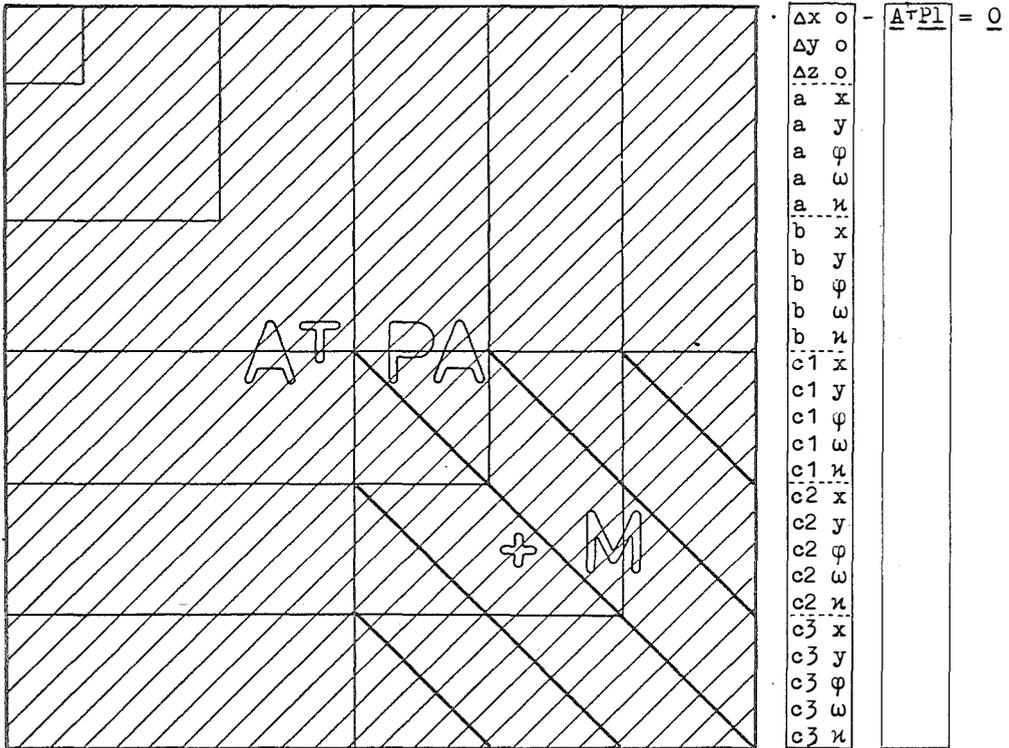


Abb. 17(1): Normalgleichungssystem für einen Einzelstreifenausgleich nach Typ S 22222 mit Spline-Funktionen als abgehackte Potenzfunktionen über 3 Knotenintervalle.

Nebenbedingungen treten bei diesen Spline-Funktionen nicht auf. Die Normalgleichungsmatrix wird also wie gewöhnlich durch Multiplikation Spalte mal Spalte aus den Verbesserungsgleichungen aufgebaut und dann für die Submatrix der c_{ej} nach der in Abb. 17(1) ersichtlichen Art durch die Elemente 17(5) ergänzt. Die Lösung des Systems erfolgt nach den üblichen Verfahren.

Für mehrere Parallelstreifen in Blockform und gleichzeitiger Lösung der Unbekannten ergibt sich das Normalgleichungssystem Abb. 17(2).

Die linke Seite der Normalgleichungsmatrix zeigt deutlich den Einfluss der allgemeinen Glattheitsbedingung $\sigma_g \rightarrow \text{ad Minimum}$, die für mehrere Streifen in einem Block die Rolle einer "Störfunktion" gegenüber den reinen Ausgleichsanteilen annimmt. Der Einfluss dieser "Störfunktion" kann durch g_2 vernünftig klein gehalten oder aber auch besonders betont werden.

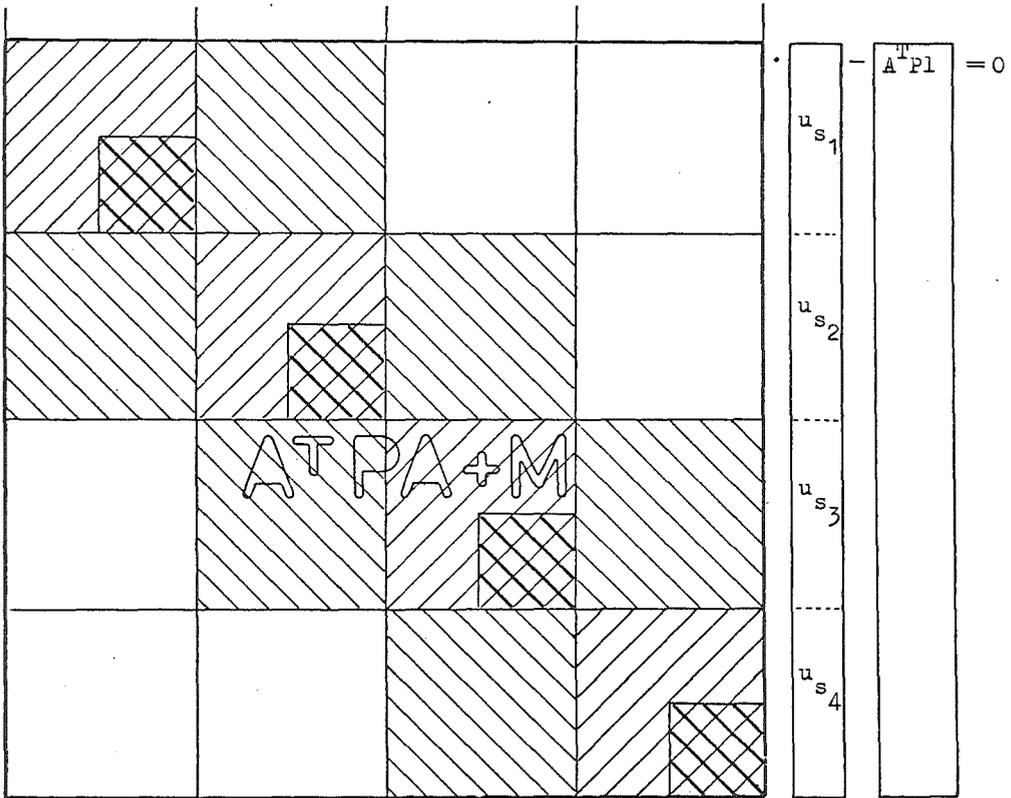


Abb. 17(2): Normalgleichungsmatrix für einen Streifenblock von 4 Streifen.



- Anteile der Streifenverbindungspunkte
- Anteile der Passpunkte, APR-Punkte etc.
- Anteile der Glattheitsbedingung, alle Submatrizen-
elemente positiv.

Für Streifenblockausgleiche gilt:

$$\begin{aligned}
 \sigma_g &= g_2 \sum_{s=1}^S \sum_{e=1}^E \int_{x_1}^{x_n} q_e (S_{se}''(x))^2 dx \rightarrow \text{ad Min.} \\
 &= 4g_2 \sum_{s=1}^S \sum_{e=1}^E q_e \sum_{v=2}^n ((x_v - x_{v-1}) (\sum_{j=1}^{v-1} c_{sej}))^2 \rightarrow \text{ad Min.} \quad 17(7)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma_g}{\partial c_{sej}} = 8g_2 q_e \sum_{v=2}^{j+1} ((x_v - x_{v-1}) (\sum_{i=1}^{v-1} c_{sej})) = \text{ad } 0 \quad 17(8)$$

Die 'Normalgleichungs-Störkoeffizienten' der Unbekannten c_{sej} sind alle positiv, wodurch einleuchtet, dass die c_{sej} mit wachsendem Gewicht g_2 immer kleiner werden müssen, damit die Nullbedingung erfüllt werden kann. Mit dem Aufbau der Normalgleichungsmatrix ist das Problem an sich gelöst.

17.2 Grundpolynome aus der Familie der natürlichen Spline-Funktionen.

Obwohl die natürlichen Spline-Funktionen $S_3(x) \in \mathcal{N}_3(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ideale Glattheitseigenschaften im Sinne von 14(7) aufweisen, scheiden sie dennoch aus der Reihe der Alternativen aus, da zum Erfassen der systematischen Aerotriangulationsfehler jedenfalls quadratische Polynomglieder gefordert werden müssen. Und gerade diese fehlen bei den natürlichen Spline-Funktionen. Der Polynomgrad nach der Integration in 7(5) wäre entweder zu hoch ($S_3(x)$ führt zur 4. Potenz) oder für lange Streifen zu niedrig ($S_1(x)$ führt nur zur 2. Potenz). Was bleibt, sind die in 14.2.4.b "quasinatürlich" behandelten Spline-Funktionen, die sich von den in 17.1 verwendeten, normalen Spline-Funktionen nur noch durch die Nebenbedingung ($\sum_{j=1}^n c_j = 0$, s.14(4)) unterscheiden. Diese Nebenbedingung kann aber nur dann erfüllt werden, wenn das Intervall $[x_n, \infty]$ nicht leer ist. Wenn alle $x \leq x_n$, kann immer $c_n = -\sum_{j=1}^{n-1} c_j$ angenommen werden.

Es besteht somit kein Unterschied mehr zu den vorweg behandelten, quadratischen, normalen Spline-Funktionen. Die Bedingung $\sum c_j = 0$ widerspricht übrigens auch dem Fehlerverhalten eines Streifens. Wenn x_n nicht das Streifenende ist, so würde jeder extrapoliert behandelte "Aeropunkt" der Photogrammetrie eher auf einer weiter gleich systematisch gekrümmten Fehlerfläche als auf einer linear verlängerten liegen.

17.3 Grundpolynome aus der Familie der Spline-Polynome nach Ahlberg-Kubik.

Streifenausgleichspolynome 7(5) lassen sich auf 2 Arten aus Ahlberg-Kubik'schen Spline-Polynomen aufbauen.

17.3.1 1. Ableitungen kubischer Polynome als Grundpolynome.

In die Gleichungen 7(5) werden für die Grundpolynome der Doppelsummationselemente Funktionen vom Typ 15(5) eingesetzt, nach deren Integration erhält man für den Teil A von 7(5) die Gleichungen 15(3). Für die Nichtdoppelsummationselemente müssen direkt quadratische Polynome 15(12) angesetzt werden. Die Bedingungsgleichungen 15(6) und 15(15) sind anzuwenden. Die Δx in 7(5) werden durch die y_{v-1} aus 15(3) (in der Form 15(1) als Verschiebungsvektor erkennbar) ersetzt. Die Glattheitsbedingung kann wieder auf die 2. Ableitungen von 15(5) und 15(11) beschränkt werden, was einer Minimierung der Krümmungsänderungen der Koordinatenverbesserungsansätze bzw. der Krümmungen der Verläufe der Orientierungselemente entspricht.

S_2, S_3 seien im folgenden die Polynome 2. bzw. 3. Grades, die wir in 7(5) einsetzen:

$$\begin{aligned} -v_x &= S_{3,\Delta x}(x) - yS'_{3,\Delta x}(x) + zS'_{3,\Delta x}(x) - (X-x) \\ -v_y &= S_{3,\Delta y}(x) + yS_{2,my}(x) - zS_{2,\omega}(x) - (Y-y) \\ -v_z &= -S_{3,\Delta z}(x) + yS_{2,\omega}(x) + zS_{2,my}(x) - (Z-z) \end{aligned} \quad 17(9)$$

Als Typenbezeichnung für diesen Ansatz gilt S 22222, da die "Grundpolynome" S_3 und S_2 alle von 2. Grad sind. Die Verbesserungsgleichungen

$$-v = \underline{A} \cdot \underline{u} - \underline{1} \text{ lauten detailliert:} \quad 17(10)$$

$$\begin{aligned} -v_x &= \frac{(x_v - x)^2(2(x - x_{v-1}) + 1)}{1_v^3} y_{v-1,\Delta x} + \frac{(x - x_{v-1})^2(2(x_v - x) + 1)}{1_v^3} y_{v,\Delta x} + \\ &+ \frac{(x_v - x)^2(x - x_{v-1})}{1_v^2} y'_{v-1,\Delta x} - \frac{(x - x_{v-1})^2(x_v - x)}{1_v^2} y'_{v,\Delta x} + \\ &+ \frac{6y(x_v - x)(x - x_{v-1})}{1_v^3} y_{v-1,\Delta y} - \frac{6y(x_v - x)(x - x_{v-1})}{1_v^3} y_{v,\Delta y} + \\ &+ \frac{y(x_v - x)((x_v - x) - 2(x - x_{v-1}))}{1_v^2} y'_{v-1,\Delta y} - \frac{y(x - x_{v-1})(2(x_v - x) - (x - x_{v-1}))}{1_v^2} y'_{v,\Delta y} - \\ &- \frac{6z(x_v - x)(x - x_{v-1})}{1_v^3} y_{v-1,\Delta z} + \frac{6z(x_v - x)(x - x_{v-1})}{1_v^3} y_{v,\Delta z} - \\ &- \frac{z(x_v - x)((x_v - x) - 2(x - x_{v-1}))}{1_v^2} y'_{v-1,\Delta z} + \frac{z(x - x_{v-1})(2(x_v - x) - (x - x_{v-1}))}{1_v^2} y'_{v,\Delta z} - \\ &- (X-x) \\ -v_y &= \frac{(x_v - x)^2(2(x - x_{v-1}) + 1)}{1_v^3} y_{v-1,\Delta y} + \frac{(x - x_{v-1})^2(2(x_v - x) + 1)}{1_v^3} y_{v,\Delta y} + \\ &+ \frac{(x_v - x)^2(x - x_{v-1})}{1_v^2} y'_{v-1,\Delta y} - \frac{(x - x_{v-1})^2(x_v - x)}{1_v^2} y'_{v,\Delta y} + y \cdot \frac{x_v - x}{1_v} \cdot y_{v-1,my} + \\ &+ y \frac{x - x_{v-1}}{1_v} y_{v,my} - y \frac{(x - x_{v-1})}{2} (x_v - x) A_{v,my} - z \frac{x_v - x}{1_v} y_{v-1,\omega} - \\ &- z \frac{x - x_{v-1}}{1_v} y_{v,\omega} + z \frac{(x - x_{v-1})}{2} (x_v - x) A_{v,\omega} - (Y-y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -v_z = & \frac{-(x_v-x)^2(2(x-x_{v-1})+1_v)}{1_v^3} y_{v-1,\Delta z} - \frac{(x-x_{v-1})^2(2(x_v-x)+1_v)}{1_v^3} y_{v,\Delta z} - \\
 & - \frac{(x_v-x)^2(x-x_{v-1})}{1_v^2} y'_{v-1,\Delta z} + \frac{(x-x_{v-1})^2(x_v-x)}{1_v^2} y'_{v,\Delta z} + y \frac{x_v-x}{1_v} y_{v-1,\omega} + \\
 & + y \frac{x-x_{v-1}}{1_v} y_{v,\omega} - y \frac{(x-x_{v-1})}{2} (x_v-x) A_{v,\omega} + z \frac{x_v-x}{1_v} y_{v-1,my} + \\
 & + z \frac{x-x_{v-1}}{1_v} y_{v,my} - z \frac{(x-x_{v-1})}{2} (x_v-x) A_{v,my} - (Z-z)
 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten setzen sich im wesentlichen aus (x_v-x) , $(x-x_{v-1})$ und $(x_v-x_{v-1}) = 1_v$ zusammen und führen zu Produkten, die 1_v^3 nicht bedeutend überschreiten.

Die Bedingungsgleichungen für die inneren Intervallgrenzen x_v , $v = 2(1)n-1$, lauten nach 15(6):

$$\begin{aligned}
 3 \frac{1_{v+1}}{1_v} y_{v-1} + 3 \left(\frac{1_v}{1_{v+1}} - \frac{1_{v+1}}{1_v} \right) y_v - 3 \frac{1_v}{1_{v+1}} y_{v+1} + 1_{v+1} y'_{v-1} + (21_{v+1} + 1_v) y'_v \\
 + 1_v y'_{v+1} = 0
 \end{aligned} \tag{17(11)}$$

oder kürzer:

$$\begin{aligned}
 A_e y_{v-1,e} + B_e y_{v,e} + C_e y_{v+1,e} + D_e y'_{v-1,e} + E_e y'_{v,e} + F_e y'_{v+1,e} = 0 \\
 e = mx, \varphi, \kappa
 \end{aligned}$$

beziehungsweise 15(15):

$$\frac{1}{1_v} y_{v-1} - \left(\frac{1}{1_v} + \frac{1}{1_{v+1}} \right) y_v + \frac{1}{1_{v+1}} y_{v+1} - \frac{1_v}{2} A_v - \frac{1_{v+1}}{2} A_{v+1} = 0 \tag{17(12)}$$

oder kürzer

$$A_e y_{v-1,e} + B_e y_{v,e} + C_e y_{v+1,e} + G_e A_{v,e} + H_e A_{v+1,e} = 0 \quad e = my, \omega$$

Die Glattheitsbedingungen lassen sich analog 17(4) und 17(7) auf folgende Ausdrücke einschränken: ($j = 1(1)n-1$, $v = j+1$, $s = 1(1)S$)

$$\bar{K}_{sej} := S''_{v,se}(x) = \frac{2}{1_v^3} y_{v-1,se} + \frac{1}{1_v} y'_{v-1,se} - \frac{2}{1_v^3} y_{v,se} + \frac{1}{1_v} y'_{v,se}$$

$e = mx, \varphi, \kappa$

$$\bar{K}_{sej} := S''_{v,se}(x) = A_{v,se} \quad e = my, \omega$$

$$\sigma_g \approx \varepsilon_2 \sum_{s=1}^S \sum_{e=1}^E \sum_{j=1}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q_{se} \bar{K}_{sej}^2 dx = \varepsilon_2 \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{e=1}^E q_{se} \bar{K}_{sej}^2 (x_{j+1} - x_j)$$

→ ad Min.

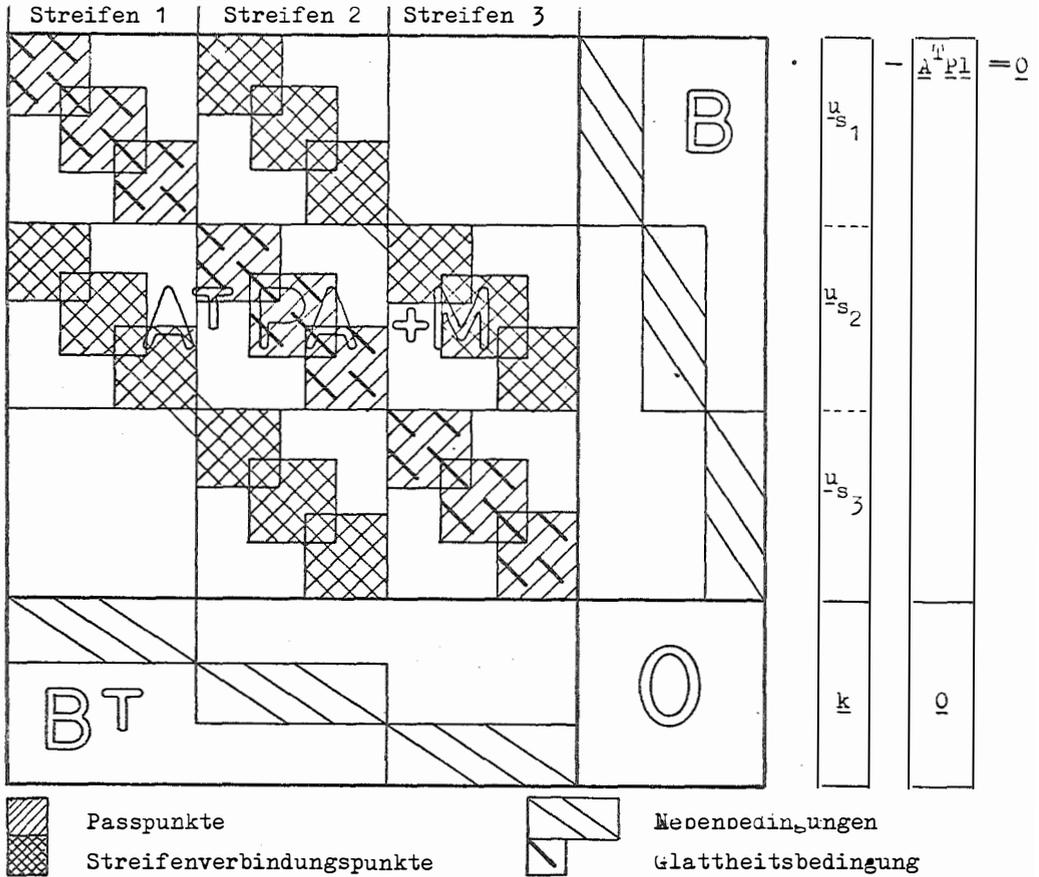


Abb. 17(3): Erweiterte Normalgleichungsmatrix 16(8) für kubische Spline-Polynome nach Ahlberg-Kubik für mehrere Streifen im Parallelstreifen-Blockverband. Typ S 22222, E = 5, n = 4, S = 3.

17.3.2 Quadratische Polynome als Grundpolynome.

Als Grundpolynome werden Spline-Funktionen 15(11) bzw. 15(12) angesetzt. Deren Integration ergibt für den Teil "A" aus 7(5) die Beziehungen 15(16). Für die inneren Intervallgrenzen x_v , $v = 2(1)n-1$, gelten die $(n-2)$ Nebenbedingungen 15(15). Die Glattheitsbedingungen sind sehr einfach:

$$\sigma_g = \xi_2 \sum_{s=1}^S \sum_{e=1}^E q_e \int_{x_1}^{x_n} (S''(x))^2 dx = \xi_2 \sum_{s=1}^S \sum_{e=1}^E q_e \sum_{j=2}^{n_s} A_{sej}^2 (x_{sj} - x_{sj-1}) \quad +)$$

Deren Beitrag zur erweiterten Normalgleichungsmatrix wird

⁺) Hier sei der allgemeinere Fall angedeutet, der die x_{sv} je Streifen im Streifenblock gesondert als x_{sv} , $v = 1(1)n_s$ vorsieht.

$$\frac{\partial \sigma_g}{\partial A_{sej}} = 2g_2 q_e A_{sej} = \text{ad } 0,$$

also ausschliesslich Hauptdiagonalglieder zu den A_{sej} . Kompliziert dagegen wird die Ausgleichung wegen der langen Verbesserungsgleichungen, die jeweils alle Elemente der Vor-Intervalle und des augenblicklich behandelten Intervalles enthalten. Dazu kommen noch die Nebenbedingungen in gleicher Anzahl wie in 17.3.1. Es liegt daher auf der Hand, hier den praktischeren und numerisch vernünftigeren Weg 17.3.1 vorzuziehen.

18. Zur Passpunkt- und Knotenanordnung bei Spline-Streifenausgleichen.

Beide Verfahren sind eine Verallgemeinerung des Types 22222. Die erforderliche Passpunktverteilung längs x kann daher einfach von der Methode "BAEV - TH1 - LANG" abgeleitet werden.

Sei n die Anzahl der gleichmässig über das Intervall (x_1, x_n) verteilten Knoten. Dann existieren $(n-1)$ Intervalle, in denen je ein Polynomialausgleichssystem 3. Grades mit 18 Unbekannten definiert ist. An den $(n-2)$ inneren Knoten bestehen $10(n-2)$ Bedingungsgleichungen für die Uebereinstimmung der Funktionswerte und der 1. Ableitungen für die 5 Grund-Spline-Funktionen, ferner $3(n-2)$ für die Verschiebungsgrössen Δx . Die Anzahl der Freiheitsgrade ist also nur $(n-1) \cdot 18 - (n-2) \cdot 13 = 5n+8$, sodass mindestens $5n+8$ voneinander unabhängige Gleichungen aufzustellen sind. Analog 8.42 werden jedoch mehr Passpunktinformationen benötigt, um die dem mathematischen Ansatz zugrunde liegenden, eigentlichen Elemente tgw und my definieren zu können. Folgt man denselben Ueberlegungen wie nach Tab. 8.42(1), so erhält man die Passpunktmindestanordnungen von Abb. 18(1).

- Sei i Anzahl der Spline-Intervalle (x_{i-1}, x_i)
- n Anzahl der Knoten x_i
- p Anzahl der Passpunktquerschnitte
- m Anzahl der zwischen den p überbrückten Modelle

Für $m \geq 5$ gilt nach Ackermann (Jordan 1972) für photogrammetrische Einzelstreifen (18.2), dass $\sigma_{max} \sim 0,12 \sqrt{m^3} \sigma_0$. Durch Umkehrung bekommt man die maximal zulässige Ueberbrückungsdistanz (in Modelleinheiten):

$$m_{\text{max.zul.}} = 4,1 \sqrt[3]{\left(\frac{\sigma_{\text{max}}}{\sigma_0}\right)^2} \tag{18(1)}$$

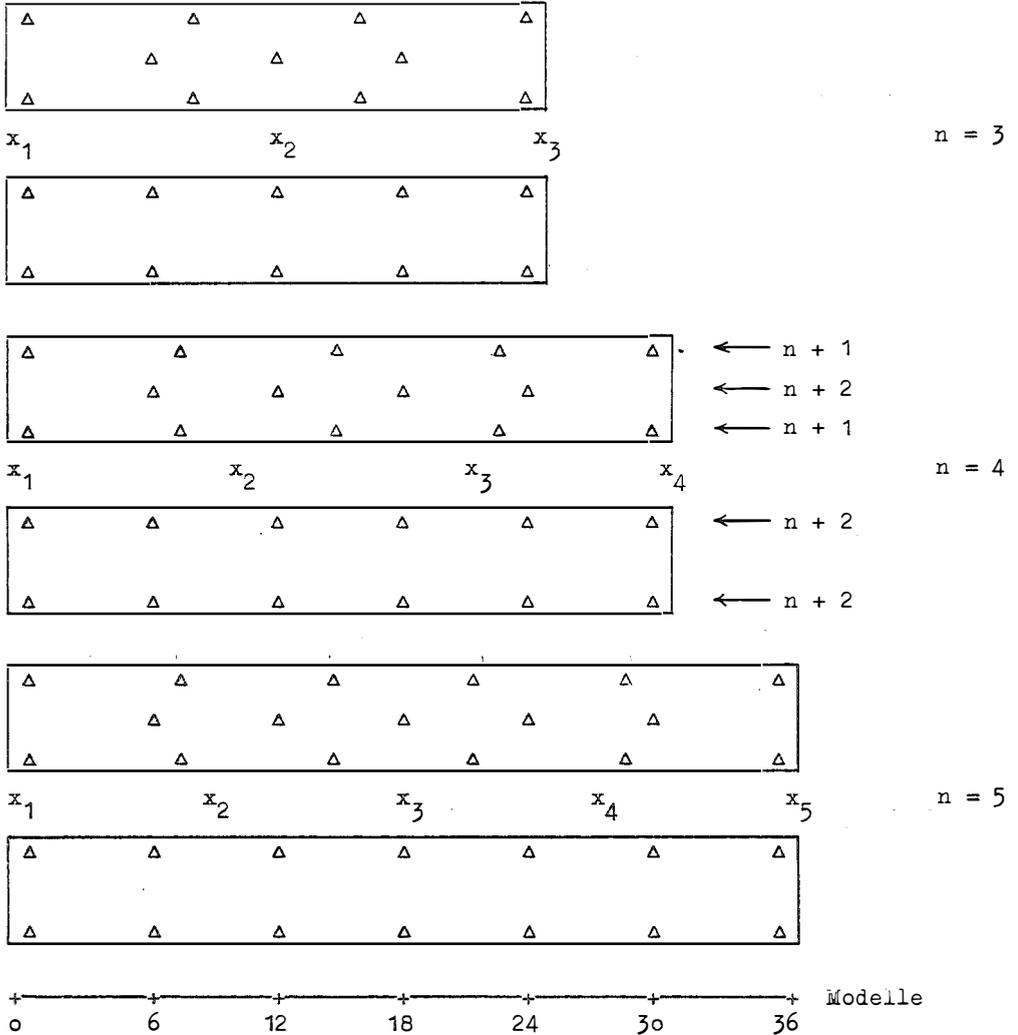


Abb. 18(1): Passpunktmindestanordnung für Splinestreifenausgleiche mit n Knoten x_v ($v = 1(1)n, x_v < x_{v+1}$), sodass $\sigma_{\max} = 2\sigma_0$ für verschiedene Streifenlängen, hier zwischen 24 und 36 Modellen, unverändert bleibt. Δ = Vollpasspunkt, n = Knotenanzahl.

Die jeweils obere Passpunktanordnung sieht für die Doppelsummations-elemente $(n+2)$ Stützstellen in der Streifenachse vor und $(n+1)$ gleichverteilte Stützstellen für die übrigen Elemente. Da ein Passpunkt paar an den einander gegenüberliegenden Streifenrandstellen durch Mittelung auch die nötigen Informationen für die Streifenachse liefert, ist die jeweils untere Passpunktanordnung die praktisch gesuchte Passpunktmindestanordnung mit $2(n+2)$ Punkten.

Sobald $m_{\text{max.zul.}}$ bekannt ist, wird die vorgegebene Streifenlänge durch $b \cdot m_{\text{max.zul.}}$ dividiert, ($b = \text{Basis}$), wodurch man $(p-1)$, die Anzahl der Passpunktintervalle, bekommt, und damit p . Die Anzahl der Knoten $n = p-2$, die der Spline Intervalle $i = p-3$. Wenn man wie früher $m_{\text{max.zul.}} = 6$ annimmt entsprechend $\tilde{\sigma}_{\text{max}} = 2\tilde{\sigma}_0$, lässt sich die Tabelle 18(2) zusammenstellen:

Spline-Intervalle	1	2	3	4	5	6	7
Knoten	2	3	4	5	6	7	8
Passpunktintervalle	3	4	5	6	7	8	9
Passpunktquerschnitte	4	5	6	7	8	9	10
Modellanzahl bis	18	24	30	36	42	48	54
Parameteranzahl	18	23	28	33	38	43	48

Tabelle 18(2) zur Mindest-Passpunktverteilung für $\tilde{\sigma}_{\text{max}} = 2\tilde{\sigma}_0$

Die Anzahl der freien Parameter unserer Spline-Ausgleichspolynome wächst also mit der Streifenlänge fast linear mit, wenn man über die ganze Länge dieselbe Genauigkeit erhalten will, wie beim normalen Polynomialstreifenvergleich. Der numerisch ungünstigere Ausweg zu Polynomen höherer Ordnung, den auch Ackermann 1963(b) und A. Schenk 1971 verurteilen, ist überhaupt nicht notwendig. Die Spline-Streifenvergleich sind für lange Streifen genau so flexibel, wie es der gewohnte und praxisbewährte, normale Polynomialvergleich für kurze Streifen ist.

ABSCHLIESSENDE BETRACHTUNGEN

19. Nachwort und zusammenfassende Bemerkungen zur Streifen- und Streifenblockausgleichung mit Polynomialmethoden.

Es besteht kein Zweifel, dass die Streifentriangulation wesentliche Nachteile gegenüber der Einzelmodell- und Bündeltriangulation aufweist. Jene Methoden sind weit universeller und, falls aufwendig programmiert, an Einfachheit in der praktischen Handhabung allen noch so einfach erscheinenden, insgeheim aber heimtückischen Streifenmethoden überlegen. Wenn man heute, quasi retrospektiv, die Streifentriangulation kritisch durchleuchtet, erkennt man erst richtig den schwierigen Weg, den die Photogrammetrie mit einfachen Rechenhilfen gehen musste, erkennt man leichter, was man besser hätte machen können. Es besteht aber ebenso kein Zweifel, dass die Polynomialmethoden noch eine Zeitspanne von vielleicht zehn oder zwanzig Jahren leben können, bis die Gross-Computerausstattung auf der Welt so selbstverständlich sein wird wie heute das Telephon. Bis dahin sollen sie wenigstens richtig angewendet werden. Das funktionale Modell, das der streifenweisen Aerotriangulation zugrunde liegt, ist einfach. Es ist aber nicht so einfach, dass man zu denken aufhören dürfte. In dieser Arbeit habe ich versucht, einige kritische Probleme der streifenweisen Aerotriangulation zu behandeln, wobei ich bei mancher nebensächlich erscheinenden Frage weit ins Detail gegangen bin, anderes wieder übergangen oder nur gestreift habe. Der Praktiker wird erkennen, warum. Es war auch nicht meine Absicht, ein Lehrbuch der Aerotriangulation zu schreiben. Hier liegt Ausgezeichnetes vor, Besseres ist schon wieder in Vorbereitung. Ich habe lediglich einige Schwerpunkte behandelt, von denen ich meine, dass sie derzeit am wesentlichsten einer Behandlung bedürfen. Die Grundgleichung 7(5) gehört zu diesen. Es sollte versucht werden, klar zu zeigen, auf welchem Fundament die Streifenausgleichung mit Polynomen aufgebaut ist. Beim Vergleich der in Praxis und Literatur angebotenen Polynomialausgleichsmethoden untereinander und mit der Grundgleichung kam ich zu einer übergeordneten Typisierung der Verfahren und zu einer Kritik, die nicht dem Autor des einzelnen Verfahrens gelte, sondern dem, der es unter geänderten Voraussetzungen falsch anbietet oder gar falsch anwendet. Es ist ein Unterschied, ob von der Aerotriangulation nur Punkte zur graphischen Lageeinpassung von ebenen

Modellen mit vorgegebenen Höhen gewünscht werden, oder ob Punkte des österreichischen EP-Netzes in Gebirgsgegenden mit einer Fehlergrenze von $m_p = \pm 7$ cm wirtschaftlich zu bestimmen sind.

Die Abschnitte über die Streifenbildung und Streifenglättung habe ich ausgedehnt, weil ich der Ueberzeugung bin, dass dadurch eine Genauigkeitssteigerung in der Praxis erzielt werden könnte. Die Aerotriangulation kann nicht genauer sein als ihre Streifenkoordinaten. Das Projektionszentrum möge seine ihm beim Modellanschluss zukommende Aufgabe der φ -Uebertragung gut erfüllen. Im übrigen muss jedoch dort optimal gearbeitet werden, wo die Punkte durch Aerotriangulation zu bestimmen sind: Im Modell und dort besonders in den Ecken am Streifenrand.

Die Erkrümmungskorrektur konnte ich nicht übergehen, weil sie in der Praxis unterschätzt wird (Umgekehrt soll man sie auch nicht überschätzen). Aber jeder systematische, wenn auch geringe Druck auf ein grossflächiges (Block-)System führt zu Summationen, die abzufangen nur dann leicht ist, wenn man davon weiss.

Der zweite Teil der Arbeit betrifft vor allem die Flexibilität der Polynomialausgleichsmodelle. Die modernen Einzelmodellausgleiche sollen nicht in unfaire Weise gerade mit leistungsschwachen Polynommethoden verglichen werden. Die Spline-Technik hat die Leistungsfähigkeit der Interpolations- und Approximationsmethoden deutlich erhöht. Darum sind nun auch die photogrammetrischen Streifenausgleichsmethoden auf jenen erhöhten Standard zu bringen, ehe man sie neben den strengeren Einzelmodell- und Bündelausgleichen "verurteilt". Ackermann und Belling, 1963, haben die Spline-Technik für Streifenausgleiche eingeführt, Kubik hat 1971 die Entwicklung mit mehreren Verfahren für ebenes Gelände wieder aufgenommen, die mit dieser Arbeit für beliebiges Gelände fortgesetzt wird. Die Frage nach der mit einem Ausgleichsverfahren möglichen Ueberbrückungsdistanz erscheint nun in der Praxis entsprechenderweise mit den Parametern Streifendefinition, geforderte Genauigkeit, Streifenlänge, Flexibilität, Knoten- und Passpunktverteilung verknüpft. Mit der Spline-Technik werden für Rechenautomaten mittlerer Grösse leistungsfähige Verfahren geboten, die einer weiteren Verbreitung und Verbesserung der Aerotriangulationstechnik dienen mögen. Es wird sich zeigen, dass auch mit den Polynomialmethoden an mittleren und kleinen Rechenanlagen hinreichend gute Ergebnisse erzielbar bleiben.

LITERATURVERZEICHNIS

- Ackermann F. (1961): Ein Verfahren zur programmgesteuerten Ausgleichung von Triangulationsstreifen. B.u.L. 1961, 108-123.
- Ackermann F. (1963a): Zur Entkrümmung von Stereomodellen und Triangulationsstreifen. B.u.L. 1963, 63-69.
- Ackermann F. (1963b): Zur Streifenausgleichung mit Polynomen höheren Grades. B.u.L. 1963, 2-10.
- Ackermann F. (1965): Fehlertheoretische Untersuchungen über die Genauigkeit photogrammetrischer Streifentriangulationen. DGK, C 87.
- Ackermann F. (1973): Testblock Oberschwaben, Program I, Results of block-adjustment by independent models. OEEPE Symposium Brüssel, 1973.
- Ahlberg J.H. - Nilson E.N. - Walsh J.L. (1967): The Theory of Splines and Their Applications. Academic Press New York-London 1967.
- Albertz J. (1966): Blocktriangulation mit Einzelbildern. DGK C-92, 1966.
- Albertz J. - Kreiling W. (1972): Photogrammetrisches Taschenbuch. H. Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1972.
- Arthur D.W.G. (1959): Recent developments in analytical aerial triangulation at the Ordnance Survey. Phot. Record, 1959, 112-123.
- Bauer H. (1973): Dezimetergenaue Höhen durch Aerotriangulation. B.u.L. 1973, 104-107.
- Belling G.E. (1963): On the use of Polynomials and Sections in Analytic Block Adjustment. Thesis ITC Delft, 1963.
- Belzner H. (1973): The planning, establishing and flying of the test-field Oberschwaben. OEEPE Symposium Brüssel, 1973.
- Bormann G. (1968): Geometrisch-statische Tests für Analog-Auswertegeräte. Presented Paper, International Archives of Photogrammetry, Lausanne 1968.
- Bormann G. - Hasler A. (1972): Tests für Analogauswertegeräte. Presented Paper, International Archives of Photogrammetry, Ottawa 1972.
- Brandstätter G. (1966): Eine einfache vektorielle Herleitung räumlicher Orientierungsmatrizen. OeZV 1966, 137-145.
- Brandstätter G. (1968): Ein Beitrag zur Orientierung von Satellitenbeobachtungskammern. OeZV 1968, 202-207.
- Breyer E. (1972): "Ausgleichung photogrammetrischer Streifen". Diplomarbeit T.H. Wien, Fakultät Naturwissenschaften, 1972.
- Brucklacher W. (1959): Zur räumlichen Aerotriangulation von Bildstreifen. DGK A/34/I., München 1959.

- Burkhardt R. (1968): Standardtests für photogrammetrische Auswertegeräte. Invited Paper, International Archives of Photogrammetry, Lausanne 1968.
- Döhler M. - Wolferts K. (1968): Neue Prüfverfahren für Anlagen zur digitalen Datenausgabe. Presented Paper, International Archives of Photogrammetry, Lausanne 1968.
- Döhler M. (1972): Standardtests für photogrammetrische Auswertegeräte, Invited Paper, International Archives of Photogrammetry, Ottawa 1972.
- Ebner H. (1973): Comparison of different methods of block adjustment. OEEPE Symposium Brüssel 1973.
- Ebner H. (1971): Genauigkeitserwartungen photogrammetrischer Blöcke mit grossen Punktmengen. NKV Reihe I/53, S.51-70.
- Finsterwalder R. - Hofmann W. (1968): Photogrammetrie. Walter de Gruyter Verlag, Berlin 1968.
- Finsterwalder Rüd. (1963): Die Berücksichtigung der Erdkrümmung bei der photogrammetrischen Auswertung. ZfV 1963, 190-196.
- Förstner R. (1964): Errors of model connection in aerial triangulation. Symposium on aerial triangulation. Photogrammetria 1962-1964, 419-425.
- Gotthardt E. (1967): Vermittelnde Ausgleichung mit zusätzlichen Minimumsbedingungen für Funktionen der Unbekannten. ZfV 1967, 11-17.
- Gotthardt E. (1968): Einführung in die Ausgleichsrechnung. H. Wichmann Verlag, Karlsruhe 1968.
- Greville T.N.E. et alii (1969): Theory and Applications of Spline Functions. Academic Press, New York, 1969.
- Gruber O.v. (1935): Beitrag zu Theorie und Praxis von Aeropolygonierung und Aeronivellement. B.u.L. 1935, 127-141 und 167-190.
- Halwax F. (1961): Eine Methode für die rechnerische Ausgleichung von Aerotriangulationen. Dissertation T.H. Wien. Kürzere Fassung in OeZV 1962, 81-96.
- Jahn J. (1972): Spline Funktionen und deren Anwendung bei der Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Diplomarbeit T.H. Wien, Fakultät Naturwissenschaften, 1972/73.
- Jerie H.G. (1960): Weitere Analogien zwischen Aufgaben der Mechanik und der Ausgleichsrechnung. Sonderveröffentlichung Nr. 20 der OeZV, Wien, 1960.
- Jordan (1972): siehe Rinner K. - Burkhardt R.

- Kubik K. - Kure J. (1971): ISP-investigation into the accuracy of photogrammetric triangulation. Intermediate report.
- Kubik K. - Kure J. (1972): ISP-investigation into the accuracy of photogrammetric triangulation. Invited Paper. International Archives of Photogrammetry, Ottawa 1972.
- Kubik K. (1971a): Efficient methods for strip- und block adjustment. Data Processing Department, Rijkswaterstaat, Den Haag.
- Kubik K. et alii (1971b): The application of piecewise polynomials to problems of curve approximation. Rijswaterstaat Communications Nr. 12, Den Haag 1971.
- Makarovic B. (1964): Dynamic performance of photogrammetric plotting instruments. ITC Publications A 35, Delft 1964.
- Makarovic B. (1968): Conduction of partial performance tests for comparators. Presented Paper. International Archives of Photogrammetry, Lausanne 1968.
- Makarovic B. (1968): Considerations on performance tests of comparators. Presented Paper. International Archives of Photogrammetry, Lausanne 1968.
- Mark R.P. (1968): Vorschläge zur einheitlichen Bewertung der geometrischen Qualität von Stereokomparatoren. Presented Paper. International Archives of Photogrammetry, Lausanne 1968.
- Mark R.P. (1972): Tests für Mono- und Stereokomparatoren, Variante A. Presented Paper. International Archives of Photogrammetry, Ottawa 1972.
- Maršik Z. (1972): Die Aerotriangulation mit unabhängigen Modellen. Jenaer Rundschau 1972, 109-114.
- Mohl H. (1970): Vergleichende fehlertheoretische Untersuchungen über die Genauigkeit verschiedener Verfahren der photogrammetrischen Streifentriangulation. DGK C 149, München 1970.
- Müller B.G. (1963): Betrachtungen und Untersuchungen zur blockweisen Aerotriangulation. Dissertation. Veröffentlichungen des Geodätischen Instituts der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen Nr. 5.
- Neumaier K. (1960): Vorlesungen zur Photogrammetrie an der T.H. Wien. Skriptum. Im Eigenverlag des Institutes für Allgemeine Geodäsie, Wien 1960.
- Neumaier K. (1965): Vorlesungen zur Photogrammetrie. Oesterreichische Hochschülerschaft, T.H. Wien 1965.

- Nowatzky F. (1940): Bildtriangulation zur Bestimmung von Passpunkten. Mitteilungen des Reichsamtes für Landesaufnahme Berlin, 1940, 47-68.
- Otepka G. (1973): Untersuchung über die Einsatzmöglichkeit der Blockausgleichung in Oesterreich. Manuskript. T.H. Wien, 1973.
- Rinner K. (1957): Ueber räumliche Drehungen. DGK A 25, München 1957.
- Rinner K. (1959): Einfluss der Definition der Landes-Koordinaten auf die photogrammetrische Triangulation. DGK A 34/II, München 1959.
- Rinner K. - Burkhardt R. (1972): Jordan - Eggert - Kneissl, Handbuch der Vermessungskunde, 10. Auflage, Band IIIa/3, Photogrammetrie, Metzler'sche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart 1972.
- Roelofs R. (1949): Erreurs systématiques ou accidentelles? Phia.1949, 29-38.
- Schenk A. (1971): Nochmals: Darstellung von Verzeichnungscurven mittels Potenzreihen. B.u.L. 1971, 127-130.
- Schenk A. (1972): Numerische Untersuchungen zur photogrammetrischen Blocktriangulation nach der Bündelmethode. Mitteilungen des Institutes für Geodäsie und Photogrammetrie der E.T.H. Zürich Nr. 16, Zürich 1972.
- Schermerhorn W. - Neumaier K. (1939): Systematische Fehler bei der Aerotriangulation. Phia.Band 2, 1939, 160-169.
- Schermerhorn W. (1940): Experience with aerial triangulation. Phia.1940, 22-23.
- Schmid H. (1949): Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung von Luftbildern und Aerotriangulation. Dissertation T.H. Wien 1949.
- Schmid P. (1973): Programm für Einzelmodell-aerotriangulation an der Mittleren Datenverarbeitungsanlage Philips P 352. Diplomarbeit (Manuskript) T.H. Wien, Fakultät für Naturwissenschaften, 1973.
- Schoenberg, I.J. (1964): Spline-functions and the problem of graduation. Proceedings National Academy of Sciences, USA, 1964, 947-950.
- Schoenberg I.J. - Whitney A. (1953): On pólya frequency functions. Trans. Amer. Math. Soc. 1953, 246-259.
- Schürer K. (1972): Tests für Mono- und Stereokomparatoren, Variante B. Presented Paper. International Archives of Photogrammetry, Ottawa 1972.
- Schut G.H. (1961): Transformation et ajustement des coordonnées d'une bande par calcul électronique. Canadian Surveyor 1961, 574-580.
- Schut G.H. (1964): Development of programs for strip- and block-adjustment at the National Research Council of Canada. P.E. 1964, 283-291.

- Schut G.H. (1966): Polynomial transformation of strips versus linear transformation of models: A theory and experiments. International Symposium on Spatial Aerotriangulation, University of Illinois, Urbana, 1966.
- Schwidefsky K. (1963): Grundriss der Photogrammetrie. 6.Auflage, Teubner Verlag, Stuttgart, 1963.
- Solaini L. - Trombetti C. (1961): Bericht über die Ergebnisse der für die Kommission A der OEEPE bis Januar 1960 ausgeführten Triangulationen und Ausgleichungen. Phia.1960-61, 119-188.
- Stark E. (1970): Die Einbeziehung geodätischer Strecken- und Azimutmessungen in die Punktbestimmung durch photogrammetrische Blocktriangulation. AVN 1970, 318-328.
- Stark E. (1973): Testblock Oberschwaben, Programm I, Results of strip adjustments. OEEPE Symposium Brüssel 1973.
- Stephani M. (1972): Zur Verwendung von Höhendifferenzen in einer Zweistufenausgleichung mit Modellen. B.u.L. 1972, 78-83.
- Stetter H.J. (1969): Numerische Mathematik (1. und 2. Teil), Skriptenverlag der OeH, T.H. Wien, Wien 1969.
- Töppler J. (1972): Ein praktisches Verfahren zur Modelltriangulation am Stereometrograph von Jena. Jenaer Rundschau 1972, 298-302.
- Vermeir P.A. (1954): La triangulation aeriene. Propagation des erreurs et compensation. Bulletin de la Société Belge de Photogrammétrie, S.17-57.
- Waldhäusl P. (1964): Zur praktischen Behandlung von Anschlussdifferenzen bei Aerotriangulationen. OeZV 1964, 94-98.
- Waldhäusl P. (1968): Beitrag zur Untersuchung systematischer Fehler der Aerotriangulation. Dissertation. T.H. Wien 1968.
- Waldhäusl P. (1968): Ein dynamisches Prüfverfahren für Kartiergeräte. Presented Paper. International Archives of Photogrammetry, Lausanne 1968.
- Waldhäusl P. (1972): Streifentriangulation in Praxis und Unterricht. Probevortrag an der T.U. Braunschweig, 3.5.1972.
- Waldhäusl P. - Breyer E. (1973): Allgemeine Tendenz und praktische Möglichkeiten der Aerotriangulation am Institut für Photogrammetrie der Technischen Hochschule Wien. Vortrag an der T.H. Wien, 14.3.1973.
- Weele A.J. v.d. (1953): Adjustment of aerial triangulation. Phia.1953/54, 58-67.

- Wiser P. (1972): Rapport sur l'essai "Couples independants". OEEPE-Commission A/B. Liege, 1972.
- Wolf H. (1968): Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. F. Dümmers Verlag, Bonn 1968.
- Wong K.W. - Elphingstone G. (1972): Aerotriangulation by SAPGO. P.E. 1972, 779-790.
- Zarzycki J.M. (1949): Graphische Interpolationsausgleichung eines Doppelstreifens. S.Z.V. 1949, 177-184.

Bedeutung der Abkürzungen:

- AVN Allgemeine Vermessungsnachrichten
- BuL Bildmessung und Luftbildwesen
- DGK Veröffentlichungen der Deutschen Geodätischen Kommission
- NKV Nachrichten der Kataster- und Vermessungsverwaltung
- OeZV Oesterreichische Zeitschrift für Vermessungswesen
- P.E. Photogrammetric Engineering
- Phia Photogrammetria
- P.R. Photogrammetric Record
- SZV Schweizer Zeitschrift für Vermessungswesen
- ZfV Deutsche Zeitschrift für Vermessungswesen.

A N H A N G

Anhang zu 8.2 /1

Beweis der Uebereinstimmung der beiden Formeln 8(7) und 8(9) für die Kugel:

$$\text{Sei } \text{Pol}_\varphi(x) := a_\varphi + b_\varphi x + c_\varphi x^2$$

Mit $\Delta z_0 = 0$, da das Anfangsmodell absolut orientiert sei,

$$a_\varphi = 0, \text{ da die } x\text{-Achse die Tangente in } 0 \text{ ist,}$$

$$c_\varphi = 0, \text{ da die Krümmung bei der Kugel konstant ist,}$$

$$-b_\varphi = \frac{1}{R} \text{ ist die Krümmung selbst mit Berücksichtigung des Dreh-} \\ \text{sinnes von } \varphi,$$

$$\text{wird } \text{Pol}_\varphi(x) = b_\varphi x$$

$$\Delta z = \Delta z_0 - a_\varphi x - b_\varphi \frac{x^2}{2} - c_\varphi \frac{x^3}{3} = -b_\varphi \frac{x^2}{2} = + \frac{x^2}{2R}$$

$$\text{Da } H \doteq z + \Delta z = z + \frac{x^2}{2R}$$

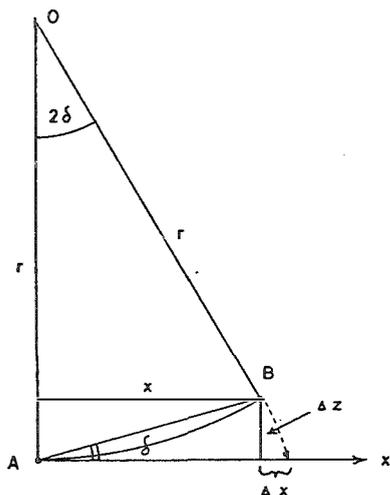
$$\Delta x_T = (z + \Delta z) \text{Pol}_\varphi(x) = + \left(z + \frac{x^2}{2R} \right) \cdot b_\varphi \cdot x$$

$$\Delta x_A = \frac{1}{2} \int_0^x b_\varphi^2 x^2 dx = b_\varphi^2 \frac{x^3}{6}$$

$$\Delta x = - \frac{zx}{R} - \frac{x^3}{2R^2} + \frac{x^3}{6R^2} = - \frac{zx}{R} - \frac{x^3}{3R^2} = 8(9) \quad \text{q.e.d.}$$

Anhang zu 8.2 /2

Abrollkorrektur nach W. Brucklacher, 1959.



$$\text{Bogen } \widehat{AB} = r2\delta$$

$$x = r \sin 2\delta$$

$$\Delta x := r(2\delta - \sin 2\delta)$$

$$\delta = \arctan \frac{\Delta z}{x} \doteq \frac{\Delta z}{x} - \frac{\Delta z^3}{3x^3}$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{2\delta - \sin 2\delta}{\sin 2\delta}$$

$$\Delta x = -x \left(1 - \frac{2\delta}{\sin 2\delta} \right)$$

$$\sin 2\delta = 2\delta - \frac{8\delta^3}{6} = 2\delta \left(1 - \frac{2\delta^2}{3} \right)$$

$$\Delta x = -x \left(1 - 1 - \frac{2}{3} \delta^2 \right) =$$

$$\Delta x \doteq \frac{2}{3} \frac{\Delta z^2}{x}$$

Diese Abrollkorrektur setzt voraus, dass das Anfangsmodell absolut orientiert war, dass also das photogrammetrische Streifensystem in einer Tangentialebene beim Streifenanfang liegt und dass \widehat{AB} ein Kreisbogen ist. Beide Voraussetzungen sind aber in der Praxis nicht erfüllt.

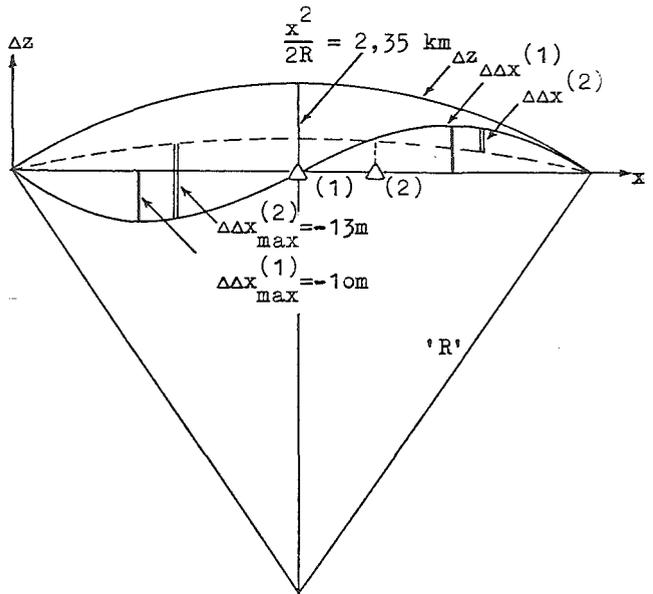
Anhang zu 8.2.2.

Zwei Zahlenbeispiele zur Abrollkorrektur:

1. Für einen langen Streifen von 51 Modellen, $M_b = 1:80.000$, $b = 7$ km, $b' \sim 10^5 \mu\text{m}$ folgt genähert für die Kugel: (L = Streifenlänge)

$$\Delta\varphi^c = \frac{x}{R} \varphi^c = x \text{ (km)} \quad \Delta x = \int_0^x \sqrt{1 + \Delta z'^2} dx \quad \Delta\Delta x = \Delta x(x) - \frac{x}{L} \Delta x(L)$$

Modell - Nummer	$\Delta\varphi^c$	Δx (μm)	$\Delta\Delta x$ (μm)
0	+175	0	0
2	161	73	- 47
4	147	134	82
6	133	184	105
8	119	226	121
10	105	258	127
12	91	284	127
14	77	303	120
16	63	316	106
18	49	325	89
20	35	330	68
22	21	333	45
24	+ 7	334	- 20
26	- 7	334	0
28	21	334	+ 20
30	35	335	45
32	49	338	68
34	63	343	89
36	77	352	106
38	91	365	120
40	105	384	127
42	119	410	127
44	133	442	121
46	147	484	105
48	161	534	82
50	-175	595	+ 47
		668 ==>	0



Ein lineares Polynom erfasst die Abrollkorrektur Δx bis auf die Restfehler $\Delta\Delta x^{(1)}$, die bei einem 350 km langen Streifen ± 10 m (= 10-fache Messgenauigkeit) nach dem 1. bzw. 3. Streifenviertel betragen. Ein quadratisches Polynom hinterlässt dieselben ($\Delta\Delta x^{(1)}$) oder grössere, systematische Restfehler ($\Delta\Delta x^{(2)}$), falls die mittlere Passpunktgruppe nicht in der Streifenmitte liegt. $\Delta\Delta x$ wird = 0 oder vernachlässigbar klein, wenn x kubisch mit 4 gleichverteilten Passpunkten ausgeglichen wird.

2. Abschätzung der Abrollkorrektur Δx_E für frei aerotriangulierte Streifen mit absolut orientiertem Anfangsmodell.

$$8(9) \rightarrow \xi = R \arctan \frac{x}{R+z} = R \left(\frac{x}{R+z} - \frac{x^3}{3(R+z)^3} + \frac{x^5}{5(R+z)^5} - \dots \right) =$$

$$\xi = \frac{Rx}{R+z} \left(1 - \frac{x^2}{3(R+z)^2} + \frac{x^4}{5(R+z)^4} - \dots \right) =$$

$$\xi = x \left(1 - \frac{z}{R} \right) \left(1 - \frac{x^2}{3R^2} \right) = x - \left(\frac{x^3}{3R} + \frac{xz}{R} \right) = x - \Delta x_1 - \Delta x_2$$

Für ebenes Gelände ist $z = -\frac{x^2}{2R}$ und daher

$$\xi = x + \frac{x^3}{6R^2} = x + \Delta x_A$$

$$8(10) \rightarrow H = \frac{1}{\cos \alpha} \left(z + R(1 - \cos \alpha) \right) = \dots = z + \frac{x^2}{2R} \left(1 - \frac{z}{R} \right) =$$

$$H = z + \frac{x^2}{2R} - \frac{x^2 z}{2R^2} = z + \Delta z_1 - \Delta z_2$$

Um eine Vorstellung von der Grösse der Korrekturglieder zu bekommen, stellen wir sie tabellarisch für einige praktische Grössen x bzw. z zusammen:

Bspl. Nr.	1	2	3	4	5
x	11 km	23 km	50 km	1 km	1 km
$\Delta x_1 = 2\Delta x_A$	1 cm	1 dm	1 m	-	-
Δz_1	10 m	42 m	196 m	8 cm	8 cm
H	3 km	3 km	3 km	64 m	1,6 km
Δx_2	2,6 m	5,4 m	11 m	1 cm	25 cm
Δz_2	-	-	(4 cm)	-	-

- Ergebnis: 1) Δx_2 ist wesentlicher als Δx_1 (Bspl. 1-5)
 2) Schon geringe Höhen H bzw. z verursachen Δx_2 (Bspl. 4)
 3) Projektionszentren werden wesentlich durch Δx_2 verschoben (Bspl. 5)
 4) Δx_1 übersteigt erst bei grossen x die Grenze der Messbarkeit (Bspl. 1-3)
 5) Δz_2 spielt keine Rolle.

Anhang zu 18

Zur Anzahl der Freiheitsgrade beim Ausgleich eines Streifenblockes.

An Hand eines Blockbeispielles sei demonstriert, um wieviel die Anzahl der freien Parameter bei Spline-Streifenausgleichen grösser ist als bei gewöhnlichen Polynomialausgleichen. Der Block umfasse 10 Streifen zu je 30 Modellen. Es werden drei Fälle behandelt: Ausgleich mit Typ S 22222, Fall A mit 4 Knoten, Fall B mit 3 Knoten; Ausgleich mit Typ 22222, Fall C.

Str.Nr.	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Passpunkte:
1			o			o			o			o	+	Δ	Δ=Voll-PP. 50	
2	Δ		o			o			o			o		Δ	o=Höhen-PP. 36	
3	Δ	+	o			o			o			o		Δ	+ =Alt-PP. 10	
4	Δ		o	+		o			o			o	+	Δ	Verbesserungs- gleichungen: v _p 216 v _{SV} 540 zusammen 756	
5	Δ		o			o			o			o		Δ		
6	Δ		o			o			o	+		o		Δ		
7	Δ		o			o			o			o		Δ		
8	Δ		o			o			o			o	+	Δ		
9	Δ		o			o			o			o		Δ		
10	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ		Unbekannte:
Fall A	x ₁				x ₂				x ₃				x ₄	... 280		
Fall B	x ₁						x ₂						x ₃	... 230		
Fall C	x ₁												x ₂	... 180		

Dividiert man die grösste Anzahl der Modelle, die im Block pro Streifen vorkommt, durch die Anzahl der Parameter pro Streifen, so erhält man im Fall A 1,1, im Fall B 1,3, im Fall C 1,6. Ackermann hat gezeigt, dass funktional einwandfreie Polynomialausgleiche bei einer Genauigkeitsforderung von $\sigma_{max} = 2\sigma_0$ ein Modell/Parameter - Verhältnis von 1,2 haben. Seine Untersuchungen bewiesen ferner, dass gute Polynomialausgleiche für Einzelstreifen praktisch gleich leistungsfähig sind wie die strenge Streifenausgleichung nach Vermeir-Ackermann. Die obigen Modell/Parameter - Verhältnisse lassen daher erwarten, dass die SplinePolynomausgleiche deutlich höhere Genauigkeitsleistungen erbringen als die gewöhnlichen Polynomialausgleiche.

Anhang zu 18 /2.

Zur Flexibilität von Spline Funktionen:

Zur Demonstration der besseren Flexibilität der Spline-Funktionen wurden sechs Beispiele durchgerechnet, wobei jeweils dieselben Höhenfehler Δz eines Streifens von 19 Modellen Länge, Bildmasstab 1:30 000, A 7 - Maschinenmasstab 1:10 000, verwendet wurden:

- I Spline-Interpolation mit minimaler Passpunktanzahl (4 - 7).
- II Spline-Ausgleichung mit allen 20 Passpunkten.

Jeweils wurden 3 Fälle unterschieden:

$$A \quad v = -\Delta z + \Delta z_0 + a(x-x_1) + b(x-x_1)^2 + c_1(x-x_1)_+^3$$

$$B \quad v = -\Delta z + \Delta z_0 + a(x-x_1) + b(x-x_1)^2 + c_1(x-x_1)_+^3 + c_3(x-x_3)_+^3$$

$$C \quad v = -\Delta z + \Delta z_0 + a(x-x_1) + b(x-x_1)^2 + c_1(x-x_1)_+^3 + c_2(x-x_2)_+^3 + c_3(x-x_3)_+^3 + c_4(x-x_4)_+^3$$

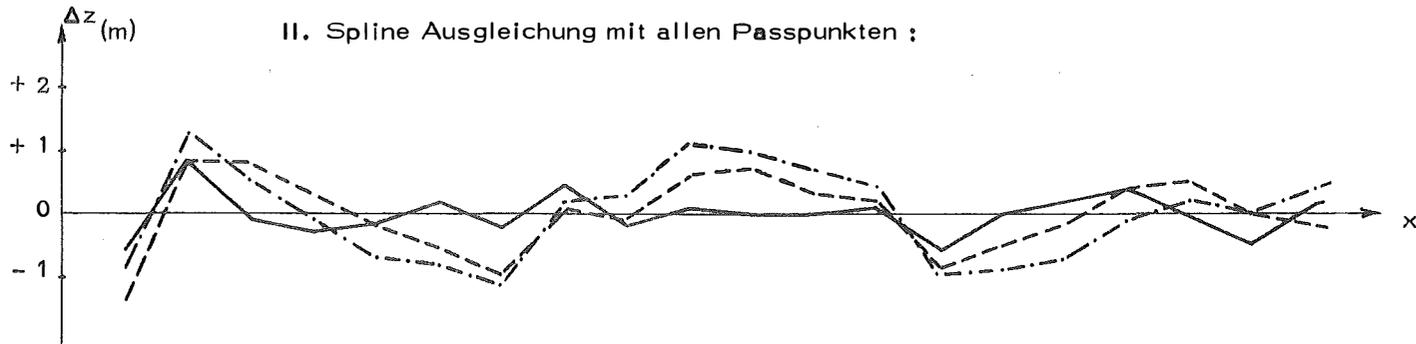
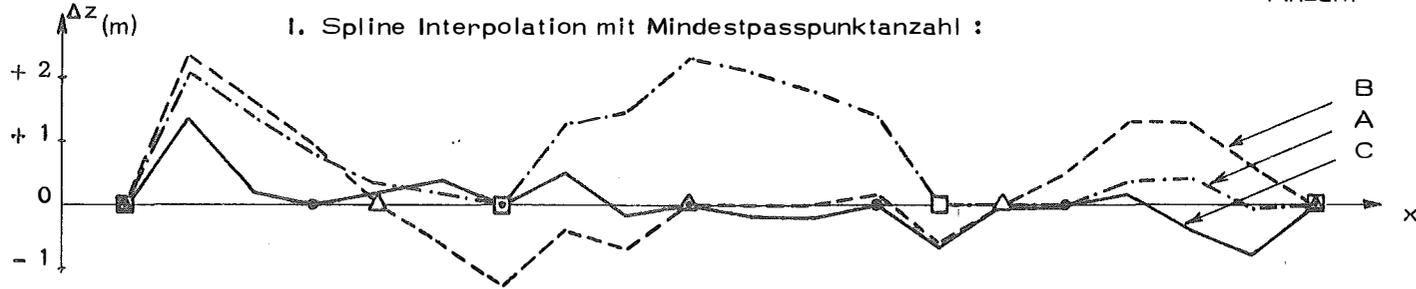
Das Ergebnis zeigt das wesentlich günstigere Verhalten der Spline-Funktionen (B,C) gegenüber dem des weniger flexiblen, gewöhnlichen, kubischen Polynoms (A). Die nachfolgende Tabelle zeigt die Quadratsummen der Restverbesserungen [vv].

	I	II
A	26,3	10,6
B	16,6	7,2
C	4,0	2,6

Die Abbildungen auf der nächsten Seite geben die Restverbesserungen selbst wieder. Man erkennt, dass trotz Erhöhung der Passpunktanzahl von 4 auf 20 (Fälle IA \rightarrow IIA) kaum eine Änderung der Form der Restverbesserungskurve erreicht wird. Das kubische Polynom ist nicht flexibel genug. Mit IC (7 Passpunkte, Spline-Ausgleich) erzielt man ein besseres Ergebnis als mit IIA (20 Passpunkte, gewöhnliches Polynom).

Abbildungen zu Anhang 10/2 : (Erklärung im Text)

Fall	A	B	C
Passpunkte	□	△	●
Anzahl	4	5	7



x_1 x_2 x_3 x_4 x_6

ABC C BC C ABC

} Knoten

S u m m a r y

The functional model of the correction-polynomials for aerial triangulation is rigidly derived from the rotation matrix. That is necessary in order to know about the negligences in the formula, which is valid for rotations smaller than 30° only. Bigger values cause systematic 'numerical deformations' of the strips. Other basic conditions for polynomial adjustments are well smoothed strips. The strip smoothing methods are discussed. Strip formation can be done also without projection centres using for the φ - and κ -transfer monocularly measured cross- or natural points in the yz-plane of connection, measured in two stories, and for the remaining transfer elements the stereoscopically measured model points.

Earth curvature is treated for the cross direction with the radius of the sphere, for x-direction no radius must be known. For blocks earth curvature correction should be applied to the terrestrial coordinates of the control points using the Rinner formulae.

The powers of the so-called basic polynomials, which describe the behaviour of the orientation elements of the strip, allow for a classification of the existing strip adjustment formulae with polynomials. Ten 'methods' are compared and thoroughly discussed. For each of the formulae the necessary minimum ground control distribution is shown. The widely used 'twin-polygon' requires special type polynomials.

After an introduction into the theory of spline-interpolation, approximation and adjustment the formulae are given which may be used as basic polynomials for strip adjustment: Spline functions as truncated power functions or as Hermite-Polynomials as used by Ahlberg and Kubik. For the adjustment of strips and strip-blocks standard problem II is combined with condition equations for the knots and with additional minimum conditions for the smoothness of the strips. The smoothness condition is defined as the second derivative of the basic polynomials, that is equivalent to the third derivative of the correction polynomials. Some examples prove that the flexibility of the strip adjustment formulae with splines gets independent of strip length thus assuring that the strip adjustment formulae do not any more influence the results by its stiffness.

Single model adjustment and bundle adjustment do not require that much knowledges, they are simpler and more rigid. But smaller computers still ask for polynomial adjustment which should be used correctly and which require much more care than widely expected.

Z u s a m m e n f a s s u n g

Das funktionale Modell der Verbesserungspolynome für die Aerotriangulation wird aus der Drehmatrix hergeleitet. Das ist notwendig, um die Vernachlässigungen im Formelapparat zu kennen, der nur für Drehungen kleiner als 30° gilt. Grössere Werte verursachen systematische, numerische Deformationen der Streifen. Andere Grundvoraussetzungen für Polynomialausgleiche sind gut geglättete Streifen. Die Streifenglättungsmethoden werden diskutiert. Die Streifenbildung kann auch ohne Projektionszentren durchgeführt werden, indem man für den φ - und κ -Übertrag monokular gemessene (Kreuz- oder Natur-) Punkte verwendet, während man für die Bestimmung der übrigen Übertragungselemente die stereoskopisch gemessenen Modellpunkte heranzieht.

Die Erdkrümmung wird für die Streifenquerrichtung mit dem Erdkugelradius behandelt, für die Streifenrichtung muss kein Krümmungsradius bekannt sein. Bei Blöcken sollte die Erdkrümmung an die terrestrischen Koordinaten der Passpunkte angebracht werden, wobei man nach Rinner vorgeht. Die Grade der sogenannten Grundpolynome, die den Verlauf der Orientierungselemente im Streifen beschreiben, erlauben eine Typisierung der existierenden Streifenausgleichsformeln mit Polynomen. Zehn 'Methoden' werden verglichen und gründlich durchdiskutiert. Für jede Formel wird die erforderliche Mindestpasspunktverteilung angegeben. Das häufig angewandte 'Doppelpolygon' verlangt Polynome speziellen Typs.

Nach einer Einführung in die Theorie der Spline-Interpolation, -Approximation und -Ausgleichung werden Formeln angegeben, die als Grundpolynome für Streifenausgleichungen verwendet werden können: Spline-Funktionen als abgehackte Potenzfunktionen oder als Hermite-Polynome, wie sie von Ahlberg und Kubik verwendet werden. Die Ausgleichung erfolgt nach vermittelnden Beobachtungen mit zusätzlichen Nebenbedingungen für die Knoten und zusätzlichen Minimumbedingungen für die Glattheit der Streifen. Die Glattheitsbedingung wird als 2. Ableitung der Grundpolynome definiert, was der 3. Ableitung der Verbesserungspolynome entspricht. Einige Beispiele belegen, dass die Flexibilität der Splinestreifenausgleichsformeln von der Streifenlänge unabhängig wird, sodass die Formel nicht mehr durch die ihr innewohnende Steifheit die Ergebnisse beeinflusst.

Einzelmodell- und Bündelausgleich verlangen vom Praktiker nicht so viele Kenntnisse, sie sind einfacher und strenger. Aber die kleineren Computer drängen immer noch zum Polynomialausgleich, der richtig angewandt werden sollte und mehr Sorgfalt verlangt, als man weithin annimmt.

D a n k

An allererster Stelle danke ich Herrn Honorarprofessor Ing. Dr. techn. h. c. Karl N e u m a i e r für die während fast 20 Jahren gewährte Möglichkeit eingehender Fachdiskussionen, für sein menschliches Verständnis und Entgegenkommen sowie seine stete Unterstützung. Im Zusammenhang mit dieser Arbeit sei vor allem meinen Freunden und Kollegen am Institut für Photogrammetrie gedankt; Herrn Dipl.-Ing. Gottfried O t e p k a und Herrn Dipl.-Ing. Josef J a h n sowie Herrn Josef T s c h a n n e r l und Frau Theresia N e u m e i s t e r , die mich bei der Durchsicht des Manuskriptes, bei vielen Diskussionen, beziehungsweise bei der Herstellung der Zeichnungen und Vervielfältigungen unterstützten.

Herzlich danke ich meiner Frau, die mir trotz der Sorgen um Haushalt und unsere drei Kinder auch noch die Reinschrift schrieb.

Adresse des Verfassers: Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Waldhäusl
Institut für Photogrammetrie
Technische Hochschule Wien
Karlsplatz 13
A - 1040 Wien

Österreichischer Verein für Vermessungswesen und Photogrammetrie

Friedrich-Schmidt-Platz 3, 1082 Wien

Sonderhefte zur Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie

- Sonderheft 20: H. G. Jerie, *Weitere Analogien zwischen Aufgaben der Mechanik und der Ausgleichsrechnung*. 24 Seiten mit 14 Abbildungen, 1960. Preis S 32,— (DM 5,50).
- Sonderheft 21: Mader, *Die zweiten Ableitungen des Newton'schen Potentials eines Kugelsegments — Topographisch berechnete partielle Geoidhebungen. — Tabellen zur Berechnung der Gravitation unendlicher, plattenförmiger, prismatischer Körper*. 36 Seiten mit 11 Abbildungen, 1960. Preis S 42,— (DM 7,50).
- Sonderheft 22: Moritz, *Fehlertheorie der Graphisch-Mechanischen Integration — Grundzüge einer allgemeinen Fehlertheorie im Funktionenraum*. 53 Seiten mit 6 Abbildungen, 1961. Preis S 52,— (DM 9,—)
- Sonderheft 23: Rinner, *Studien über eine allgemeine, voraussetzungslose Lösung des Folgebildanschlusses*. 44 Seiten, 1960. Preis S 48,— (DM 8,—)
- Sonderheft 24: *Hundertjahrfeier der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung 23. bis 25. Oktober 1963*. 125 Seiten mit 12 Abbildungen, 1964. Preis S 120,— (DM 20,—)
- Sonderheft 25: *Proceedings of the International Symposium Figure of the Earth and Refraction; Vienna, March 14th—17th, 1967*. 342 Seiten mit 150 Abbildungen, 1967. Preis S 370,— (DM 64,—).
- Sonderheft 26: Waldhäusl, *Funktionale Modelle der Streifen- und Streifenblockausgleichungen mit einfachen und Spline-Polynomen für beliebiges Gelände, 1973*. Preis S 100,— (DM 15,—)

OEEPE, Sonderveröffentlichungen

- Nr. 1: Rinner, *Analytisch-photogrammetrische Triangulation eines Teststreifens der OEEPE*. 31 Seiten, 1962. Preis S 42,—.
- Nr. 2: Neumaier und Kasper, *Untersuchungen zur Aerotriangulation von Überweitwinkelaufnahmen*, 4 Seiten, 2 Seiten Abbildungen, 1965. Preis S 10,—.
- Nr. 3: Stickler und Waldhäusl, *Interpretation der vorläufigen Ergebnisse der Versuche der Kommission C der OEEPE aus der Sicht des Zentrums Wien*, 4 Seiten, 8 Tabellen, 1967. Preis S 20,—.

Alte Jahrgänge der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen liegen in der Bibliothek des Österreichischen Vereines für Vermessungswesen auf und können beim Österreichischen Verein für Vermessungswesen bestellt werden.

Unkomplette Jahrgänge:

à 20,— S; Ausland 4,— sfr bzw. DM u. Porto

Jg. 1 bis 5 1903 bis 1907
7 bis 12 1909 bis 1914
17 1919
19 1921

Komplette Jahrgänge:

à 40,— S; Ausland 8,— sfr bzw. DM u. Porto
Jg. 6 1908
13 bis 16 1915 bis 1918
18 1920
20 bis 35 1922 bis 1937
36 bis 39 1948 bis 1951
à 72,— S; Ausland 15,— sfr bzw. DM u. Porto
Jg. 40 bis 49 1952 bis 1961
à 100,— S; Ausland 20,— sfr bzw. DM u. Porto
Jg. 50 bis 53 1962 bis 1965
à 130,— S; Ausland 28,— sfr bzw. DM u. Porto
a b Jg. 54 a b 1966

Österreichische Staatskartenwerke

Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen

A-1080 Wien, Krotenthallergasse 3 Tel. 42 75 46

Österreichische Karte 1:25 000 (nicht fortgeführt)	13,-
Österreichische Karte 1:50 000 mit Wegmarkierung (Wanderkarte)	25,-
Österreichische Karte 1:50 000 mit Straßenaufdruck	22,-
Österreichische Karte 1:50 000 ohne Aufdruck	20,-
Prov. Ausgabe der Österr. Karte 1:50 000 mit Wegmarkierung (Wanderkarte)	16,-
Prov. Ausgabe der Österr. Karte 1:50 000 ohne Wegmarkierung .	10,-
Österreichische Karte 1:200 000 mit Straßenaufdruck	23,-
Österreichische Karte 1:200 000 ohne Straßenaufdruck	20,-
Alte Österreichische Landesaufnahme 1:25 000	10,-
Generalkarte von Mitteleuropa 1:200 000	
Blätter mit Straßenaufdruck (nur für das österr. Staatsgebiet vor- gesehen)	15,-
Blätter ohne Straßenaufdruck	12,-
Gebiets- und Sonderkarten	
Übersichtskarte von Österreich 1:500 000, mit Namensverzeichnis, gefaltet .	59,-
Übersichtskarte von Österreich 1:500 000, ohne Namensverzeichnis, flach .	39,-
Namensverzeichnis allein	16,-
Übersichtskarte von Österreich 1:500 000, Politische Ausgabe mit Namensverzeichnis, gefaltet	53,-
Übersichtskarte von Österreich 1:500 000, Politische Ausgabe ohne Namensverzeichnis, flach	33,-

Neuerscheinungen

Katalog über Planungsunterlagen	S 200,-
Einzelblatt	S 10,-

Kulturgüterschutzkarten:

Österreichische Karte 1:50 000 je Kartenblatt	S 67,-
Burgenland 1:200 000	S 87,-

Österreichische Karte 1:50 000

10 Wildendürnbach	24 Mistelbach/Zaya	117 Zirl
22 Hollabrunn	25 Poysdorf	128 Gröbming
23 Hadres	26 Hohenau	

Österreichische Karte 1:200 000:

Blatt 47/15 Graz	48/12 Kufstein	48/16 Wien
Blatt 47/15 Graz u. orohydr. Ausgabe		

Umgebungs- und Sonderkarten:

Hochschwab 1:50 000	Umgebungskarte Mayrhofen (Zillertal) 1:50 000
Burgenland 1:200 000	Hohe Wand und Umgebung 1:50 000

In letzter Zeit berichtigte Ausgaben der Österreichischen Karte 1:50 000

48 Vöcklabruck	122 Kitzbühel	178 Hopfgarten in
71 Ybbsitz	152 Matri in Osttirol	Deferegggen
121 Neukirchen am am Großvenediger	180 Winklern	200 Arnoldstein
		201 Villach