

Prof. Adolf Müller

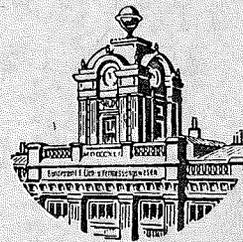
TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
INSTITUT FÜR HOCHGEODASIE
1040 WIEN, GUSSHAUSSTRASSE 27-29

Sonderheft 23
der Österreichischen Zeitschrift
für Vermessungswesen

Studien
über eine allgemeine, voraussetzungslose
Lösung des Folgebildanschlusses

von

Karl Rinner, Graz



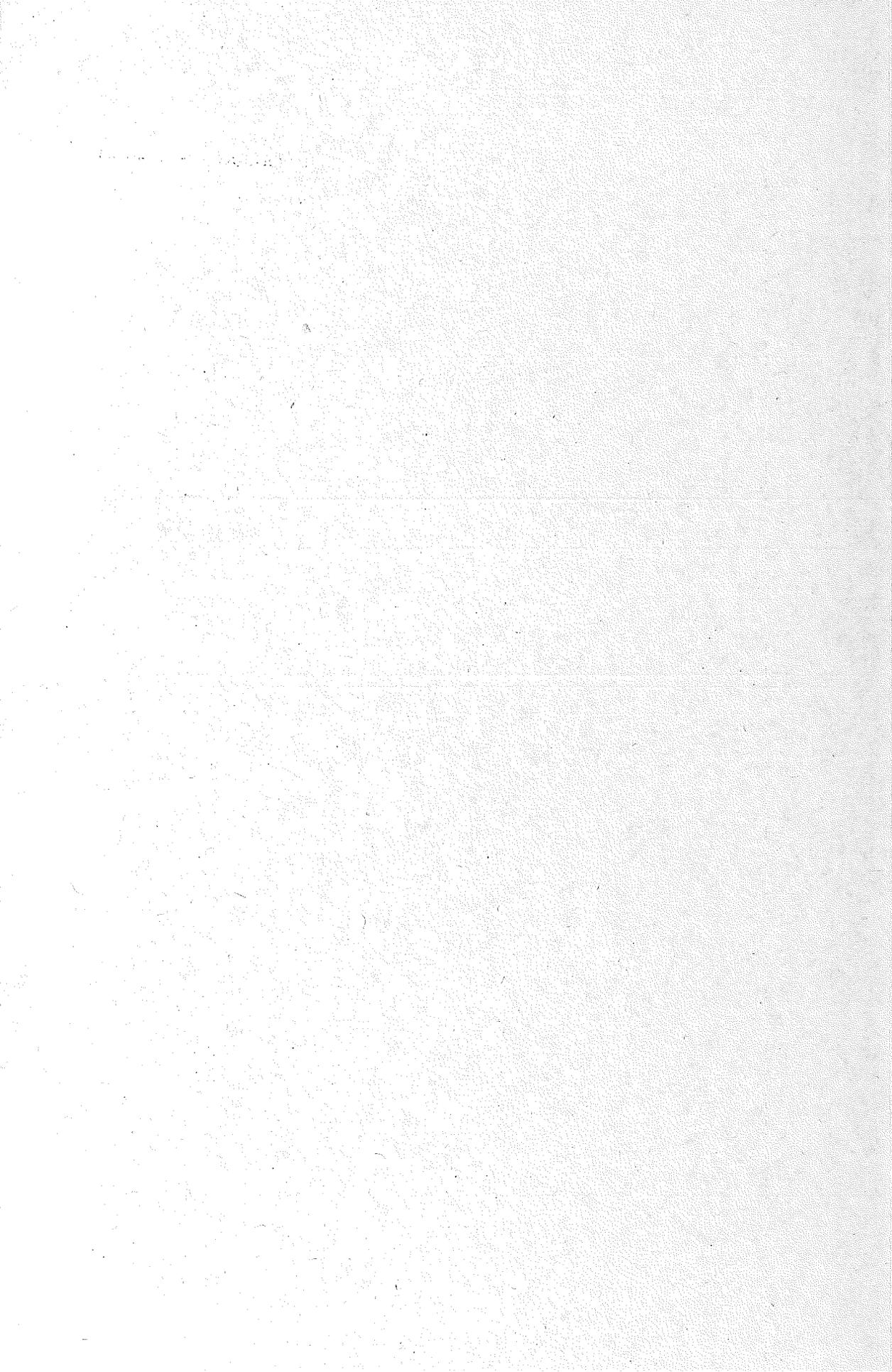
Gedruckt vom Notring der wissenschaftlichen Verbände Österreichs mit Unterstützung des Kulturamtes der Stadt Wien über Antrag der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie und gleichzeitiger Subventionierung durch das Bundesministerium für Unterricht

Herausgegeben von der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

Eigentümer und Verleger:

Österreichischer Verein für Vermessungswesen, Wien VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3

Wien 1963



Studien über eine allgemeine, voraussetzungslose Lösung des Folgebildanschlusses

Von K. Rinner, Graz

In [1] wurde auf die Möglichkeit aufmerksam gemacht, den Folgebildanschluß voraussetzungslos, nur aus dem Bildinhalt, also ohne Kenntnis von Näherungswerten für die Orientierungselemente zu berechnen. Da hiebei allgemeine, vom Aufnahmefall unabhängige Beziehungen benutzt werden, folgen Grundlagen für ein allgemein gültiges, analytisches Orientierungsverfahren für den Folgebildanschluß. Die in [1] noch als theoretisch bezeichneten Untersuchungen haben in der Zwischenzeit durch die Möglichkeit, elektronische Rechenautomaten zu benutzen, praktische Bedeutung erlangt; auch ein von anderer Seite [2] inzwischen vorgelegter Lösungsgedanke, welcher auf ähnlichen Überlegungen basiert, mag als Hinweis hiefür angesehen werden. Es ist daher sicherlich gerechtfertigt, das bisher nur in seinen Grundgedanken skizzierte Verfahren ausführlich darzustellen und für die photogrammetrisch analytische Praxis auszuarbeiten.

Im folgenden wird zuerst eine ausführliche Theorie des Verfahrens mitgeteilt, welche über die bisher publizierten Grundgedanken hinausgehend, den Versuch einer erschöpfenden Darstellung der enthaltenen Möglichkeiten gibt. Die abgeleiteten Beziehungen werden in numerischen Beispielen gezeigt und verprobt.

In weiteren Abschnitten wird die Berechnung der Orientierungselemente des Folgebildanschlusses vorgeführt und neben einer ausgleichstechnisch exakten Lösung ein Vorschlag für die praktische Berechnung der Orientierungselemente im Falle allgemeiner Aufnahmebedingungen abgeleitet. Schließlich wird auf die Verhältnisse eingegangen, welche in dem praktisch bedeutsamen Fall der genäherten Senkrechtaufnahmen vorliegen. Die abgeleiteten Beziehungen werden an Zahlenbeispielen verprobt. Die Berechnungen hiefür wurden von den Herren *Dipl.-Ing. G. Brandstätter, cand. ing. R. Gutmann* und *cand. ing. D. Kahler* durchgeführt, die Inversion der Matrizen erfolgte durch Herrn *Dr. Boxan* vom Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen Wien, auf dem durch das Entgegenkommen des Herrn Präsidenten *Dr. Neumaier* und Prof. *Dr. Inzinger* zur Verfügung stehenden Automaten IBM 650 aus.

1. Grundlegende Beziehungen

Wir betrachten 2 Aufnahmen eines Objektes, welche aus den Zentren O' und O'' erfolgt sind. Jedes der Zentren sei durch seinen Ortsvektor

$$\mathbf{x}_0 = X_0 \mathbf{e}_1 + Y_0 \mathbf{e}_2 + Z_0 \mathbf{e}_3 \quad \dots \dots (1a)$$

in einem kartesischen Koordinatensystem $K (U, \mathbf{e}_i)$ bestimmt, jedes der Aufnahmebündel durch die Matrix der Richtungscosinusse \mathbf{R} , die Bildweite f und die Bildkoordinaten x_i, y_i homologer Punkte. Eine Drehmatrix ist bekanntlich eine durch drei Drehwinkel bestimmte, orthogonale Matrix, deren Spaltenvektoren aus den

zueinander orthogonalen Richtungen der Bildkoordinatenachsen \mathbf{i} , \mathbf{j} und der Aufnahme­richtung \mathbf{k} gebildet werden, welche die innere Orientierung der Aufnahme bestimmen.

$$\mathbf{R} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} i_1 & j_1 & k_1 \\ i_2 & j_2 & k_2 \\ i_3 & j_3 & k_3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(1b)$$

Die Richtungen \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} müssen drei Orthogonalitäts- und drei Normierungsbedingungen erfüllen, so daß die insgesamt neun Koordinaten (Richtungscosinusse i_i, j_i, k_i) der Matrix bereits durch die Angabe von drei Winkeln bestimmt sind. Bezeichnen wir diese wie üblich mit φ , ω , \varkappa und führen die Drehungen um die jeweils mitgedrehten Achsen des Koordinatensystems in der angegebenen Reihenfolge aus, so bestehen für die Spaltenvektoren der Drehmatrix \mathbf{R} nach [3] die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} i_1 &= \cos \varphi \cos \varkappa + \sin \varphi \sin \omega \sin \varkappa \\ i_2 &= + \cos \omega \sin \varkappa \\ i_3 &= -\sin \varphi \cos \varkappa + \cos \varphi \sin \omega \sin \varkappa \\ \\ j_1 &= -\cos \varphi \sin \varkappa + \sin \varphi \sin \omega \cos \varkappa \\ j_2 &= + \cos \omega \cos \varkappa \dots\dots\dots(1c) \\ j_3 &= \sin \varphi \cos \varkappa + \cos \varphi \sin \omega \cos \varkappa \\ \\ k_1 &= \sin \varphi \cos \omega \\ k_2 &= -\sin \omega \\ k_3 &= \cos \varphi \cos \omega \end{aligned}$$

Wegen des Bestehens der Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen ist die Inverse der Drehmatrix gleich ihrer Transponierten.

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$$

Das die Aufnahme vermittelnde Strahlenbündel ist im örtlichen System $K_i (0; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ der Aufnahme aus den Bildkoordinaten x, y und die Bildweite f durch die Beziehung

$$\mathbf{p}_i = x \mathbf{i}^i + y \mathbf{j}^i - f \mathbf{k}^i \dots\dots\dots(2a)$$

bestimmt; im System $K (0; \mathbf{e}_i)$ wird es durch die Gleichung

$$\mathbf{p} = u \mathbf{e}_1 + v \mathbf{e}_2 + w \mathbf{e}_3 \dots\dots\dots(2b)$$

beschrieben, wobei zwischen beiden Systemen die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{R} \mathbf{p}_i & \mathbf{p}_i &= \mathbf{R}^T \mathbf{p} \\ u &= i_1 x + j_1 y - k_1 f & x &= i_1 u + i_2 v + i_3 w \dots\dots\dots(2c) \\ v &= i_2 x + j_2 y - k_2 f & y &= j_1 u + j_2 v + j_3 w \\ w &= i_3 x + j_3 y - k_3 f & -f &= k_1 u + k_2 v + k_3 w \end{aligned}$$

Anmerkung: Die Vorzeichen der Komponenten von \mathbf{k} unterscheiden sich wegen der Einführung eines umgekehrten Drehsinnes in \varkappa von den in [1] angegebenen.

bestehen. Schließlich gilt für das Bündel im System (U, e_i) der Paßpunkt e mit dem beliebig liegenden Ursprung U die Gleichung

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{p}, \quad \dots\dots(2d)$$

in welcher \mathbf{x} den Ortsvektor des Bündelstrahles und λ einen Parameter bezeichnet.

Die Bedingung für die orientierte Lage zweier Bündel wird (im allgemeinen) bekanntlich als Schnittbedingung entsprechender Strahlen definiert. Führen wir den Einheitsvektor \mathbf{b} der Basisrichtung ein, so können wir diesen sowohl im örtlichen System jeder Aufnahme als auch im System der Paßpunkte darstellen.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= b_1' \mathbf{i}' + b_2' \mathbf{j}' + b_3' \mathbf{k}' = \mathbf{R}'^T \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_2 &= b_1'' \mathbf{i}'' + b_2'' \mathbf{j}'' + b_3'' \mathbf{k}'' = \mathbf{R}''^T \mathbf{b} \quad \dots\dots(3a) \\ \mathbf{b} &= b_x \mathbf{e}_1 + b_y \mathbf{e}_2 + b_z \mathbf{e}_3 = \mathbf{R} \mathbf{b}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_x &= b_1 i_1 + b_2 j_1 + b_3 k_1 & b_1 &= b_x i_1 + b_y j_2 + b_z i_3 \\ b_y &= b_1 i_2 + b_2 j_2 + b_3 k_2 & b_2 &= b_x j_1 + b_y j_2 + b_z j_3 \quad \dots\dots(3b) \\ b_z &= b_1 i_3 + b_2 j_3 + b_3 k_3 & b_3 &= b_x k_1 + b_y k_2 + b_z k_3 \end{aligned}$$

Dabei sind nur je zwei der Richtungscosinusse b_i voneinander unabhängig, weil \mathbf{b} als Einheitsvektor eingeführt wurde und die Bedingung $[b_i^2] = 1$ erfüllt sein muß.

Die Schnittbedingung für entsprechende homologe Bündelstrahlen kann leicht in Determinatenform angegeben werden.

$$(\mathbf{p}', \mathbf{p}'', \mathbf{b}) = 0 \quad \dots\dots(4)$$

Diese Bedingung können wir in jeden der drei verwendeten Koordinatensysteme ausdrücken, in den örtlichen Systemen $K_1 (0', \mathbf{i}' \mathbf{j}' \mathbf{k}')$, $K_2 (0'', \mathbf{i}'' \mathbf{j}'' \mathbf{k}'')$ sowie in $K (U, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)$. Die darin dargestellten Richtungen lassen sich mit Hilfe der Drehmatrizen \mathbf{R} aufeinander transformieren. Die bisher eingeführten Matrizen \mathbf{R}' , \mathbf{R}'' führen Richtungen \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 der Systeme K_1 und K_2 in Richtungen \mathbf{r} des Systemes K über.

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{R}' \mathbf{r}_1 = \mathbf{R}'' \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R}'^T \mathbf{r}, \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}''^T \mathbf{r} \quad \dots\dots(5a) \end{aligned}$$

Die im System K_1 dargestellte Drehmatrix \mathbf{R}_1'' des Bündels $0''$ bestimmt die Transformation der Richtungen des Systems K_2 in Richtungen des Systems K_1

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1'' \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_1''^T \mathbf{r}_1 \quad \dots\dots(5b)$$

und es bestehen die leicht zu bestätigenden Beziehungen:

$$\mathbf{R}_1'' = \mathbf{R}'^T \mathbf{R}'', \mathbf{R}'' = \mathbf{R}' \mathbf{R}_1'' \quad \dots\dots(5c)$$

Die umgekehrte Transformation wird durch die inversen Drehmatrizen bewirkt.

2. Die Schnittbedingung im System K_1

Führen wir die in (2a) angegebenen Beziehungen in (4a) ein und ordnen nach den für alle Punkte des Bildpaares konstanten Determinatenprodukten zwischen

Venktot deren der Dreibeine $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ $(\mathbf{i}'', \mathbf{j}'', \mathbf{k}'')$ und des Basisvektors \mathbf{b} , so erhalten wir die nachstehende Gleichung:

$$\begin{aligned} & x'x''(\mathbf{i}', \mathbf{i}'', \mathbf{b}) + x'y''(\mathbf{i}', \mathbf{j}'', \mathbf{b}) - x'f(\mathbf{i}', \mathbf{k}'', \mathbf{b}) + \\ & + y'x''(\mathbf{j}', \mathbf{i}'', \mathbf{b}) + y'y''(\mathbf{j}', \mathbf{j}'', \mathbf{b}) - y'f(\mathbf{j}', \mathbf{k}'', \mathbf{b}) - \dots\dots\dots(6a) \\ & - f x''(\mathbf{k}', \mathbf{i}'', \mathbf{b}) - f y''(\mathbf{k}', \mathbf{j}'', \mathbf{b}) + f^2(\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{b}) = 0 \end{aligned}$$

Nun bezeichnen wir die neun Determinanten in leicht zu verstehender Symbolik mit

$$\begin{array}{lll} a_{11} = (\mathbf{i}', \mathbf{i}'', \mathbf{b}) & a_{12} = (\mathbf{i}', \mathbf{j}'', \mathbf{b}) & a_{13} = (\mathbf{i}', \mathbf{k}'', \mathbf{b}) \\ a_{21} = (\mathbf{j}', \mathbf{i}'', \mathbf{b}) & a_{22} = (\mathbf{j}', \mathbf{j}'', \mathbf{b}) & a_{23} = (\mathbf{j}', \mathbf{k}'', \mathbf{b}) \dots\dots(6b) \\ a_{31} = (\mathbf{k}', \mathbf{i}'', \mathbf{b}) & a_{32} = (\mathbf{k}', \mathbf{j}'', \mathbf{b}) & a_{33} = (\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{b}) \end{array}$$

und beachten, daß diese transzendenten Funktionen der fünf Orientierungsunbekannten des Folgebildanschlusses sind. Fassen wir die Hilfsfunktionen a_{ik} in einer Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(6c_1)$$

zusammen, so läßt sich unter Berücksichtigung von (2a) die Schnittbedingung auch als Matrixgleichung

$$(\mathbf{x}', \mathbf{y}', -f) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}'' \\ \mathbf{y}'' \\ -f \end{pmatrix} = 0 \dots\dots\dots(6c_2)$$

oder abgekürzt in der Form

$$\mathbf{p}_1^T \mathbf{A} \mathbf{p}_2'' = 0 \dots\dots\dots(6c_3)$$

anschreiben.

Um die Beziehungen zwischen den a_{ik} zu finden, führen wir die Hilfsvektoren

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{i}'' \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{n}_2 = \mathbf{j}'' \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{n}_3 = \mathbf{k}'' \times \mathbf{b} \dots\dots\dots(7a)$$

ein. Mit diesen geht (6b) in das System

$$\begin{array}{lll} a_{11} = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{i}' & a_{12} = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{i}' & a_{13} = \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{i}' \\ a_{21} = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{j}' & a_{22} = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{j}' & a_{23} = \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{j}' \dots\dots\dots(7b) \\ a_{31} = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{k}' & a_{32} = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{k}' & a_{33} = \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{k}' \end{array}$$

über, aus welchen wir leicht ersehen, daß die Spaltenvektoren der Matrix \mathbf{A} die Komponenten der Vektoren \mathbf{n} im System $\mathbf{K}(0', \mathbf{i}' \mathbf{j}' \mathbf{k}')$ bestimmen, also die Gleichung

$$\mathbf{A} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) \dots\dots\dots(7c_1)$$

besteht. Gleichzeitig wollen wir die adjungierte Matrix einführen.

$$\bar{\mathbf{A}} = (\bar{\mathbf{n}}_1, \bar{\mathbf{n}}_2, \bar{\mathbf{n}}_3)$$

$$\bar{\mathbf{n}}_i = \mathbf{n}_{i+1} \times \mathbf{n}_{i+2} \dots\dots\dots(7c_2)$$

Aus rein formalen Gründen gelten nach (7a) auch die Beziehungen

$$\begin{array}{ll} \mathbf{n}_1^2 = \sin^2(\mathbf{b} \mathbf{i}'') = 1 - b_1''^2 & \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = -b_1'' b_2'' \\ \mathbf{n}_2^2 = \sin^2(\mathbf{b} \mathbf{j}'') = 1 - b_2''^2 & \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3 = -b_2'' b_3'' \dots\dots(7d) \\ \mathbf{n}_3^2 = \sin^2(\mathbf{b} \mathbf{k}'') = 1 - b_3''^2 & \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n}_1 = -b_3'' b_1'' \end{array}$$

Aus der ersten Gleichungsgruppe folgt wegen $[b''^2] = 1$ eine Beziehung für die \mathbf{n}_i .

$$\mathbf{n}_1^2 + \mathbf{n}_2^2 + \mathbf{n}_3^2 - 2 = 0 \quad \dots\dots(8a)$$

Nach dem Zerlegungssatz erhalten wir aus den äußeren Produkten $\bar{\mathbf{n}}_i = \mathbf{n}_{i+1} \times \mathbf{n}_{i+2}$ Beziehungen für den im System $K_1 (0', i' j' k')$ dargestellten Basisvektor.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{n}}_1 &= \mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3 = b_1'' \mathbf{b}_1 \\ \bar{\mathbf{n}}_2 &= \mathbf{n}_3 \times \mathbf{n}_1 = b_2'' \mathbf{b}_1 \\ \bar{\mathbf{n}}_3 &= \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = b_3'' \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_1 &= b_1' i' + b_2' j' + b_3' k', \end{aligned} \quad \dots\dots(7e)$$

aus welchen durch Quadrieren die Absolutbeträge der Richtungscosinusse b_i'' im System $K_2 (0'', i'' j'' k'')$ folgen.

$$\bar{\mathbf{n}}_1^2 = b_1''^2, \quad \bar{\mathbf{n}}_2^2 = b_2''^2, \quad \bar{\mathbf{n}}_3^2 = b_3''^2 \quad \dots\dots(7f)$$

Hieraus erhalten wir die Bedingung

$$\bar{\mathbf{n}}_1^2 + \bar{\mathbf{n}}_2^2 + \bar{\mathbf{n}}_3^2 - 1 = 0 \quad \dots\dots(8b)$$

und mit (7d) lassen sich auch leicht die folgenden Beziehungen ableiten:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_2^2 + \mathbf{n}_3^2 - \bar{\mathbf{n}}_1^2 - 1 &= 0 \\ \mathbf{n}_3^2 + \mathbf{n}_1^2 - \bar{\mathbf{n}}_2^2 - 1 &= 0 \\ \mathbf{n}_1^2 + \mathbf{n}_2^2 - \bar{\mathbf{n}}_3^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots(8c_1)$$

Führen wir darin (8a) ein, so folgt auch

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1^2 + \bar{\mathbf{n}}_1^2 - 1 &= 0 \\ \mathbf{n}_2^2 + \bar{\mathbf{n}}_2^2 - 1 &= 0 \\ \mathbf{n}_3^2 + \bar{\mathbf{n}}_3^2 - 1 &= 0, \end{aligned} \quad \dots\dots(8c_2)$$

oder mit Hilfe von (8b):

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1^2 - \bar{\mathbf{n}}_2^2 - \bar{\mathbf{n}}_3^2 &= 0 \\ \mathbf{n}_2^2 - \bar{\mathbf{n}}_3^2 - \bar{\mathbf{n}}_1^2 &= 0 \\ \mathbf{n}_3^2 - \bar{\mathbf{n}}_1^2 - \bar{\mathbf{n}}_2^2 &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots(8c_3)$$

Schließlich sind die drei Vektoren \mathbf{n}_i nach (7a) und $\bar{\mathbf{n}}_i$ nach (7c₂) komplanar, so daß die daraus gebildeten Determinanten, also die zu A' gehörige Determinante und ihre Adjungierte verschwinden müssen.

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) &= 0 \\ (\bar{\mathbf{n}}_1, \bar{\mathbf{n}}_2, \bar{\mathbf{n}}_3) &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots(8d)$$

Hieraus läßt sich die wichtige Beziehung

$$b_1'' \mathbf{n}_1 + b_2'' \mathbf{n}_2 + b_3'' \mathbf{n}_3 = 0 \quad \dots\dots(8e)$$

ableiten.

Ganz analoge Bedingungen ergeben sich auch für die Zeilenvektoren \mathbf{m} von A . Führen wir die Hilfsvektoren

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{b} \times i', \quad \mathbf{m}_2 = \mathbf{b} \times j', \quad \mathbf{m}_3 = \mathbf{b} \times k' \quad \dots\dots(9a)$$

ein, so folgt aus (6a) das System

$$\begin{array}{lll} a_{11} = m_1 \cdot i'' & a_{12} = m_1 \cdot j'' & a_{13} = m_1 \cdot k'' \\ a_{21} = m_2 \cdot i'' & a_{22} = m_2 \cdot j'' & a_{23} = m_2 \cdot k'' \\ a_{31} = m_3 \cdot i'' & a_{32} = m_3 \cdot j'' & a_{33} = m_3 \cdot k'' \end{array}$$

welches besagt, daß die Zeilenvektoren von A gleich den im System K₂ (0'', i'' j'' k'') dargestellten Vektoren m sind.

$$A = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(9b)$$

In Analogie zu (7d) erhalten wir die Beziehungen

$$\begin{array}{lll} m_1^2 = 1 - b_1'^2 & m_1 \cdot m_2 = -b_1' b_2' & \\ m_2^2 = 1 - b_2'^2 & m_2 \cdot m_3 = -b_2' b_3' & \dots\dots\dots(9c) \\ m_3^2 = 1 - b_3'^2 & m_3 \cdot m_1 = -b_3' b_1' & \end{array}$$

und erkennen, daß die äußeren Produkte zwischen den Vektoren parallel zum Basisvektor liegen, welcher im System K₂ (0'', i'' j'' k'') angegeben wird.

$$\begin{array}{l} \bar{m}_1 = m_2 \times m_3 = b_1' b_2 \\ \bar{m}_2 = m_3 \times m_1 = b_2' b_3 \\ \bar{m}_3 = m_1 \times m_2 = b_3' b_1 \\ b_2 = b_1'' i'' + b_2'' j'' + b_3'' k'' \end{array} \dots\dots\dots(9d)$$

Daraus ergeben sich die Bedingungen:

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2 = 0 \dots\dots\dots(10a)$$

$$\bar{m}_1^2 + \bar{m}_2^2 + \bar{m}_3^2 - 1 = 0 \dots\dots\dots(10b)$$

$$\begin{array}{l} m_1^2 + m_2^2 - \bar{m}_3^2 - 1 = 0 \\ m_2^2 + m_3^2 - \bar{m}_1^2 - 1 = 0 \end{array} \dots\dots\dots(10c_1)$$

$$\begin{array}{l} m_3^2 + m_1^2 - \bar{m}_2^2 - 1 = 0 \\ m_1^2 + \bar{m}_1^2 - 1 = 0 \\ m_2^2 + \bar{m}_2^2 - 1 = 0 \\ m_3^2 + \bar{m}_3^2 - 1 = 0 \end{array} \dots\dots\dots(10c_2)$$

$$\begin{array}{l} m_1^2 - \bar{m}_2^2 - \bar{m}_3^2 - 1 = 0 \\ m_2^2 - \bar{m}_3^2 - \bar{m}_1^2 - 1 = 0 \\ m_3^2 - \bar{m}_1^2 - \bar{m}_2^2 - 1 = 0 \end{array} \dots\dots\dots(10c_3)$$

Den Determinantenbedingungen (8d) entsprechen wegen (9a) die analogen Beziehungen

$$\begin{array}{l} (m_1, m_2, m_3) = 0 \\ (\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3) = 0 \end{array} \dots\dots\dots(10d)$$

und schließlich gilt auch:

$$b_1' m_1 + b_2' m_2 + b_3' m_3 = 0 \dots\dots\dots(10e)$$

Multiplizieren wir die Matrix \mathbf{A} mit ihrer Transponierten \mathbf{A}^T und ziehen das Produkt von der Einheitsmatrix \mathbf{E} ab, so erhalten wir nach (9c) eine symmetrische Matrix, deren Zeilen und Spalten den Basisvektor im örtlichen System K_1 bestimmen.

$$\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} b_1'^2 & b_2'b_1' & b_3'b_1' \\ b_1'b_2' & b_2'^2 & b_3'b_2' \\ b_1'b_3' & b_2'b_3' & b_3'^2 \end{pmatrix} = (b_1'b_1, b_2'b_1, b_3'b_1) \quad \dots\dots(11a)$$

In analoger Weise ergeben nach (7d) die Elemente der um das Produkt $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ verminderten Einheitsmatrix die Richtungscosinusse von \mathbf{b} im örtlichen System K_2 .

$$\mathbf{E} - \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b_1''^2 & b_2''b_1'' & b_3''b_1'' \\ b_1''b_2'' & b_2''^2 & b_3''b_2'' \\ b_1''b_3'' & b_2''b_3'' & b_3''^2 \end{pmatrix} = (b_1''b_2, b_2''b_2, b_3''b_2) \quad \dots\dots(11b)$$

Wir haben damit ein einfaches Verfahren zur Bestimmung der Richtungscosinusse des Basisvektors in den örtlichen Systemen der beiden Aufnahmen gefunden, das nur die Normierung der Spaltenvektoren der oben gebildeten Matrizen erfordert. Da hierbei eine dreifache Bestimmung erfolgt, liegt eine wertvolle Kontrollmöglichkeit vor.

Aus \mathbf{b} und \mathbf{n} läßt sich auch die Drehmatrix \mathbf{R}_1'' der zweiten Aufnahme mit den Spaltenvektoren $\mathbf{i}'', \mathbf{j}'', \mathbf{k}''$ berechnen. Die Anwendung des Entwicklungssatzes auf die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 \times \mathbf{b} &= (\mathbf{i}'' \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} = \mathbf{i}'' \mathbf{b} \mathbf{b} - \mathbf{i}'' \\ \mathbf{n}_2 \times \mathbf{b} &= (\mathbf{j}'' \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} = \mathbf{j}'' \mathbf{b} \mathbf{b} - \mathbf{j}'' \\ \mathbf{n}_3 \times \mathbf{b} &= (\mathbf{k}'' \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} = \mathbf{k}'' \mathbf{b} \mathbf{b} - \mathbf{k}'' \end{aligned}$$

führt in Verbindung mit (7e) zu den Vektorengleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1'' &= \mathbf{b}_1 \times \mathbf{n}_1 + \overline{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{n}_1 + b_1'' \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{j}_2'' &= \mathbf{b}_1 \times \mathbf{n}_2 + \overline{\mathbf{n}}_2 = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{n}_2 + b_2'' \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{k}_3'' &= \mathbf{b}_1 \times \mathbf{n}_3 + \overline{\mathbf{n}}_3 = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{n}_3 + b_3'' \mathbf{b}_1, \end{aligned} \quad \dots\dots(12a)$$

welche auch zu einer Matrixgleichung zusammengefaßt werden können. Mit der die äußere Multiplikation mit \mathbf{b}_1 bewerkstellenden Matrix

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -b_3' & b_2' \\ b_3' & 0 & -b_1' \\ -b_2' & b_1' & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(12b)$$

erhalten wir aus (12a) die gesuchte Gleichung:

$$\mathbf{R}_1'' = \mathbf{B}_1 \mathbf{A} + \overline{\mathbf{A}} \quad \dots\dots(12c)$$

Auch aus den Zeilenvektoren \mathbf{m} und \mathbf{b} kann die Matrix \mathbf{R}_1'' abgeleitet werden. Aus ähnlichen Überlegungen, welche zum System (12) geführt haben, erhalten wir für die Zeilenvektoren $\overline{\mathbf{i}'}, \overline{\mathbf{j}'}, \overline{\mathbf{k}''}$ von \mathbf{R}_1'' die Gleichungen

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{i}''} &= -\mathbf{b}_2 \times \mathbf{m}_1 + \overline{\mathbf{m}}_1 \\ \overline{\mathbf{j}''} &= -\mathbf{b}_2 \times \mathbf{m}_2 + \overline{\mathbf{m}}_2 \\ \overline{\mathbf{k}''} &= -\mathbf{b}_2 \times \mathbf{m}_3 + \overline{\mathbf{m}}_3 \end{aligned} \quad \dots\dots(13a)$$

und aus diesen nach Einführung der zu \mathbf{b}_2 gehörigen Matrix des äußeren Produktes

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -b_3'' & b_2'' \\ b_3'' & 0 & -b_1'' \\ -b_2'' & b_1'' & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(13b)$$

erst die Gleichung

$$\mathbf{R}_1''^T = -\mathbf{B}_2 \mathbf{A}^T + \bar{\mathbf{A}}^T,$$

welche durch Transponieren schließlich, wegen $\mathbf{B}_2^T = -\mathbf{B}_2$ in die einfache zu (12c) analoge Beziehung

$$\mathbf{R}_1'' = \mathbf{A} \mathbf{B}_2 + \bar{\mathbf{A}} \quad \dots\dots(13c)$$

übergeht. Durch Vergleich mit (12c) folgt auch die Beziehung:

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{B}_2$$

Die Drehmatrix der zweiten Aufnahme im System K (U, \mathbf{e}_i) erhalten wir auch aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'' &= \mathbf{R}' \mathbf{R}_1'' = \mathbf{R}' \mathbf{B}_1 \mathbf{A} + \mathbf{R}' \bar{\mathbf{A}} \\ &= \mathbf{R}' \mathbf{A} \mathbf{B}_2 + \mathbf{R}' \bar{\mathbf{A}} \end{aligned} \quad \dots\dots(14a)$$

und der Basisvektor \mathbf{b} kann nun zweifach bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{R}'' \mathbf{b}_2 = \mathbf{R}' \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_1 &= \mathbf{R}_1'' \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 = \mathbf{R}_1''^T \mathbf{b}_1 \end{aligned} \quad \dots\dots(14b)$$

3. Schnittbedingung im System K (U, \mathbf{e}_i)

Beim Folgebildanschluß können die Orientierungselemente (Aufnahmeort und Drehmatrix) einer Aufnahme im System K (U, \mathbf{e}_i) als bekannt vorausgesetzt werden und es erscheint zweckmäßig, die Schnittbedingung in diesem System darzustellen. Befindet sich das Bündel $0'$ in orientierter Lage, so lassen sich die Koordinaten (u', v', w') der Bildpunkte im System K_1' ($0', \mathbf{e}_i$) nach (2c) berechnen und wir erhalten aus (6c₂) für die Schnittbedingung die Matrizenform

$$(u' \ v' \ w') \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ -f \end{pmatrix} = 0, \quad \dots\dots(14a_1)$$

oder ausführlich angeschrieben:

$$\begin{aligned} &u' x'' a_{11} + u' y'' a_{21} - u' f a_{13} \\ &+ v' x'' a_{12} + v' y'' a_{22} - v' f a_{23} \\ &+ w' x'' a_{31} + w' y'' a_{32} - w' f a_{33} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots(14b_1)$$

Die Elemente der Matrix \mathbf{A} (siehe (6c)) sind nun durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11} &= \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & a_{12} &= \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & a_{13} &= \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{e}_1 \\ a_{21} &= \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & a_{22} &= \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & a_{23} &= \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{e}_2 \\ a_{31} &= \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_3 & a_{32} &= \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{e}_3 & a_{33} &= \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad \dots\dots(14c)$$

bestimmt und wir sehen, daß die Spaltenvektoren von \mathbf{A} die Komponenten der nach (7a) zu bildenden Vektoren \mathbf{n} im System K (U, \mathbf{e}_i) darstellen. Die Gleichungen

(7e) bestimmen die Komponenten des Basisvektors \mathbf{b} in diesem System, während die Absolutbeträge der äußeren Produkte $\bar{\mathbf{n}}_i = \mathbf{n}_{i+1} \times \mathbf{n}_{i+2}$ wie früher, gleich den Komponenten dieses Vektors im System K'' ($0'', \mathbf{e}_i$) sind.

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{n}}_1 &= \mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3 = b_1'' \mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{n}}_2 &= \mathbf{n}_3 \times \mathbf{n}_1 = b_2'' \mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{n}}_3 &= \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = b_3'' \mathbf{b}\end{aligned} \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{e}_1 + b_y \mathbf{e}_2 + b_z \mathbf{e}_3 \quad \dots (15a)$$

Die Zeilenvektoren \mathbf{m} von \mathbf{A} sind durch die Beziehungen

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{b} \times \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{m}_2 = \mathbf{b} \times \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{m}_3 = \mathbf{b} \times \mathbf{e}_3$$

bestimmt und ihre äußeren Produktvektoren sind wiederum parallel zum Basisvektor. Dieser wird jedoch im örtlichen System K_2 dargestellt und als Koeffizienten erscheinen nunmehr die Richtungskoeffizienten von \mathbf{b} im System K (U, \mathbf{e}_i).

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{m}}_1 &= \mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_3 = b_x \mathbf{b}_2 \\ \bar{\mathbf{m}}_2 &= \mathbf{m}_3 \times \mathbf{m}_1 = b_y \mathbf{b}_2, \quad \mathbf{b}_2 = b_1'' \mathbf{i}'' + b_2'' \mathbf{j}'' + b_3'' \mathbf{k}'' \quad \dots (15b) \\ \bar{\mathbf{m}}_3 &= \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 = b_z \mathbf{b}_2\end{aligned}$$

Gleichung (11a) ergibt

$$\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{A}^T = (b_x \mathbf{b}, b_y \mathbf{b}, b_z \mathbf{b}) \quad \dots (16a)$$

und aus (12) folgt unmittelbar:

$$\mathbf{R}'' = \mathbf{B}\mathbf{A} + \bar{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -b_z & b_y \\ b_z & 0 & -b_x \\ -b_y & b_x & 0 \end{pmatrix} \quad \dots (16b)$$

Das System der Gleichungen (11) und (13) bestimmt erst \mathbf{b}_2 und damit \mathbf{R}'' . Mit dieser Matrix erhalten wir aus \mathbf{b}_2 den Basisvektor $\mathbf{b} = \mathbf{R}'' \mathbf{b}_2$ im System K .

Die Bedingungsgleichungen zwischen den \mathbf{n} und \mathbf{m} lassen sich nach (8) und (10) bilden, es ergeben sich aber nicht wesentliche Vereinfachungen.

4. Die Verträglichkeitsbedingungen

Die neun Hilfsfunktionen a_{ik} werden durch die fünf Orientierungsunbekannten des Folgebildanschlusses, das sind die drei Bestimmungselemente $\varphi'', \omega'', \kappa''$ der Drehmatrix und zwei Verhältnissen zwischen den Richtungscosinussen b'' des Basisvektors \mathbf{b} bestimmt. Sie sind daher voneinander abhängig und müssen vier Verträglichkeitsbedingungen erfüllen. Wir wollen nun untersuchen, ob diese in den durch (8) und (10) angegebenen Bedingungen zwischen den Spalten und Zeilenvektoren der aus den a_{ik} gebildeten Matrix \mathbf{A} enthalten sind. Dies ist offensichtlich der Fall, wenn unter diesen Bedingungen vier existieren, welche voneinander unabhängig sind.

Wir betrachten zuerst die vier Gleichungen (8a, 8c₂) und führen den Nachweis der Unabhängigkeit numerisch durch Aufsuchen von Lösungssystemen \mathbf{n}_i , welche immer nur eine der Gleichungen nicht aber die restlichen erfüllen.*)

*) Auf diese Möglichkeit wurde ich freundlicherweise von Herrn Prof. Perron, München, aufmerksam gemacht.

Die Vektoren

$$\mathbf{n}_1^T = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \mathbf{n}_2^T = (2, 2, 2), \mathbf{n}_3^T = (1, 1, 1), \bar{\mathbf{n}}_i^T = (0, 0, 0)$$

sind Lösungen der ersten der Gleichungen (8c₂) nicht aber der beiden letzten und (8a). Daraus folgt, daß diese Gleichungen, welche wir mit b, c, d bezeichnen wollen, von der ersten Gleichung a nicht abhängen. Das System

$$\mathbf{n}_1^T = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3^T = (1, 1, 1), \bar{\mathbf{n}}_i^T = (0, 0, 0)$$

befriedigt die Gleichungen a und b. Da aber c und d nicht erfüllt werden, sind diese unabhängig von a und b. Schließlich werden die Gleichungen a, b und c durch die Vektoren

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \bar{\mathbf{n}}_i = 0$$

erfüllt, nicht aber Gleichung d, so daß keine Abhängigkeit zwischen dieser Gleichung und a, b, c besteht.

Die vier Gleichungen (8a) und (8c₂) können daher als Verträglichkeitsbedingungen für die a_{ik} angesehen werden und die restlichen Gleichungen (8) müssen sich aus diesen ableiten lassen.

Dies können wir für die Beziehungen (8b, 8c₁, 8c₃) leicht zeigen und auch für die Determinantenbedingung (8d) läßt sich der Nachweis hierfür erbringen. Da sich (8d) als unabhängig sowohl von (8a) als auch von den drei Gleichungen (8c₂) erweist, kann eine dieser Gleichungen auch durch (8d) ersetzt werden.

Ganz analoge Überlegungen führen wir auch für die Bedingung (10) aus, in welcher die Zeilenvektoren \mathbf{m}_k auftreten und finden in diesem Falle als mögliche Verträglichkeitsbedingungen die Gleichungen (10a) und (10c₂), welche den früher benutzten Gleichungen (8a) und (8c₂) entsprechen. Auch nunmehr kann eine der Gleichungen durch (10d) ersetzt werden.

Die beiden Systeme von Verträglichkeitsbedingungen sind selbstverständlich voneinander abhängig. Offensichtlich sind die Gleichungen (8a) und (10a) sowie (8d) und (10d) ident, die Gleichungen (8c₂) entsprechen (10c₂) und können einzeln oder ganz durch diese ersetzt werden.

Wir wollen nun die gefundenen Verträglichkeitsbedingungen durch die a_{ik} und ihre adjungierten Werte \bar{a}_{ik} ausdrücken, welche als Unterdeterminanten der a_{ik} definiert sind.

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1^2 + \bar{\mathbf{n}}_1^2 - 1 &\equiv a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 + \bar{a}_{11}^2 + \bar{a}_{21}^2 + \bar{a}_{31}^2 - 1 = 0 \\ \mathbf{n}_2^2 + \bar{\mathbf{n}}_2^2 - 1 &\equiv a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 + \bar{a}_{12}^2 + \bar{a}_{22}^2 + \bar{a}_{32}^2 - 1 = 0 \quad \dots (17a) \\ \mathbf{n}_3^2 + \bar{\mathbf{n}}_3^2 - 1 &\equiv a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 + \bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{23}^2 + \bar{a}_{33}^2 - 1 = 0 \\ \mathbf{n}_1^2 + \mathbf{n}_2^2 + \mathbf{n}_3^2 - 2 &\equiv [a_{ik}^2] - 2 = 0 \\ (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) &\equiv a_{11} \bar{a}_{11} + a_{12} \bar{a}_{12} + a_{13} \bar{a}_{13} = 0 \end{aligned}$$

An Stelle der ersten drei Gleichungen (17a) können auch die nachstehenden Gleichungen (17b) eingeführt werden.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}_1^2 + \overline{\mathbf{m}}_1^2 - 1 &= a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + \overline{a}_{11}^2 + \overline{a}_{12}^2 + \overline{a}_{13}^2 - 1 = 0 \\
 \mathbf{m}_2^2 + \overline{\mathbf{m}}_2^2 - 1 &\equiv a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 + \overline{a}_{21}^2 + \overline{a}_{22}^2 + \overline{a}_{23}^2 - 1 = 0 \quad \dots(17b) \\
 \mathbf{m}_3^2 + \overline{\mathbf{m}}_3^2 - 1 &\equiv a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 + \overline{a}_{31}^2 + \overline{a}_{32}^2 + \overline{a}_{33}^2 - 1 = 0
 \end{aligned}$$

Die Verträglichkeitsbedingungen sind transzendent. Für die praktische Anwendung werden aber häufig Linearformen benötigt, in welchen Verbesserungen $d\mathbf{n}$ für vorgegebene Näherungen (\mathbf{n}) eingeführt werden.

$$\mathbf{n} = (\mathbf{n}) + d\mathbf{n}$$

Die Entwicklung der Beziehungen (17a) an der Näherungsstelle ergibt nach Anwendung bekannter Regeln über die Differentiation von Vektoren die gesuchten Linearformen, in welchen Koeffizienten und Absolutglieder für (\mathbf{n}) zu bilden sind.

$$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{n}_1 + \mathbf{b} \cdot d\mathbf{n}_2 + \mathbf{c} \cdot d\mathbf{n}_3 + w = 0$$

a	b	c	w
\mathbf{n}_1	$(\mathbf{n}_3 \times \overline{\mathbf{n}}_1)$	$(\overline{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{n}_2)$	$\frac{1}{2} (\mathbf{n}_1^2 + \overline{\mathbf{n}}_1^2 - 1)$
$(\overline{\mathbf{n}}_2 \times \mathbf{n}_3)$	\mathbf{n}_2	$(\mathbf{n}_1 \times \overline{\mathbf{n}}_2)$	$\frac{1}{2} (\mathbf{n}_2^2 + \overline{\mathbf{n}}_2^2 - 1)$
$(\mathbf{n}_2 \times \overline{\mathbf{n}}_3)$	$(\overline{\mathbf{n}}_3 \times \mathbf{n}_1)$	\mathbf{n}_3	$\frac{1}{2} (\mathbf{n}_3^2 + \overline{\mathbf{n}}_3^2 - 1)$
\mathbf{n}_1	\mathbf{n}_2	\mathbf{n}_3	$\frac{1}{2} (\mathbf{n}_1^2 + \mathbf{n}_2^2 + \mathbf{n}_3^2 - 2)$
$\overline{\mathbf{n}}_1$	$\overline{\mathbf{n}}_2$	$\overline{\mathbf{n}}_3$	$(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$

.... (18a)

Die zum System (17b) gehörenden Linearformen ergeben sich aus den oben angeführten durch Einführen von \mathbf{m} an Stelle von \mathbf{n} .

Die linearen Gleichungen lassen sich auch leicht durch die a_{ik} und \overline{a}_{ik} ausdrücken, wenn beachtet wird, daß die Differentiale $d\mathbf{n}$ Spaltenvektoren der Matrix

$$d\mathbf{A} = (d\mathbf{n}_1, d\mathbf{n}_2, d\mathbf{n}_3) = \begin{pmatrix} da_{11} & da_{12} & da_{13} \\ da_{21} & da_{22} & da_{23} \\ da_{31} & da_{32} & da_{33} \end{pmatrix}$$

und die $\overline{\mathbf{n}}$ Spaltenvektoren der adjungierten Matrix $\overline{\mathbf{A}}$ sind. Bezeichnen α die Koeffizienten von da und w die Widersprüche, so bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 [\alpha da] + w_1 &= 0 & [\delta da] + w_4 &= 0 \\
 [\beta da] + w_2 &= 0 & [\epsilon da] + w_5 &= 0, \quad \dots\dots(18b) \\
 [\gamma da] + w_3 &= 0
 \end{aligned}$$

deren Koeffizienten in **Tab. 1** zusammengestellt sind. Von diesen sind nur vier voneinander unabhängig und kann eine der ersten drei durch die letzte ersetzt werden.

5. Zahlenbeispiel

Die bisher abgeleiteten Beziehungen zwischen den Elementen der Matrix A der Hilfsfunktionen a_{ik} sollen nun an einem Zahlenbeispiel dargestellt und verprobt werden. Wir benutzen hierzu ein in [3] mitgeteiltes Beispiel einer analytischen Orientierung zweier Aufnahmen, dem die folgenden Aufnahmedaten zu Grunde liegen.

	X_0	Y_0	Z_0	φ	ω	\varkappa
$0'$	1000	1000	3900	-15^s	-5^s	$+12^s$
$0''$	2600	1200	3600	$+20$	$+2$	-5
Basis	$+1600$	$+200$	-300			

Mit diesen berechnen wir nach (1) die Drehmatrizen der Bündel und den Einheitsvektoren der Basis.

$$\mathbf{R}' = \begin{pmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ +958\ 579 & -164\ 212 & -232\ 725 \\ +186\ 803 & +979\ 259 & +078\ 459 \\ +215\ 014 & -118\ 683 & +969\ 372 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} +975\ 537 = b_x \\ +121\ 942 = b_y \\ -182\ 913 = b_z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}'' = \begin{pmatrix} \mathbf{i}'' & \mathbf{j}'' & \mathbf{k}'' \\ +947\ 363 & +084\ 296 & +308\ 865 \\ -078\ 420 & +996\ 426 & -031\ 411 \\ -310\ 408 & +005\ 536 & +950\ 588 \end{pmatrix}$$

Diese führen wir sodann in die für die Systeme K_1 und K abgeleiteten Beziehungen der Abschnitte 3, 4 ein.

5. 1. Beziehungen im örtlichen System K_1

Mit Hilfe von (6b) können wir die Zahlenwerte der a_{ik} berechnen und die Matrizen A und \bar{A} bilden.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2 & \mathbf{n}_3 \\ +067\ 126 & -378\ 263 & +092\ 862 \\ -158\ 204 & +164\ 573 & +973\ 409 \\ +163\ 834 & -888\ 107 & +169\ 044 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \\ \mathbf{m}_3 \end{matrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{n}}_1 & \bar{\mathbf{n}}_2 & \bar{\mathbf{n}}_3 \\ +892\ 311 & +186\ 221 & +113\ 539 \\ -018\ 528 & -003\ 867 & -002\ 357 \\ -383\ 487 & -080\ 032 & -048\ 796 \end{pmatrix} \begin{matrix} \bar{\mathbf{m}}_1 \\ \bar{\mathbf{m}}_2 \\ \bar{\mathbf{m}}_3 \end{matrix}$$

Nun berechnen wir die Richtungscosinusse des Basisvektors in den beiden örtlichen Systemen, welche wir in der Folge laufend benutzen werden, sowie die Drehmatrix \mathbf{R}_1'' nach (5a) und (5c).

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{R}'^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} +918\ 580 = b_1' \\ -019\ 073 = b_2' \\ -394\ 775 = b_3' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{R}''^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} +971\ 403 = b_1'' \\ +202\ 727 = b_2'' \\ +123\ 604 = b_3'' \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_1'' = \mathbf{R}'^T \mathbf{R}'' = \begin{pmatrix} + 826\,731 & + 268\,130 & + 494\,594 \\ - 195\,522 & + 961\,260 & - 194\,297 \\ - 527\,529 & + 063\,927 & + 847\,128 \end{pmatrix}$$

Durch Anwendung der Beziehung (11a) erhalten wir die Matrix

$$\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} + 943\,788 & - 017\,521 & - 362\,633 \\ - 017\,521 & + 000\,362 & + 007\,529 \\ - 362\,633 & + 007\,529 & + 155\,849 \end{pmatrix},$$

normieren die Spaltenvektoren und bekommen in Übereinstimmung mit (11a) die Elemente von \mathbf{b}_1 .

$$(+ 918\,580\mathbf{b}_1, - 019\,073\mathbf{b}_1, - 394\,775\mathbf{b}_1)$$

Sodann berechnen wir die nach (11b) zu bildende Matrix

$$\mathbf{E} - \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} + 943\,624 & + 196\,930 & + 120\,069 \\ + 196\,930 & + 041\,099 & + 025\,059 \\ + 120\,069 & + 025\,059 & + 015\,276 \end{pmatrix}$$

und es zeigt sich, daß ihre Spaltenvektoren parallel \mathbf{b}_2 sind, während ihre Beträge den Richtungscosinussen dieses Vektors entsprechen, wie dies nach (11b) sein soll.

$$(+ 971\,403\mathbf{b}_2, + 202\,727\mathbf{b}_2, + 123\,604\mathbf{b}_2)$$

Die Berechnungen des Systemes (12) für die Ermittlung von \mathbf{R}_1'' gibt

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & + 394\,775 & - 019\,073 \\ - 394\,775 & 0 & - 918\,580 \\ + 019\,073 & + 918\,580 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} - 065\,580 & + 892\,311 & + 826\,731 \\ - 176\,996 & - 018\,528 & - 195\,522 \\ - 144\,043 & - 383\,487 & - 527\,530 \end{pmatrix}$$

und damit nach (12c) schließlich bis auf Rechenungenauigkeit die Drehmatrix der zweiten Aufnahme im örtlichen System der ersten.

$$\mathbf{B}\mathbf{A} + \mathbf{A} = \begin{pmatrix} + 826\,731 & + 268\,129 & + 494\,593 \\ - 195\,522 & + 961\,259 & - 194\,297 \\ - 527\,530 & + 063\,927 & + 847\,129 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_1''$$

Wir berechnen diese Matrix nun auch nach Gleichung (13c), führen dazu erst

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & - 123\,604 & + 202\,727 \\ + 123\,604 & 0 & - 971\,403 \\ - 202\,727 & + 971\,403 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe von \mathbf{b}_2 ein und bilden damit das Produkt:

$$\mathbf{A}\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} - 065\,580 & + 081\,909 & + 381\,054 \\ - 176\,994 & + 925\,127 & - 191\,939 \\ - 144\,043 & + 143\,959 & + 895\,925 \end{pmatrix}$$

Durch hinzufügen von $\bar{\mathbf{A}}$ erhalten wir in Übereinstimmung mit (13c) wiederum innerhalb der Rechenschärfe:

$$\mathbf{A}\mathbf{B}_2 + \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{R}_1''$$

Die Anwendung der Beziehung (14b) ergibt die Komponenten von \mathbf{b}_1

$$\mathbf{R}_1''\mathbf{b}_2 = \mathbf{R}_1'' \begin{pmatrix} + 971\ 403 \\ + 202\ 727 \\ + 123\ 604 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + 918\ 580 = \mathbf{b}_1' \\ - 019\ 073 = \mathbf{b}_2' \\ - 394\ 775 = \mathbf{b}_3' \end{pmatrix} = \mathbf{b}_1,$$

sowie die Drehmatrix \mathbf{R}'' der zweiten Aufnahme im System K

$$\mathbf{R}\mathbf{R}_1'' = \begin{pmatrix} + 947\ 363 & + 084\ 295 & + 308\ 864 \\ - 078\ 420 & + 996\ 424 & - 031\ 411 \\ - 310\ 409 & + 005\ 535 & + 950\ 587 \end{pmatrix} = \mathbf{R}''$$

und mit dieser schließlich auch den Basisvektor im gleichen System.

$$\mathbf{R}'\mathbf{b}_1 = \mathbf{R}''\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} + 975\ 537 = \mathbf{b}_x \\ + 121\ 942 = \mathbf{b}_y \\ - 182\ 913 = \mathbf{b}_z \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

Die Verträglichkeitsbedingungen (17a, b) sind bis auf Rechenunschärfen erfüllt

	\mathbf{n}^2	$\bar{\mathbf{n}}^2$	$\mathbf{n}^2 + \bar{\mathbf{n}}^2 - 1$
1	056 376	943 626	000 002
2	958 902	041 098	000 000
3	984 724	015 278	000 002
	2 000 002	1 000 002	
	\mathbf{m}^2	$\bar{\mathbf{m}}^2$	$\mathbf{m}^2 + \bar{\mathbf{m}}^2 - 1$
1	048 327	951 675	000 002
2	985 133	014 870	000 003
3	966 542	033 458	000 000
	2 000 002	1 000 003	
	$(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = 0$		
	$(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3) = 0$		

5. 2. Beziehungen im System K

Wir berechnen nach (14c) die Matrix der Hilfsfunktionen a_{ik} und ihre Adjungierte.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2 & \mathbf{n}_3 \\ + 052\ 196 & - 182\ 935 & - 110\ 171 \\ - 129\ 529 & + 020\ 819 & + 983\ 830 \\ + 192\ 025 & - 961\ 771 & + 068\ 306 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \\ \mathbf{m}_3 \end{matrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{n}}_1 & \bar{\mathbf{n}}_2 & \bar{\mathbf{n}}_3 \\ + 947\ 641 & + 197\ 768 & + 120\ 579 \\ + 118\ 455 & + 024\ 721 & + 015\ 073 \\ - 177\ 683 & - 037\ 082 & - 022\ 609 \end{pmatrix} \begin{matrix} \bar{\mathbf{m}}_1 \\ \bar{\mathbf{m}}_2 \\ \bar{\mathbf{m}}_3 \end{matrix}$$

Mit diesen Matrizen bilden wir

$$\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} + 951\,673 & + 188\,959 & - 178\,439 \\ + 118\,959 & 014\,867 & - 022\,306 \\ - 178\,439 & - 022\,306 & 033\,457 \end{pmatrix},$$

normieren die Spaltenvektoren

$$(+ 975\,537\mathbf{b}_1, + 121\,942\mathbf{b}_2, - 182\,913\mathbf{b}_3)$$

und erhalten in Übereinstimmung mit (16a) den Basisvektor und seine Richtungs-cosinus im System K.

Aus der Normierung der Spaltenvektoren der Matrix

$$\mathbf{E} - \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} + 943\,624 & + 196\,929 & + 120\,069 \\ + 196\,929 & + 041\,098 & + 025\,059 \\ + 120\,069 & + 025\,059 & + 015\,275 \end{pmatrix},$$

folgt wie im vorigen Abschnitt

$$(+ 971\,403\mathbf{b}_2, + 202\,727\mathbf{b}_3, + 123\,604\mathbf{b}_1)$$

also \mathbf{b}_2 . Das System (16b) führt unmittelbar zur Matrix \mathbf{R}'' . Wir bilden

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & + 182\,913 & + 121\,942 \\ - 182\,913 & 0 & - 975\,537 \\ - 121\,942 & + 975\,537 & 0 \end{pmatrix},$$

berechnen damit

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} - 000\,277 & - 113\,472 & + 188\,286 \\ - 196\,875 & + 971\,705 & - 046\,483 \\ - 132\,725 & + 042\,617 & + 973\,197 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$\mathbf{B}\mathbf{A} + \bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} + 947\,364 & + 084\,296 & + 308\,865 \\ - 078\,420 & + 996\,426 & - 031\,410 \\ - 310\,408 & + 005\,535 & + 950\,588 \end{pmatrix} = \mathbf{R}'',$$

also in der Tat \mathbf{R}'' , wie dies nach (16b) sein soll.

Die Benutzung des Systemes (13) führt über die Zwischenschritte

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & - 123\,604 & + 202\,727 \\ + 123\,604 & 0 & - 971\,403 \\ - 202\,727 & + 971\,403 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} - 000\,277 & - 113\,472 & + 188\,286 \\ + 196\,876 & + 971\,706 & - 046\,483 \\ - 132\,618 & + 042\,618 & + 973\,196 \end{pmatrix}$$

zur Gleichung

$$\mathbf{A}\mathbf{B}_2 + \bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} + 947\,364 & + 084\,296 & + 308\,865 \\ - 078\,421 & + 996\,427 & - 031\,410 \\ - 310\,408 & + 005\,536 & + 950\,587 \end{pmatrix} = \mathbf{R}'',$$

durch welches \mathbf{R}'' bestimmt wird. Aus dieser und dem bereits vorher bestimmten Vektor \mathbf{b}_2 erhalten wir wie im vorigen Abschnitt.

$$\mathbf{b} = \mathbf{R}''\mathbf{b}_2$$

Die Verträglichkeitsbedingungen sind auch für diesen Fall erfüllt.

	n^2	\bar{n}^2	$n^2 + \bar{n}^2 - 1$
1	056 376	943 626	000 002
2	958 902	041 098	0
3	984 725	015 278	000 003
	2 000 0003	1 000 002	
	m^2	\bar{m}^2	$m^2 + \bar{m}^2 - 1$
1	048 327	951 675	000 002
2	985 132	014 870	2
3	966 543	033 457	000 000
	2 000 003	1 000 002	
	$(n_1, n_2, n_3) = 000\ 001$		
	$(m_1, m_2, m_3) = 000\ 001$		

6. Orientierung durch Folgebildanschluß

Die Orientierungsunbekannten des Folgebildanschlusses sind die Richtung \mathbf{b} des Basisvektors und die Drehmatrix \mathbf{R}'' der anzuschließenden Aufnahme. Sind diese bekannt, so ist die Lage des zu orientierenden Bündels gegen das vorgegebene festgelegt und wir können in bekannter Weise ein ähnliches Modell des aufgenommenen Objektes berechnen.

In den vorangegangenen Abschnitten wurde dargelegt, wie sich die Orientierungsunbekannten in einfacher und allgemeiner Form aus der Matrix der Hilfsunbekannten a_{ik} berechnen lassen. Es ist daher naheliegend zu untersuchen, welche Möglichkeiten bestehen, diese Matrix aus dem vorgegebenen Bildinhalt beider Aufnahmen zu bestimmen.

6.1. Ermittlung der a_{ik}

Jedes homologe Bildpunktepaar gibt Anlaß zu einer Gleichung (6c₂), welche in den a_{ik} linear und homogen ist. Als Koeffizienten der a_{ik} erscheinen einfache Produkte zwischen den gemessenen Bildkoordinaten und der bekannt angenommenen Bildweite. Da insgesamt vier Verträglichkeitsbedingungen (8, 9) zwischen den a_{ik} bestehen, werden diese gerade bestimmt sein, wenn die Schnittbedingung für fünf Punktepaare aufgestellt wird. Bei mehr als fünf verwendeten Punkten liegt eine Überbestimmung vor, welche zu einer Ausgleichung Anlaß gibt.

Wegen der Transzendenz der vier Verträglichkeitsbedingungen müssen Linearformen benutzt werden und hierzu ist die Kenntnis von Näherungen für die a_{ik} erforderlich. Diese lassen sich aus den Schnittbedingungen selbst ableiten.

Dividieren wir diese Gleichung durch ein von Null verschiedenes $a_{im} = k$, so folgt hieraus eine inhomogen lineare Gleichung für die acht Unbekannten

$$c_{ik} = \frac{a_{ik}}{k} \quad \text{oder} \quad a_{ik} = k c_{ik}, \quad \dots \dots (19a)$$

welche wir wieder als Matrixgleichung anschreiben wollen.

$$\mathbf{p}_1''^T \mathbf{C} \mathbf{p}_2'' = 0. \quad \dots \dots (19b)$$

Welcher Wert $a_{jm} = k$ ausgewählt wird, hängt vom Aufnahmefall ab und kann durch Betrachten der Definitionsgleichungen (6a) im allgemeinen leicht entschieden werden. Für die üblichen Aufnahmefälle, Konvergent-, Schräg- und Senkrechtaufnahme sind $a_{23} = (j', k'', b)$ und $a_{32} = (k', j'', b)$ ungleich Null. Wir wollen daher in Zukunft $k = a_{23}$ setzen, beachten jedoch, daß die abgeleiteten Beziehungen durch Vertauschen von Indizes auch für beliebige andere Werte k aufgestellt werden können. Damit folgt als Matrix des inhomogenen Falles

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & 1 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \quad \dots\dots(19c)$$

deren Spalten und Zeilenvektoren \mathbf{n}_c , \mathbf{m}_c aus den entsprechenden der Matrix A durch die Beziehungen

$$\mathbf{n} = k \mathbf{n}_c, \quad \mathbf{m} = k \mathbf{m}_c \quad \dots(19d)$$

abgeleitet werden können.

Zwischen den acht Funktionen c_{ik} der fünf Orientierungsunbekannten bestehen drei Verträglichkeitsbedingungen. Diese müssen homogen in den a_{ik} sein und können aus den bereits bekannten Bedingungen für diese abgeleitet werden. Eine Bedingung ist offenbar bereits die Determinantenbedingung (8d), da diese homogen vom dritten Grade in den a_{ik} ist.

$$(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) \equiv k^3 (\mathbf{n}_{c1}, \mathbf{n}_{c2}, \mathbf{n}_{c3}) = 0$$

Die beiden anderen Bedingungen leiten wir aus den ersten drei Gleichungen (8c₃) ab, aus denen durch leicht erkennbare Operationen die beiden in den a_{ik} vom sechsten Grad homogenen Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1^2 (\bar{\mathbf{n}}_1^2 + \bar{\mathbf{n}}_2^2) - \mathbf{n}_3^2 (\bar{\mathbf{n}}_2^2 + \bar{\mathbf{n}}_3^2) &= 0 \\ \mathbf{n}_1^2 (\bar{\mathbf{n}}_1^2 + \bar{\mathbf{n}}_3^2) - \mathbf{n}_2^2 (\bar{\mathbf{n}}_2^2 + \bar{\mathbf{n}}_3^2) &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots (20)$$

folgen. Diese sind auch voneinander unabhängig, da wohl die erste, nicht aber die zweite durch das System

$$\mathbf{n}_1 (2, 0, 0) \quad , \quad \mathbf{n}_2 (0, 0, 0) \quad , \quad \mathbf{n}_3 (0, 0, 0)$$

erfüllt wird. Die Division durch k^6 ergibt die zwei restlichen Bedingungen für die \mathbf{n}_c , welche in Vektorform den obigen gleichen, wenn darin \mathbf{n} und $\bar{\mathbf{n}}$ durch \mathbf{n}_c und $\bar{\mathbf{n}}_c$ ersetzt werden.

Die Linearisierung dieser Gleichungen bereitet grundsätzlich keine Schwierigkeiten und kann in der gleichen Weise durch vektorielle Differentiation ausgeführt werden, wie dies für (17a) gezeigt wurde, doch ergeben sich umfangreiche Ausdrücke. Einfacher ist es, diese Gleichungen aus den bereits vorliegenden linearen Beziehungen (18) zwischen den a_{ik} abzuleiten. Zu diesem Zwecke führen wir in die ersten drei Gleichungen (18) die aus (19d) folgenden Beziehungen

$$d\mathbf{n} = \mathbf{n}_c dk + k d\mathbf{n}_c \quad \text{oder} \quad da_{ik} = c_{ik} dk + k dc_{ik}$$

ein und eliminieren daraus dk . Die in den Koeffizienten der dc auftretenden Werte k

können durch den bereits bekannten Näherungswert ausgedrückt werden. Aus (18b) folgt das System

$$k [\alpha \, dc] + [\alpha \, c] \, dk + w_1 = 0$$

$$k [\beta \, dc] + [\beta \, c] \, dk + w_2 = 0$$

$$k [\gamma \, dc] + [\gamma \, c] \, dk + w_3 = 0$$

und hieraus durch Elimination von dk schließlich Linearformen für zwei der Bedingungen zwischen den c_{ik} .

$$[\alpha' \, dc] + w_1' = 0 \quad \dots\dots(21a)$$

$$[\beta' \, dc] + w_2' = 0$$

$$\alpha' = [\gamma c] \alpha - [\alpha c] \gamma \quad \beta' = [\beta c] \alpha - [\alpha c] \beta$$

$$w_1' = \frac{1}{k} (w_1 [\gamma c] - [\alpha c] w_3'), \quad w_2' = \frac{1}{k} ([\beta c] w_1 - [\alpha c] w_2) \quad \dots\dots(21b)$$

Als dritte Gleichung kommt die letzte der Gleichungen (18) hinzu, wenn darin da_{ik} durch dc_{ik} ersetzt wird.

$$[\varepsilon \, dc] + w_3' = 0 \quad \dots\dots(21c)$$

$$w_3' = (\mathbf{n}_{c1}, \mathbf{n}_{c2}, \mathbf{n}_{c3})$$

Die Bestimmung von Näherungswerten für die c_{ik} können wir auf zwei verschiedenen Wegen erreichen, durch die Auflösung eines durch acht Punktepaare gegebenen Systemes oder iterativ, aus den theoretisch erforderlichen fünf Punktepaaren.

6. 1. 1. Berechnung aus acht homologen Punktepaaren

Für die weitere Betrachtung führen wir erst eine zweckmäßigere Bezeichnung in die Schnittbedingung ein. Die Matrix der Koeffizienten von (19b) sei \mathbf{K}_1 , der Vektor der Unbekannten \mathbf{x} und der Vektor des Absolutgliedes \mathbf{w} .

$$\mathbf{x}^T = (c_{11} \, c_{21} \, c_{31}, c_{12} \, c_{22} \, c_{32}, c_{13} \, c_{33})$$

$$\mathbf{K}_1 = (x'x'', y'x'', -fx'', x'y'', y'y'', -fy'', -x'f, f^2) \quad \dots\dots(22a)$$

$$\mathbf{w}_1 = (-y'f)$$

Mit diesen Bezeichnungen geht (6c₃) in die Beziehung

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{w} = 0 \quad \dots\dots(22b)$$

über. Liegen mehr als acht homologe Punktepaare vor, so hätte es wenig Sinn eine strenge Ausgleichung durchzuführen, da ja nur Näherungswerte beschafft werden sollen. Wir werden daher zweckmäßig das Normalgleichungssystem

$$\mathbf{K}_1^T \mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{K}_1^T \mathbf{w} = 0 \quad \dots\dots(22c)$$

bilden und aus diesem \mathbf{x} berechnen. Aus der leicht zu bestätigenden Beziehung

$$\mathbf{n}_1^2 + \mathbf{n}_2^2 + \mathbf{n}_3^2 \equiv k^2 (1 + \mathbf{x}^2) = 2$$

können wir dann bis auf das Vorzeichen den Faktor k bestimmen.

$$k = \pm \sqrt{\frac{2}{1 + [c^2]}} \quad \dots\dots(23)$$

Das Vorzeichen von $k = a_{lm}$ muß aus Angaben über den Aufnahmefall bestimmt werden, es ist bei Konvergent-, Schräg- und Normalaufnahmen immer positiv. Mit k ergeben sich nach (19a) Näherungswerte (a_{ik}).

Da mindestens acht Punktepaare benutzt werden müssen, um die c_{ik} nach dem angegebenen Verfahren zu bestimmen und dazu noch drei Verträglichkeitsbedingungen, also insgesamt elf Gleichungen für die acht Unbekannten c_{ik} gegeben sind, erhalten wir die besten Werte durch eine Ausgleichung. Diese soll so erfolgen, daß die Quadratsumme der Verbesserungen v der Meßwerte $x'y'$, $x''y''$ (Bildkoordinaten) minimal wird.

$$(x) + v_x = x, \quad (y) + v_y = y \quad \dots\dots(24a)$$

Um den Ausgleichungsfall zu formulieren, müssen wir die Schnittbedingungen hinsichtlich der Verbesserungen v linearisieren und auch Zuschläge dc_{ik} für die nach (22c) bestimmten Näherungen (c_{ik}) einführen.

Aus (19b) folgt erst die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{w}_1 &= 0 \\ \mathbf{x} &= (dc), \quad \mathbf{w}_1 = \mathbf{p}_1'^T (\mathbf{C}) \mathbf{p}_2'' \end{aligned} \quad \dots\dots(24b)$$

und zu dieser kommt (durch die Linearisierung der Meßwerte) in jeder Gleichung ein Ausdruck von der Form

$$f_1 v_x' + f_2 v_y' + f_3 v_x'' + f_4 v_y'', \quad \dots\dots(24c)$$

dessen Koeffizienten durch die nachstehenden Beziehungen gegeben sind:

$$\begin{aligned} f_1 &= x'' c_{11} + y'' c_{12} - f c_{13} = \mathbf{p}_2''^T \mathbf{m}_{e1} \\ f_2 &= x'' c_{21} + y'' c_{22} - f = \mathbf{p}_2''^T \mathbf{m}_{e2} \\ f_3 &= x' c_{11} + y' c_{21} - f c_{31} = \mathbf{p}_1'^T \mathbf{n}_{e1} \\ f_4 &= x' c_{12} + y' c_{22} - f c_{32} = \mathbf{p}_1'^T \mathbf{n}_{e2} \end{aligned} \quad \dots\dots(24d)$$

Da jedes homologe Punktepaar nur in einer einzigen Gleichung vorkommt, hat die Matrix der Koeffizienten der Verbesserungen

$$v = ((v_x' v_y' v_x'' v_y'')_1, (v_x' v_y' v_x'' v_y'')_2, (v_x' v_y' v_x'' v_y'')_3 \dots) \quad \dots\dots(24e)$$

die folgende einfache Form:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} & f_{31} & f_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \dots \end{pmatrix} \quad \dots\dots(24f)$$

Führen wir nun noch die Matrix \mathbf{K}_2 der Koeffizienten der linierisierten Verträglichkeitsbedingungen (21a, b, c) und den Vektor \mathbf{w}_2 der Absolutglieder dieser Gleichung ein

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} \alpha'_{ik} \\ \beta'_{ik} \\ \gamma'_{ik} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \\ w_3' \end{pmatrix}, \quad \dots\dots(24g)$$

so bilden Schnittbedingungen und Verträglichkeitsbedingung ein System von Fehlergleichungen mit je vier Beobachtungsgrößen und drei Bedingungen.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{v} + \mathbf{K}_1\mathbf{x} + \mathbf{w}_1 &= 0 \\ \mathbf{K}_2\mathbf{x} + \mathbf{w}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Darin kann $\mathbf{w}_1 = \mathbf{K}_1(\mathbf{x})$ gesetzt werden, wenn nur acht Schnittbedingungen vorliegen. Die Auflösung des Systemes führt auf die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1^T \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{K}_2^T \mathbf{k} + \mathbf{K}_1^T \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{w}_1 &= 0 \\ \mathbf{K}_2 \mathbf{x} + \mathbf{w}_2 &= 0, \end{aligned} \quad \dots\dots(25b)$$

welche ein Normalgleichungssystem für die Unbekannten \mathbf{x} und die Korrelaten \mathbf{k} der Verträglichkeitsbedingungen darstellen. Wegen der besonderen Form von \mathbf{F} ist das Produkt

$$\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix} [f_1^2] & \dots & \dots \\ \dots & [f_2^2] & \dots \\ \dots & \dots & [f_3^2] \end{pmatrix} = \mathbf{G}^{-1}$$

eine Diagonalmatrix und kann als reziproke Gewichtsmatrix angesehen werden.

$$\frac{1}{g_i} = [f_i^2]$$

Damit geht das obige System in das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_1^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2^T \\ \mathbf{K}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \dots\dots(25c)$$

über, dessen Auflösung \mathbf{x} und \mathbf{k} ergibt.

Führen wir die Berechnung im System $\mathbf{K}(U, e_i)$ aus, so ist die Ermittlung der Koeffizienten der Verbesserungen v_x, v_y etwas umständlicher. Aus (14a₁) folgt erst der Ausdruck

$$g_1' du' + g_2' dv' + g_3' dw' + g_3 dx'' + g_4 dy'',$$

dessen Koeffizienten sich aus dem folgenden System ergeben:

$$\begin{aligned} g_1' &= f_1 \\ g_2' &= f_2 \\ g_3' &= x'' c_{31} + y'' c_{32} - f c_{33} \\ g_3 &= u' c_{11} + v' c_{21} + w' c_{31} \\ g_4 &= u' c_{12} + v' c_{22} + w' c_{32} \end{aligned}$$

Führen wir darin die aus (2c) folgenden Beziehungen

$$du' = i_1' dx' + j_1' dy', \quad dv' = i_2' dx' + j_2' dy', \quad dw' = i_3' dx' + j_3' dy'$$

ein, so erhalten wir, in Analogie zu (22d), für jede Gleichung (14a₁) einen zusätzlichen Ausdruck

$$g_1 v_x' + g_2 v_y' + g_3 v_x'' + g_4 v_y'' \quad \dots\dots(26a)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} g_1 &= \mathbf{i}_1'^T \mathbf{C} \mathbf{p}_2'' = i_1' g_1' + i_2' g_2' + i_3' g_3' \\ g_2 &= \mathbf{j}_1'^T \mathbf{C} \mathbf{p}_2'' = j_1' g_1' + j_2' g_2' + j_3' g_3' \\ g_3 &= \mathbf{p}'^T \mathbf{n}_{c1} \\ g_4 &= \mathbf{p}'^T \mathbf{n}_{c2}, \end{aligned} \quad \dots\dots(26b)$$

der in der Folge in gleicher Weise zu behandeln ist wie der entsprechende (24d).

6. 1. 2. Berechnung aus fünf homologen Punktepaaren

Der Spalten- oder Zeilenvektor der Matrix C , welcher das Element 1 enthält ist bereits durch zwei Werte c bestimmt. Aus fünf Schnittbedingungen (19b) lassen sich daher genäherte Elemente von zwei Spalten-(oder Zeilen-)Vektoren berechnen, wenn die restlichen als klein angesehen werden können.

Wie bisher sei $c_{23} = 1$ und wir stellen uns die Aufgabe, die Vektoren \mathbf{n}_{c2} , \mathbf{n}_{c3} aus fünf Gleichungen (19b) zu ermitteln, wenn \mathbf{n}_{c1} klein angenommen werden darf (dies ist z. B. für den Fall, wenn \mathbf{i}'' nahezu parallel zur Basis \mathbf{b} ist). Zu diesem Zweck zerlegen wir C in zwei Matrizen

$$C = C_2 + C_1 = (0, \mathbf{n}_{c2}, \mathbf{n}_{c3}) + (\mathbf{n}_{c1}, 0, 0)$$

und führen diese in (19b) ein.

$$\mathbf{p}'^T C_2 \mathbf{p}'' + \mathbf{p}'^T C_1 \mathbf{p}'' = 0$$

Dieses System lösen wir nun iterativ auf. Wir setzen erst $C_1 = 0$ und bestimmen aus

$$\mathbf{p}'^T C_2 \mathbf{p}'' = 0$$

Näherungswerte (\mathbf{n}_{c2}) (\mathbf{n}_{c3}) . Mit diesen berechnen wir aus den in den vorigen Abschnitten enthaltenen Beziehungen einen Näherungswert (\mathbf{n}_{c1}) , welcher nun zu einer Verbesserung des Absolutgliedes der Gleichung benutzt wird. Die Auflösung des Systemes

$$\mathbf{p}'^T C_2 \mathbf{p}'' + \mathbf{p}'^T (C_1) \mathbf{p}'' = 0$$

gibt zweite Näherungen $(\mathbf{n}_{c2})_2$, $(\mathbf{n}_{c3})_2$ und aus diesen folgt eine zweite Näherung $(\mathbf{n}_{c1})_2$ usw. Wir wollen den Vorgang nun ausführlich beschreiben und gehen von fünf Gleichungen (22a, b) für die acht Unbekannten c aus,

$$\mathbf{Kx} + \mathbf{w} = 0 \quad \dots\dots(27a)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{n}_{c1} + \mathbf{n}_{c2} + \mathbf{n}_{c3} = (c_{ik}),$$

welche wir in zwei Teile aufspalten.

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{K}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{w} = 0 \quad \dots\dots(27b)$$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{n}_{c2} + \mathbf{n}_{c3}, \mathbf{x}_2 = \mathbf{n}_{c1}$$

$$\mathbf{K}_1 = (x'y'', y'y'', -fy'', -x'f, f^2) \quad \dots\dots(27c)$$

$$\mathbf{K}_2 = (x'x'', y'x'', -fx'')$$

$$\mathbf{w} = (-y'f)$$

Im ersten Iterationsschritt setzen wir $\mathbf{x}_2 = 0$ und bestimmen aus

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{w} = 0$$

eine Näherung $(\mathbf{x}_1)_1 = (\mathbf{n}_{c2})_1 + (\mathbf{n}_{c3})_1$. Diese führen wir in die erste der Gleichungen (8c₂) ein und erhalten eine Gleichung vierten Grades für die Bestimmung eines Näherungswertes von k .

$$k^4 A^2 - k^2 B^2 + 1 = 0 \quad \dots\dots(28a)$$

$$A^2 \equiv (\mathbf{n}_{c2} \times \mathbf{n}_{c3})^2 = (c_{22} c_{33} - c_{32})^2 + (c_{32} c_{13} - c_{12} c_{33})^2 + (c_{12} - c_{13} c_{22})^2$$

$$B^2 \equiv \mathbf{n}_{c2}^2 + \mathbf{n}_{c3}^2 = c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2 + c_{13}^2 + c_{33}^2 + 1$$

Die Gleichung hat in k^2 die Wurzeln

$$k^2 = \frac{1}{2A^2} (B^2 \pm \sqrt{B^4 - 4A^2}) \quad \dots\dots (28b)$$

und es läßt sich zeigen, daß nur das negative Vorzeichen sinnvoll ist. Führen wir in die Gleichungen (28a) die Beziehungen (7d, e) ein, so folgt

$$\begin{aligned} k^4 A^2 &= \cos^2(\mathbf{b}i'') \\ k^2 B^2 &= 1 + \cos^2(\mathbf{b}i''), \quad \pm k \sqrt{B^4 - 4A^2} = (1 - \cos^2(\mathbf{b}i'')), \end{aligned}$$

und daraus erhalten wir die Identität

$$2 \cos^2(\mathbf{b}i'') \equiv (1 + \cos^2(\mathbf{b}i'')) \pm (1 - \cos^2(\mathbf{b}i'')),$$

welche offenbar nur für das negative Vorzeichen der Wurzel besteht. k selbst wird bis auf das Vorzeichen bestimmt, dieses ist jedoch für die üblichen Aufnahmefälle, wie bereits in (5. 1. 1) ausgeführt, immer positiv. Damit bilden wir

$$\mathbf{n}_2 = k \mathbf{n}_{c2}, \quad \mathbf{n}_3 = k \mathbf{n}_{c3}$$

und berechnen nach den Beziehungen (7d, 7e) die Richtungskosinusse \mathbf{b}'' des Basisvektors \mathbf{b} im örtlichen System K_2 ($0''$).

$$b_1'' = |\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3|, \quad b_2'' = \sqrt{1 - \mathbf{n}_2^2}, \quad b_3'' = \sqrt{1 - \mathbf{n}_3^2}, \quad b_2'' b_3'' = -\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3$$

Nach Gleichung (8e) können wir dann den gesuchten Vektor berechnen.

$$\mathbf{n}_{c1} = -\frac{b_2''}{b_1''} \mathbf{n}_{c2} - \frac{b_3''}{b_1''} \mathbf{n}_{c3} \quad \dots\dots (28c)$$

Dieser ist bis auf das Vorzeichen bestimmt, da b_2'' , b_3'' aus Wurzelausdrücken erhalten werden und das Vorzeichen ihres Produktes bekannt ist. Die Vorzeichen bestimmen wir aus der Tatsache, daß nach (7e) die äußeren Produkte $\frac{1}{b_{i+2}''} (\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_{i+1})$ parallel sein müssen.

Mit \mathbf{n}_{c1} bilden wir verbesserte Absolutglieder der Gleichung

$$(\mathbf{w})_1 = \mathbf{w} + \mathbf{K}_2 (\mathbf{n}_{c1})_1,$$

berechnen damit aus

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{x}_1 + (\mathbf{w})_1 = \mathbf{0}$$

zweite Näherungen $(\mathbf{x}_1)_2 = (\mathbf{n}_{c2})_2 + (\mathbf{n}_{c3})_2$ usw. Beim Iterationsprozeß wird die Matrix des Systemes nicht geändert, nur die Absolutglieder erfahren Verbesserungen; es ist daher zweckmäßig, die Matrix \mathbf{K}_1 zu invertieren.

Das beschriebene Verfahren kann auch mit zwei Zeilenvektoren ausgeführt werden, von denen einer das Element $c_{im} = 1$ enthält. Sind dies \mathbf{m}_{c2} , \mathbf{m}_{c3} , so bestehen wiederum die Gleichungen (26a), deren Koeffizienten aber nun aus

$$A^2 \equiv (\mathbf{m}_{c2} \times \mathbf{m}_{c3})^2 = (c_{22} c_{33} - c_{32})^2 + (c_{31} - c_{21} c_{33})^2 + (c_{21} c_{32} - c_{22} c_{31})^2$$

$$B^2 \equiv \mathbf{m}_{c2}^2 + \mathbf{m}_{c3}^2 = c_{21}^2 + c_{22}^2 + 1 + c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2$$

zu berechnen sind. Aus k bilden wir wieder

$$\mathbf{m}_2 = k \mathbf{m}_{c2}, \quad \mathbf{m}_3 = k \mathbf{m}_{c3}$$

und erhalten die Komponenten \mathbf{b}' des Basisvektors im System K_1 ($0'$) nach (9c, d)

durch Normierung der Vektoren $\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_3$ und $\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3$. Die Anwendung der Beziehung (10e) gibt dann bis auf das Vorzeichen

$$\mathbf{m}_{c1} = -\frac{b_2'}{b_1'} \mathbf{m}_{c2} - \frac{b_3'}{b_1'} \mathbf{m}_{c3} \quad \dots\dots(28d)$$

und dieses erhalten wir nach (9d) durch die Forderung:

$$\text{sign} \frac{1}{b_i'} (\mathbf{m}_i \times \mathbf{m}_{i+1}) = \text{konst.}$$

6. 2. Interpolation einer Drehmatrix

Eine aus Näherungswerten (a_{ik}) abgeleitete Matrix (R) wird meist kleine Abweichungen von einer normierten und orthogonalen Drehmatrix R aufweisen. Um daraus aber eindeutig Aussagen über die Drehwinkel ableiten zu können, scheint es angebracht, der berechneten Matrix eine mit ihr möglichst gut übereinstimmende Drehmatrix zuzuordnen. Wir wollen nun diese Matrix R_1 so interpolieren, daß die Quadratsumme der Klaffungen der entsprechenden Spaltenvektoren zwischen gegebener Näherung (R) und Interpolationsmatrix R_1 ein Minimum wird.

Wir bezeichnen die normierten Spaltenvektoren der gegebenen Näherungsmatrix (R) mit $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ die entsprechenden Vektoren der zu interpolierenden Matrix R_1 mit $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Dann sind

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{a}, \quad \mathbf{d}_2 = \mathbf{j} - \mathbf{b}, \quad \mathbf{d}_3 = \mathbf{k} - \mathbf{c}$$

die Klaffungsvektoren und die Interpolationsbedingung lautet:

$$[d^2] = (\mathbf{i} - \mathbf{a})^2 + (\mathbf{j} - \mathbf{b})^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{c})^2 = \text{Min.} \quad \dots\dots(29a)$$

Zur Ermittlung von $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ gehen wir von einer Näherungslage (R_1) für die orthogonale Matrix R_1 aus

$$(\mathbf{i}) = \mathbf{a}, (\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}, (\mathbf{j}) = (\mathbf{k}) \times (\mathbf{i}) \quad \dots\dots(29b)$$

und denken uns die Spaltenvektoren um kleine Beträge verdreht, was mit Hilfe eines Drehvektors $\Delta \mathbf{u}$ erreicht wird.

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= (\mathbf{i}) + \Delta \mathbf{u} \times (\mathbf{i}) \\ \mathbf{j} &= (\mathbf{j}) + \Delta \mathbf{u} \times (\mathbf{j}), \quad \Delta \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{k} &= (\mathbf{k}) + \Delta \mathbf{u} \times (\mathbf{k}) \end{aligned}$$

Führen wir diese Beziehungen in (29a) ein, so erhalten wir eine Funktion der drei Komponenten $\Delta \mathbf{u}$.

$$\begin{aligned} [d^2] &= (\mathbf{i} - \mathbf{a})^2 + (\mathbf{j} - \mathbf{b})^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{c})^2 - 2(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \Delta \mathbf{u}) - 2(\mathbf{b}, \mathbf{j}, \Delta \mathbf{u}) - \\ &- 2(\mathbf{c}, \mathbf{k}, \Delta \mathbf{u}) + (\mathbf{i} \times \Delta \mathbf{u})^2 + (\mathbf{j} \times \Delta \mathbf{u})^2 + (\mathbf{k} \times \Delta \mathbf{u})^2 \end{aligned}$$

Aus dieser folgen durch Differenzieren nach $\Delta \mathbf{u}_i$ drei Gleichungen, deren erste wegen

$$\frac{d \Delta \mathbf{u}}{d \Delta \mathbf{u}_i} = \mathbf{e}_i$$

durch den Ausdruck

$$\frac{\partial [d^2]}{\partial \Delta u_1} \equiv -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{e}_1) - (\mathbf{b}, \mathbf{j}, \mathbf{e}_2) - (\mathbf{c}, \mathbf{k}, \mathbf{e}_3) + (\mathbf{i} \times \Delta \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{e}_1) \\ + (\mathbf{j} \times \Delta \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{e}_1) + (\mathbf{k} \times \Delta \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_1) = 0$$

gegeben ist. Hieraus folgt nach einfachen Umformungen

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{a} + \mathbf{j} \times \mathbf{b} + \mathbf{k} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}_1 + 3 \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1 - (i_1 \mathbf{i} + j_1 \mathbf{j} + k_1 \mathbf{k}) \cdot \Delta \mathbf{u} = 0$$

und hieraus, da die Näherungsmatrix (\mathbf{R}_1) orthogonal und normiert eingeführt wurde, also

$$i_1 \mathbf{i} + j_1 \mathbf{j} + k_1 \mathbf{k} = (i_1^2 + j_1^2 + k_1^2) \mathbf{e}_1 + (i_1 i_2 + j_1 j_2 + k_1 k_2) \mathbf{e}_2 + \\ + (i_1 i_3 + j_1 j_3 + k_1 k_3) \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$$

sein muß, schließlich:

$$((\mathbf{i} \times \mathbf{a} + \mathbf{j} \times \mathbf{b} + \mathbf{k} \times \mathbf{c}) - 2 \Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_1 = 0$$

Die Differentiation nach den Komponenten Δu_2 , Δu_3 führt zu den analogen Gleichungen.

$$((\mathbf{i} \times \mathbf{a} + \mathbf{j} \times \mathbf{b} + \mathbf{k} \times \mathbf{c}) - 2 \Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_2 = 0$$

$$((\mathbf{i} \times \mathbf{a} + \mathbf{j} \times \mathbf{b} + \mathbf{k} \times \mathbf{c}) - 2 \Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_3 = 0$$

Es muß daher der gemeinsame Klammerausdruck verschwinden und die folgende Beziehung für $\Delta \mathbf{u}$ gelten:

$$2 \Delta \mathbf{u} = (\mathbf{i} \times \mathbf{a} + \mathbf{j} \times \mathbf{b} + \mathbf{k} \times \mathbf{c}) \quad \dots\dots(29c)$$

Wegen der in (29b) getroffenen Annahme ist $(\mathbf{i} \times \mathbf{a}) = 0$ und wir erhalten:

$$2 \Delta \mathbf{u} = (\mathbf{j} \times \mathbf{b} + \mathbf{k} \times \mathbf{c}) \quad \dots\dots(29d)$$

Dem Drehvektor entspricht eine Matrix \mathbf{U} , welche sich ergibt, wenn in (1c)

$$\sin \omega = \Delta u_1, \quad \sin \varphi = \Delta u_2, \quad \sin \varkappa = \Delta u_3$$

eingeführt wird. Für kleine Werte $\Delta \mathbf{u}$ kann

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta u_3 & \Delta u_2 \\ \Delta u_3 & 1 & -\Delta u_1 \\ -\Delta u_2 & \Delta u_1 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(29e)$$

gesetzt werden. Die gesuchte Drehmatrix, welche die Bedingung (29a) erfüllt, ist dann durch

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{U} (\mathbf{R}_1) \quad \dots\dots(29f)$$

bestimmt. Zahlenbeispiele für die beschriebene Interpolation sind im nächsten Abschnitt enthalten (Seite 27, 28).

6.3. Zahlenbeispiel

Wir zeigen nun die Anwendung der in Abschnitt 6.1.1. durchgeführten Überlegungen an dem bereits in Abschnitt 5 benutzten Beispiel. Wir entnehmen [3] die Bildkoordinaten von acht homologen Punktpaaren und transformieren nach (2c) die Koordinaten für das linke feste Bild in das System K der Paßpunkte. Das Ergebnis ist in **Tabelle 2** zusammengestellt.

Nun berechnen wir nach (22a) die Matrix der Gleichung (22b) für die Hilfsunbekannten c im System K_1 der linken Aufnahme und dividieren jede Gleichung durch f^2 um dimensionslose Werte zu erhalten. Das Koeffizientenschema ist in **Tabelle 3a** enthalten. Außerdem bilden wir die später ebenfalls benötigte Koeffizientenmatrix der c im System K und dividieren deren Zeilen durch $(-w f)$, so daß die Spalte 33, **Tabelle 3a** wieder lauter Einser enthält.

Die Auflösung des linearen Systemes **Tabelle 3a** (auf IBM 650) gibt die in der letzten Zeile der Tabelle aufgeführten Näherungen für die Elemente der Matrix C .

$$(C) = \begin{pmatrix} + 069 191 & - 389 533 & + 095 573 \\ - 161 591 & + 169 269 & 1 \\ + 168 331 & - 912 387 & + 173 668 \end{pmatrix}$$

Nun verbessern wir die Werte c und erzwingen die Erfüllung der drei Bedingungen (21a, b, c). Zu diesem Zweck berechnen wir erst die Koeffizienten α' , β' , γ' der Matrix K_2 und die Widersprüche w_i für diese Gleichungen, sowie die fingierten Gewichte g . Diese Werte stellen wir in **Tabelle 4** zusammen, die Gewichte dividieren wir durch den Maximalwert und vermerken die Quotienten in der letzten Spalte von **Tabelle 3a**.

Sodann berechnen wir das System (25c), dessen erste Spalte des Absolutgliedes wegen $w_1 = 0$ verschwinden muß. Für die Reduktion multiplizieren wir die Absolutglieder w_2 mit 10^3 , um mehr gültige Stellen zu erhalten und stellen die Matrix des sich ergebenden Systemes in **Tabelle 5** zusammen. Die Auflösung (mit IBM 650) gibt die in der letzten Zeile von **Tabelle 5** aufgeführten Werte dC , welche eine Verbesserungsmatrix dC bestimmen und zu einer verbesserten Matrix C führen.

$$C = (C) + dC = \begin{pmatrix} + 068 970 & - 388 581 & + 095 370 \\ - 162 545 & + 169 094 & 1 \\ + 168 331 & - 912 362 & + 173 667 \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir nach (23) den Wert $k = 973 409$ und bilden damit die Matrix

$$A = k C = \begin{pmatrix} + 067 136 & - 378 248 & + 092 834 \\ - 158 223 & + 164 598 & + 973 409 \\ + 163 855 & - 888 101 & + 169 049 \end{pmatrix}$$

und ihre Adjungierte:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} + 892 311 & + 186 245 & + 113 548 \\ - 018 504 & - 003 862 & - 002 354 \\ - 383 470 & - 080 039 & - 048 797 \end{pmatrix}$$

Die Normierung des ersten Spaltenvektors derselben, welcher die größten Zahlenwerte besitzt, gibt den Basisvektor b_1 im System K_1 .

$$b_1 = \begin{pmatrix} + 918 586 \\ - 019 049 \\ - 394 762 \end{pmatrix}$$

Hierauf berechnen wir nach den Formeln (12a) die Elemente der Drehmatrix R_1'' des anschließenden Bündels im System K_1 der festen Aufnahme.

$$\mathbf{R}_1'' = \begin{pmatrix} + 826\ 729 & + 268\ 139 & + 494\ 593 \\ - 195\ 522 & + 961\ 253 & - 194\ 287 \\ - 527\ 533 & + 063\ 953 & + 847\ 131 \end{pmatrix}$$

Die linksseitige Multiplikation von \mathbf{b}_1 und \mathbf{R}_1'' mit der Drehmatrix \mathbf{R}' der linken (festen) Aufnahme ergibt die gesuchten Werte \mathbf{b} , \mathbf{R}'' im System K der Paßpunkte.

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} + 975\ 536 \\ + 121\ 968 \\ - 182\ 904 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}'' = \begin{pmatrix} + 947\ 362 & + 084\ 300 & + 358\ 862 \\ - 078\ 421 & + 996\ 423 & - 031\ 401 \\ - 310\ 412 & + 005\ 563 & + 950\ 588 \end{pmatrix}$$

Daraus berechnen wir Basisvektor und Orientierungswinkel, wobei wir für b_x den strengen Wert 1600,00 einführen.

$$\begin{array}{rcl} b_x = 1600,00 & \text{Diff.} & 0,00 \\ b_y = 200,04 & - 0,04 & \\ b_z = 299,99 & + 0,01 & \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \varphi'' = 20,0000 & \text{Diff.} & 0^{\text{cc}} \\ \omega'' = & & + 4 \\ \varkappa'' = 5,0001 & & - 1 \end{array}$$

Um die Anwendung der Formeln für das System K der Paßpunkte zu zeigen wiederholen wir die Auflösung für dieses, verzichten aber auf eine Verbesserung der Werte c . Die Auflösung des in **Tabelle 3b** enthaltenen Systemes (siehe letzte Zeile) gibt die Näherung:

$$(\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} + 053\ 128 & - 186\ 730 & - 111\ 844 \\ - 130\ 820 & + 021\ 180 & 1 \\ + 195\ 156 & - 977\ 761 & + 069\ 462 \end{pmatrix}$$

Nach Formel (23) erhalten wir $k = 983\ 733$, bilden mit diesem Wert

$$(\mathbf{A}) = k(\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} + 052\ 264 & - 183\ 692 & - 110\ 025 \\ - 128\ 692 & + 020\ 835 & + 983\ 730 \\ + 191\ 981 & - 961\ 856 & - 068\ 332 \end{pmatrix}$$

und die adjungierte Matrix:

$$(\bar{\mathbf{A}}) = \begin{pmatrix} + 947\ 633 & + 197\ 652 & + 119\ 783 \\ + 118\ 380 & + 024\ 694 & + 015\ 005 \\ - 178\ 412 & - 037\ 254 & - 022\ 551 \end{pmatrix}$$

Nun wenden wir die Formeln (16a, b) an, die zwar etwas umfangreicher sind als die vorher benutzten Formeln (12a), aber völlig schematisch zum Ziele führen. Wir berechnen nach (16a) erst

$$\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} + 951\ 420 & + 118\ 788 & - 179\ 201 \\ + 118\ 788 & + 015\ 274 & - 022\ 472 \\ - 179\ 201 & - 022\ 474 & + 033\ 307 \end{pmatrix}$$

und erhalten durch Normieren des ersten Spaltenvektors, welcher die größten Zahlenwerte besitzt, einen Näherungswert (\mathbf{b}) für den Basisvektor.

$$(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} + 975\ 406 \\ + 121\ 783 \\ - 183\ 719 \end{pmatrix}$$

Sodann gehen wir mit der aus (b) gebildeten Matrix (B) und (A), (\bar{A}) in Gleichung (16b) ein und bestimmen eine Näherung für die Matrix (R'') der zweiten Aufnahme.

$$(R'') = (B)(A) - (A) = \begin{pmatrix} + 947\ 370 & + 084\ 342 & + 308\ 835 \\ - 078\ 481 & + 996\ 642 & - 031\ 433 \\ - 310\ 304 & + 005\ 439 & + 950\ 387 \end{pmatrix}$$

Wegen der benutzten Näherungen (c) erfüllt (R) die Normierungs- und Orthogonalitätsbedingung nicht streng. Wir ordnen ihr daher nach 6. 2. eine „bestanschließende“ Matrix zu, welche diese Eigenschaften besitzt. Wir erhalten hiefür der Reihe nach:

$$(R_1'') = \begin{pmatrix} + 947\ 390 & + 084\ 323 & + 308\ 896 \\ - 078\ 483 & + 996\ 424 & - 031\ 439 \\ - 310\ 311 & + 005\ 438 & + 950\ 576 \end{pmatrix}, \Delta u = \begin{pmatrix} - 000\ 058 \\ - 000\ 065 \\ + 000\ 016 \end{pmatrix}$$

$$R_1'' = \begin{pmatrix} + 947\ 411 & + 084\ 310 & + 308\ 714 \\ - 078\ 486 & + 996\ 426 & - 031\ 258 \\ - 310\ 245 & + 005\ 385 & + 950\ 642 \end{pmatrix}$$

Wie früher berechnen wir nun den Basisvektor und die Orientierungswinkel.

	Diff.		Diff.		Diff.
$b_x = 1600.00$	0,00	$\varphi_1'' = 19,990^\circ$	+ 1 ^c	$(\varphi_1'') = 19.998^\circ$	+ 0,2 ^c
$b_y = 199.77$	+ 0,23	$\omega_1'' = 1,990^\circ$	+ 1 ^c	$(\omega_1'') = 2.002^\circ$	- 0,2 ^c
$b_z = 301.36$	- 1,36	$\alpha_1'' = 5,004^\circ$	- 0,4 ^c	$(\alpha_1'') = 5.004^\circ$	- 0,4 ^c

Wir erhalten in der Z-Komponente der Basis eine größere Abweichung, die übrigen Komponenten und Orientierungswinkel stimmen aber gut mit der Lösung überein. Auch die in der dritten Spalte enthaltenen Werte, welche sich ohne Normierung der Matrix aus der dritten Spalte und den Elementen i_2, j_2 ergeben, stellen bereits gute Näherungen dar. Die Benutzung der aus dem linearen System folgenden Werte c führt also zu recht brauchbaren Näherungen, welche sogar für viele Zwecke völlig ausreichen können. Die Verbesserung derselben kann sowohl nach dem gezeigten, als auch nach jedem der bekannten Iterationsverfahren erfolgen. Wegen der Güte der Näherung werden im allgemeinen ein oder zwei Schritte genügen.

Nun sei noch die Anwendung des Verfahrens auf genäherte Senkrechtaufnahmen gezeigt, obwohl für diesen Fall wegen des möglichen Verschwindens der Gleichungsdeterminante des linearen Systems (siehe 7. 1.) Schwierigkeiten auftreten können und andere Verfahren besser zum Ziele führen. Wir betrachten das Modell III-IV des Teststreifens 1 der Deutschen Geodätischen Kommission (siehe [3]) und führen die Berechnungen im System K (U, e) der Paßpunkte durch. Aus den in **Tabelle 6** angegebenen Orientierungsdaten für die linke Aufnahme und den Bildkoordinaten von acht homologen Punktepaaren berechnen wir auch $u' v' w'$ und bilden das Koeffizientenschema für die Bestimmungsgleichung der c (**Tabelle 7**).

Die Auflösung (auf IBM 650) liefert:

$$(C) = \begin{pmatrix} - 001\ 348 & + 063\ 374 & + 011\ 516 \\ - 057\ 449 & - 011\ 416 & 1 \\ + 010\ 948 & - 999\ 273 & - 010\ 717 \end{pmatrix}$$

Aus diesen Werten ermitteln wir $k = 998\,413$ nach (23), bilden

$$(\mathbf{A}) = k(\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} -001\,346 & +063\,274 & +011\,498 \\ -057\,357 & -011\,398 & +998\,413 \\ +010\,931 & -997\,688 & -010\,700 \end{pmatrix}$$

und bestimmen auch die adjungierte Matrix:

$$(\bar{\mathbf{A}}) = \begin{pmatrix} +996\,104 & +010\,300 & +057\,349 \\ -010\,794 & -000\,111 & -000\,651 \\ +063\,304 & +000\,684 & +003\,644 \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir

$$\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} +995\,862 & -010\,836 & +063\,265 \\ -010\,836 & -000\,248 & +000\,062 \\ +063\,265 & +000\,062 & +004\,385 \end{pmatrix}$$

und erhalten durch Normieren der ersten Spalte, in welcher die größten Zahlenwerte auftreten, einen Näherungswert für den Basisvektor.

$$(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} +997\,930 \\ -010\,858 \\ +063\,396 \end{pmatrix}$$

Sodann bilden wir

$$(\mathbf{R}) = (\mathbf{B})(\mathbf{A}) - (\bar{\mathbf{A}}) = \begin{pmatrix} +999\,622 & +021\,855 & -005\,830 \\ -021\,788 & +999\,523 & +010\,756 \\ +006\,051 & -010\,003 & +100\,115 \end{pmatrix}$$

und die „bestanschließende orthogonale Matrix“ hiezu.

$$(\mathbf{R}_1'') = \begin{pmatrix} +999\,743 & +021\,845 & -005\,834 \\ -021\,787 & +999\,710 & +009\,824 \\ +006\,047 & -009\,694 & +999\,932 \end{pmatrix}$$

Aus (b) und (\mathbf{R}_1'') erhalten wir die nachfolgenden Näherungswerte.

	Diff.		Diff.		Diff.
$b_x = 800.00$	0,00	$\varphi'' = 0^{\circ}33,8'$	+ 1,2'	$(\varphi_1'') = 0^{\circ}37,0'$	- 1,8'
$b_y = 8.70$	+ 1,30	$\omega'' = 0^{\circ}20,0'$	0	$(\omega_1'') = 0,0'$	0
$b_z = 50.82$	- 0,82	$\alpha'' = 1^{\circ}14,8'$	+ 0,2'	$(\alpha_1'') = 1^{\circ}14,8'$	+ 0,2'

Für die Basiskomponenten folgen auch in diesem sehr ungünstigen Fall brauchbare, für die Orientierungswinkel sogar gute Näherungen.

7. Orientierung von genäherten Senkrechtaufnahmen

Für die Orientierung genäherter Senkrechtaufnahmen gibt es eine Reihe gut konvergierender Verfahren, so daß ein praktischer Bedarf für ein neues wohl nicht bestehen dürfte. Lediglich die Beschaffung von guten Näherungen, welche die Anzahl der Iterationen abkürzen, kann von Interesse sein. Aber auch dabei ist zu überlegen, ob der Gewinn einiger Iterationsschritte die Einschaltung eines neuen Formelsystems rechtfertigt. Trotzdem soll im folgenden die abgeleitete Theorie auf genäherte

Senkrechtaufnahmen angewendet werden, einmal der Vollständigkeit wegen und auch deshalb, weil sich interessante, bisher nicht bekannte Einblicke, sowie auch ein brauchbares praktisches Verfahren ergeben.

7. 1. Theoretische Betrachtungen

Für genäherte Senkrechtaufnahmen können alle Orientierungsunbekannten in erster Näherung durch Differentiale ausgedrückt werden. Bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung erhalten wir für Drehmatrix und den Basisvektor:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -d\alpha & d\varphi \\ d\alpha & 1 & -d\omega \\ -d\varphi & d\omega & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ db_y \\ db_z \end{pmatrix} \quad \dots\dots(30a)$$

Damit folgt nach (6b) als Matrix der Hilfsunbekannten a_{ik} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & d\varphi' + db_z & dx' - db_y \\ -d\varphi'' - db_z & d\omega'' - d\omega' & 1 \\ db_y - dx'' & -1 & d\omega'' - d\omega' \end{pmatrix} = \mathbf{C}, \quad \dots\dots(30b)$$

welche wegen $a_{23} = 1$ auch gleich ihrer zugeordneten C Matrix ist. Für die adjungierte Matrix gilt:

$$\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -dx'' + db_y & d\varphi'' + db_z \\ -dx'' + db_y & 0 & 0 \\ d\varphi' + db_z & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(30c)$$

Aus (30b) entnehmen wir die für diesen Fall zwischen Hilfsunbekannten und Orientierungsgrößen bestehende Beziehungen

$$\begin{aligned} a_{11} = 0, a_{33} - a_{22} = 0, a_{32} + a_{23} = 0 \\ a_{12} + a_{21} = d\varphi' - d\varphi'', a_{13} + a_{31} = dx' - dx'', \end{aligned} \quad \dots\dots(31)$$

welche in gleicher Weise auch für die c-Werte gelten.

Die Matrix A enthält daher unter den getroffenen Annahmen nur fünf Elemente und kann aus fünf Gleichungen (6c₂) oder (14a₁) mit Hilfe von fünf homologen Punktepaaren bestimmt werden.

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 1 \\ a_{31} & -1 & a_{22} \end{pmatrix} \quad \dots\dots(30d)$$

Eine Bestimmung von C aus acht Gleichungen kann Schwierigkeiten bereiten, weil für genäherte Senkrechtaufnahmen die Gleichungsdeterminante des linearen Systemes um Null liegt. Wir sehen dies leicht aus der Koeffizientenmatrix

$$(x'x'', y'x'', -fx'', x'y'', y'y'', -fy'', -x'f, f^2),$$

wenn wir darin die für strenge Senkrechtaufnahmen gültigen Beziehungen

$$y' = y'' = y, \quad x' - x'' = b$$

eingeführen. Die mit f multiplizierte Differenz aus vierter und zweiter Spalte wird gleich der mit b multiplizierten sechsten Spalte

$$f((2) - (4)) = b(6)$$

und in analoger Weise gilt auch die Beziehung:

$$f(3) - (7) = b(8)$$

Dies besagt aber, daß der Rang der Koeffizientendeterminante für Senkrechtaufnahmen gleich 6 ist und der Zahlenwert in der Nähe von Null liegen wird. Eine formale Auflösung eines aus acht Gleichungen (22b) bestehenden Systemes kann daher ein wenig befriedigendes Ergebnis liefern, weil Meßfehler das Ergebnis stark verfälschen. In Abschnitt (63) wurde die Auflösung eines derartigen Systemes gezeigt und es ergaben sich gute Näherungen, welche nur geringfügig von der Lösung abweichen. Trotzdem kann eine derartige Auflösung aus den oben angeführten Gründen im allgemeinen nicht empfohlen werden. Für genäherte Senkrechtaufnahmen und Aufnahmen, welche auch im weiteren Sinne, also bei Vorliegen größerer Abweichungen bis 10^8 vom strengen Fall, drängt sich jedoch ein Verfahren auf, welches unter Benutzung der in (31) aufgeführten Bedingungen iterativ zum Ziel führt und bei welcher nur fünf homologe Punktepaare benötigt werden.

Wir stellen zu diesem Zweck Gleichung (6c₂) um und fassen die Glieder mit den für diesen Fall sehr kleinen Werten a_{11} , $(a_{33} - a_{22})$, $(a_{23} + a_{32})$ zu einer Korrektion Δ des Absolutgliedes 1 zusammen.

$$\begin{aligned} x'y''a_{12} - x'fa_{13} + y'x''a_{21} + (y'y'' + f^2)a_{22} - x''fa_{31} + 1 &= 0 \\ 1 &= f(y'' - y')a_{23} + \Delta \quad \dots(32) \\ \Delta &= x'x''a_{11} - fy''(a_{23} + a_{32}) + f^2(a_{33} - a_{22}) \end{aligned}$$

Die Koeffizientenmatrix dieses Systemes ist der bekannten Matrix für die Differentiale der Orientierungsunbekannten von Senkrechtaufnahmen gleich und ist (im allgemeinen) von Null verschieden. Führen wir im Korrektionsglied die nach (31) geltenden Näherungen

$$(a_{11}) = 0, \quad (a_{32}) + (a_{23}) = 0, \quad (a_{33}) - (a_{22}) = 0, \quad (a_{23}) = 1$$

ein, so wird $\Delta = 0$ und wir erhalten durch Auflösen des Systems (32) eine erste Näherung:

$$(A) = \begin{pmatrix} 0 & (a_{12}) & (a_{13}) \\ (a_{21}) & (a_{22}) & 1 \\ (a_{31}) & -1 & (a_{22}) \end{pmatrix} = ((n_1), (n_2), (n_3)) = \begin{pmatrix} (m_1) \\ (m_2) \\ (m_3) \end{pmatrix} \dots\dots(33a)$$

Mit dieser berechnen wir unter Benutzung der Differentialbeziehungen (18) Verbesserungen da_{11} , da_{23} , da_{32} . Aus der zweiten Gleichung (18a) und der entsprechenden mit den Vektoren \mathbf{m} gebildeten, sowie der letzten Gleichung (18b) erhalten wir bei Beschränkung auf Glieder 1. O. in den Koeffizienten die einfachen Beziehungen:

$$\begin{aligned} da_{32} &= \frac{1}{2} ((n_2)^2 + (\bar{n}_2)^2 - 1) \\ da_{23} &= -\frac{1}{2} ((m_2)^2 + (\bar{m}_2)^2 - 1) \quad \dots\dots(33b) \\ da_{11} &= -\det(A) = -((n_1), (n_2), (n_3)) \end{aligned}$$

Damit können wir die verbesserten Werte

$$(a_{11})' = da_{11}, \quad (a_{23})' = 1 + da_{23}, \quad (a_{32})' = da_{32} - 1, \quad \dots\dots(33c)$$

berechnen, während wir den letzten Wert $(a_{33})'$ zweckmäßig aus der einfach zu bildenden Gleichung (8a) ermitteln.

$$(a_{33})'^2 = 2 - [(a_{11})'^2 + (a_{23})'^2 + (a_{32})'^2 + (a_{21})'^2 + (a_{31})'^2 + (a_{12})'^2 + (a_{22})'^2 + (a_{13})'^2] \dots\dots(33d)$$

Mit den verbesserten Werten $(a)'$ korrigieren wir die Absolutglieder

$$l' = f(y'' - y')(a_{23})' + \Delta' \\ \Delta' = x'x''(a_{11})' - fy''((a_{23})' + (a_{32})') + f^2((a_{33})' - (a_{22})') \dots\dots(33e)$$

und wiederholen den Vorgang bis sich die Lösungen nicht mehr ändern. Der Prozeß läßt sich einfach ausführen, weil die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystemes nur von Bildkoordinaten abhängt und daher während der Iteration nicht geändert wird. Für die zahlenmäßige Berechnung wird (32) zweckmäßig durch f^2 dividiert, sodaß dimensionslose Koeffizienten entstehen. Alle Überlegungen gelten selbstverständlich auch für eine Berechnung im System K (U, e_i), wir brauchen nur $(x', y', -f')$ durch (u', v', w') zu ersetzen.

Bevor wir die praktische Anwendung zeigen, soll auf einen Zusammenhang mit der bekannten Parallaxengleichung eingegangen werden. Durch Einführen von (30b) erhält die Schnittbedingung (6a) für genäherte Senkrechtaufnahmen die Form

$$x'y''(d\varphi' + db_z) - x'f(d\kappa' - db_y) - y'x''(d\varphi'' + db_z) + (y'y'' + f^2)\Delta\omega + fx''(d\kappa'' - db_y) + f(y'' - y') = 0,$$

aus welcher leicht die bekannte Parallaxengleichung in Bildkoordinaten abgeleitet werden kann.

$$f(x' - x'')db_y + (x'y'' - x''y')db_z - y'x''d\varphi'' + (y'y'' + f^2)\Delta\omega + fx''d\kappa'' + x'y''d\varphi' - fx'd\kappa' + f(y'' - y') = 0$$

Beim Folgebildanschluß sind $d\varphi'$, $d\kappa'$ bekannt. Die mit diesen gebildeten Produkte können daher zum Absolutglied gezählt werden und die Auflösung eines Systemes von fünf derartigen Gleichungen gibt die Orientierungsunbekannten db_y , db_z , $d\varphi''$, $\Delta\omega$, $d\kappa''$ des Folgebildanschlusses. Doch ergeben sich nur Näherungen, weil nur Glieder erster Ordnung berücksichtigt wurden; aber diese können nach dem beschriebenen Verfahren verbessert werden. Wir bilden nach (30b) aus den ermittelten Werten db_y , db_z , $d\varphi''$, $\Delta\omega$, $d\kappa''$ die Größen a_{ik} und führen diese in den beschriebenen Iterationsprozeß ein. Aus den verbesserten Werten a_{ik} folgen dann in nun bekannter Weise verbesserte Orientierungsgrößen.

7. 2. Zahlenbeispiel

Wir stellen uns die Aufgabe, den bereits in 6. 3. nach dem Verfahren mit acht homologen Punkten behandelten Folgebildanschluß nach dem eben besprochenen Verfahren mit fünf Punkten zu lösen. Zu diesem Zweck wählen wir aus **Tabelle 6** die ersten fünf Punktepaare aus und bilden für diese die Matrix des verkürzten Systems (32) in den beiden Systemen K_1 und K. Die Zahlenwerte der wieder durch f^2 bzw. $(-fw')$ dividierten Koeffizienten sind in **Tabelle 8a, b** zusammengestellt. Wir wollen nun erst die Berechnung im System K_1 der festen (linken) Aufnahme betrachten.

Die bestimmte Auflösung des Schemas **Tabelle 8 a** mit $\Delta = 0$, $a_{23} = 1$ ergibt die in der letzten Zeile aufgeführten ersten Näherungen für die a_{ik} . Aus der unbestimmten Auflösung des Systems folgt die in **Tabelle 9 a** dargestellte Kehrmatrix, welche wir für die später folgende Iteration benötigen.

Mit den Näherungen (a_{ik}) bilden wir nach (30d) die erste Näherung

$$(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 0 & + 075\ 536 & - 034\ 640 \\ - 054\ 458 & - 027\ 994 & + 1 \\ + 004\ 465 & - 1 & - 027\ 994 \end{pmatrix}$$

und berechnen hierzu auch die Adjungierte:

$$(\bar{\mathbf{A}}) = \begin{pmatrix} + 1\ 000\ 784 & + 002\ 941 & + 054\ 583 \\ + 036\ 755 & + 000\ 155 & + 000\ 334 \\ + 074\ 566 & + 001\ 886 & + 004\ 114 \end{pmatrix}$$

Aus diesen Matrizen, welche die Vektoren \mathbf{n} , \mathbf{m} und $\bar{\mathbf{n}}$, $\bar{\mathbf{m}}$ enthalten, ermitteln wir nach (33b) die Verbesserungen,

$$da_{32} = + 003\ 250$$

$$da_{23} = - 002\ 550$$

$$da_{11} = - 001\ 669$$

bilden damit verbesserte Werte

$$(a_{11})' = + 001\ 669$$

$$(a_{23})' = + 997\ 450$$

$$(a_{32})' = - 996\ 750,$$

führen diese in Gleichung (33d) ein und erhalten den Wert:

$$(a_{33})' = - 030\ 083.$$

Damit berechnen wir verbesserte Werte l' der Absolutglieder nach Formel (32) und führen diese in **Tabelle 9 a**, letzte Spalte, auf. Die erneute Auflösung des Systems mit den Absolutgliedern l' , welche mit Hilfe der Kehrmatrix einfach bewältigt werden kann, gibt verbesserte Werte (a_{ik}). Wir tragen diese in **Tabelle 10 a** ein und wiederholen das Verfahren. Der weitere Verlauf der Iteration ist aus **Tabelle 10 a** zu ersehen.

Nach der ersten Iteration ergeben sich gute Näherungen, die weitere Konvergenz nimmt mit der Güte der Näherungen ab. Der Grund hierfür liegt in der Tatsache, daß die verwendeten Formeln (33b) Näherungsformeln sind, welche durch Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung aus (18a) entstehen. Der Vorteil des Verfahrens liegt in der raschen Gewinnung guter Näherungen bereits nach (33c, d), welche dann unter Umständen auch nach einem anderen, besser konvergierenden Iterationsverfahren verbessert werden können.

Die Berechnung der Hilfunbekannten a_{ik} für das System K wird in **Tabelle 10 b** gezeigt, sie unterscheidet sich nicht von der eben beschriebenen und zeigt auch dieselben Konvergenzerscheinungen.

8. Zusammenfassung

Die Aufgabe des Folgebildanschlusses kann bekanntlich durch Einführen eines Systemes von neun Hilfsunbekannten auf ein lineares Problem zurückgeführt werden. Bereits in [1] wurde darauf hingewiesen, daß zwischen diesen Hilfsunbekannten eine Reihe von Beziehungen bestehen muß. In der vorliegenden Arbeit wird eine allgemeine Theorie hierfür angegeben und gezeigt, daß sich diese Beziehungen in einfacher Weise ableiten lassen, wenn die Hilfsunbekannten zu eine 3×3 -Matrix zusammengefaßt und die Spalten und Zeilenvektoren dieser Matrix betrachtet werden. Aus diesen Überlegungen erfolgt eine Vielzahl von Bedingungen, welche benutzt werden können, um die Orientierungselemente, also den Basisvektor \mathbf{b} und die Matrix \mathbf{R} der Richtungskosinusse des anzuschließenden Bündels zu berechnen. Die verschiedenen Möglichkeiten einer Berechnung dieser Größen werden diskutiert.

Die Verfahren zur Ermittlung der Hilfsunbekannten werden ausführlich untersucht und besprochen. Für die Lösung mit acht homologen Punktepaaren wird eine Theorie einer strengen Ausgleichung entwickelt und an einem praktischen Beispiel vorgeführt. Außerdem wird gezeigt, wie die Lösung auch aus fünf Punktepaaren gefunden und durch Iteration verbessert werden kann. Schließlich wird die Theorie der praktisch bedeutsamen Senkrechtaufnahmen unter Benutzung der Hilfsunbekannten betrachtet und auch hierfür ein praktisches Beispiel gezeigt.

Für die Triangulierung eines Streifens ergibt sich die Möglichkeit, aus den Bildkoordinaten allein die Matrizen $\mathbf{R}_{21}, \mathbf{R}_{31} \dots \mathbf{R}_{n, n-1}$ und Basisvektoren $\mathbf{b}_{21}, \mathbf{b}_{31} \dots \mathbf{b}_{n, n-1}$ im jeweiligen System $K_1, K_2 \dots K_n$ der fest gedachten Aufnahme zu berechnen und diese dann der Reihe nach durch Multiplikation mit der Drehmatrix der jeweils fest gedachten Aufnahme in das System K der Paßpunkte überzuführen.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2 &= \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_3 &= \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_{31} \dots \mathbf{R}_n = \mathbf{R}_{n-1} \mathbf{R}_{n, n-1} \\ \mathbf{b}_2 &= \mathbf{R}_1 \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_3 &= \mathbf{R}_2 \mathbf{b}_{31} \dots \mathbf{b}_n = \mathbf{R}_{n-1} \mathbf{b}_{n-1} \end{aligned}$$

Dies hat den Vorteil einer völlig getrennten Behandlung der einzelnen Modelle des Streifens in der ersten Stufe der Berechnung, welche bei einer nicht völlig automatischen Berechnung wünschenswert sein kann. Dagegen wird die ebenfalls mögliche, unmittelbare Berechnung von \mathbf{R}_i und \mathbf{b}_i im System K der Paßpunkte bei Berechnung auf einem Automaten vorzuziehen sein.

Für die Theorie geben die aufgezeigten Zusammenhänge eine Verbindung verschiedener verstreut gefundener Beziehungen und Vorschläge. Für die Praxis folgt die Möglichkeit, in einfacher Weise für jeden beliebigen Aufnahmefall gute Näherungen aus dem Bildinhalt allein zu erhalten und diese dann entweder nach dem angegebenen oder irgend einem anderen System in wenigen Schritten iterativ zu verbessern.

Resumé

In an earlier paper [1] attention has been drawn to the fact that the problem of the orientation of a photogrammetric bundle of rays can be reduced to linear equations, when auxiliary unknowns are introduced. In this paper a general theory for this problem is developed. Using a 3×3 matrice, constructed by 9 auxiliary

unknowns the types of condition equations of the problem and general formulas for the direction of the basevector and the matrice of the direction cosines for the bundle, the so called rotation matrice, are derived.

In the paper the different possibilities for calculation are investigated theoretically and discussed. The formulas for the case using 8 or more homologous points are derived and proved on practical examples. A solution using only 5 pairs of points is described too. For the important case of nearly vertical photographs a quite new system of formulas is derived and proved practically.

The theory communicated gives an explanation for conditions found seperately in several papers. It allows to calculate good approximations for the orientation datas only from the image coordinates, without any knowledge of the direction in which the picture has been taken. Thus it can contribute to shorten the iteration process, necessary to gain exact orientation datas and to solve analytically every case of the relative orientation problem.

LITERATUR

[1] K. Rinner: Eine allgemeine, analytische Lösung des Folgebildanschlusses. Österr. Zeitschrift f. Verm.-Wesen, 1956, Heft Nr. 1.

[2] Van den Hout: Analytical orientation methods, Atti Della Settimana di Conference sulla Triangolazione aera analitica, Firenze 1961, Inst. Geogr. Mil.

[3] K. Rinner: Analytische, photogrammetrische Triangulation mit formtreuen Bündeln; über räuml. Drehungen. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Höhere Geodäsie, Heft 25, München 1957.

Tabelle 1, Koeffizientenschema

	α	β	γ	δ	ϵ
da_{11}	a_{11}	$a_{33} a_{22} - a_{23} a_{32}$	$a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23}$	a_{11}	a_{11}
da_{21}	a_{21}	$a_{13} a_{32} - a_{33} a_{12}$	$a_{32} a_{13} - a_{12} a_{33}$	a_{21}	a_{21}
da_{31}	a_{31}	$a_{23} a_{12} - a_{13} a_{22}$	$a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13}$	a_{31}	a_{31}
da_{12}	$a_{23} a_{31} - a_{33} a_{21}$	a_{12}	$a_{31} a_{23} - a_{21} a_{33}$	a_{12}	a_{12}
da_{22}	$a_{33} a_{11} - a_{13} a_{31}$	a_{22}	$a_{11} a_{33} - a_{31} a_{13}$	a_{22}	a_{22}
da_{32}	$a_{13} a_{21} - a_{23} a_{11}$	a_{32}	$a_{21} a_{13} - a_{11} a_{23}$	a_{32}	a_{32}
da_{13}	$a_{32} a_{21} - a_{22} a_{31}$	$a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22}$	a_{13}	a_{13}	a_{13}
da_{23}	$a_{12} a_{31} - a_{32} a_{11}$	$a_{31} a_{12} - a_{11} a_{32}$	a_{23}	a_{23}	a_{23}
da_{33}	$a_{22} a_{11} - a_{12} a_{21}$	$a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$	a_{33}	a_{33}	a_{33}
w	$\frac{1}{2} (a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 - 1)$	$\frac{1}{2} (a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 - 1)$	$\frac{1}{2} (a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 + a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 - 1)$	$\frac{1}{2} ([a_2] - 2)$	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Tabelle 2, Modell D6K

	x'	y'	x''	y''	u'	v'	w'
1	- 39 387	+ 90 306	- 52 722	+ 34 821	- 3 713	+ 64 599	- 222 755
2	- 37 696	+ 28 159	- 53 023	- 22 534	+ 8 114	+ 4 057	- 215 015
3	- 56 124	- 38 168	- 34 629	- 86 692	+ 1 341	- 64 337	- 211 106
7	+ 70 304	+ 63 784	+ 71 552	+ 57 514	+ 105 790	+ 59 118	- 196 022
8	+ 60 102	+ 12 243	+ 64 821	- 10 169	+ 104 474	+ 6 740	- 192 098
9	+ 53 607	- 50 401	+ 90 098	- 92 794	+ 108 535	- 55 818	- 186 060
4	+ 18 325	+ 76 583	+ 3 925	+ 45 454	+ 53 862	+ 61 941	- 208 717
6	+ 5 296	- 38 963	+ 18 473	- 83 112	+ 60 347	- 53 642	- 197 805

f = 210 000, x, y, f u. μ

Tabelle 3a

	33	22	31	12	11	13	21	32	23	$\frac{g}{g_{max}}$
1	1 000 0000	+ 071 3049	+ 251 0572	- 031 0997	+ 047 0876	+ 187 5572	- 107 9618	- 165 8143	- 430 2286	855 864
2	1 000 0000	- 014 3886	+ 252 4905	+ 019 2617	+ 045 3233	+ 179 5048	- 033 8566	+ 107 3048	- 134 0905	885 821
3	1 000 0000	+ 075 0309	+ 164 9000	+ 110 3289	+ 044 0707	+ 267 2572	+ 029 9710	+ 412 8191	+ 181 7524	853 423
7	1 000 0000	+ 083 1853	- 340 7238	+ 091 6885	+ 114 0679	- 334 7810	+ 103 4892	- 273 8762	- 303 7333	1
8	1 000 0000	- 002 8231	- 308 6714	- 013 8589	+ 088 3418	- 286 2000	+ 017 9955	+ 048 4238	- 058 3000	987 139
9	1 000 0000	+ 106 0524	- 429 0381	- 112 7984	+ 109 5212	- 255 2714	- 102 9712	+ 441 8762	+ 240 0048	923 474
4	1 000 0000	+ 078 9343	- 018 6905	+ 018 8876	+ 001 6310	- 087 2619	+ 006 8161	- 216 4476	- 364 6810	938 434
6	1 000 0000	+ 073 4307	- 087 9667	- 009 9810	+ 002 2184	- 025 2191	- 016 3212	+ 395 7714	+ 185 5381	913 322
	+ 173 668	+ 169 269	+ 168 331	- 389 533	+ 069 191	+ 095 573	- 161 591	- 912 387		

Tabelle 3 b

1	1 000 0000	+ 048 0862	+ 251 0572	- 002 7639	+ 004 1847	+ 016 6685	- 072 8066	- 165 8143	- 290 0002
2	1 000 0000	- 002 0247	+ 252 4905	- 004 0494	- 009 5282	- 037 7369	- 004 7641	+ 107 3048	- 018 8685
3	1 000 0000	+ 125 8114	+ 164 9000	- 002 6224	- 001 0475	- 006 3523	+ 050 2551	+ 412 8191	+ 304 7616
7	1 000 0000	+ 082 5979	- 340 7238	+ 147 8067	+ 183 8833	- 539 6843	+ 102 7584	- 273 8762	- 301 5886
8	1 000 0000	- 001 6990	- 308 6714	- 026 3357	+ 167 8733	- 543 8578	+ 010 8301	+ 048 4238	- 035 0863
9	1 000 0000	+ 131 5629	- 429 0381	- 257 7611	+ 250 2722	- 583 3333	- 128 7114	+ 441 8762	+ 300 0000
4	1 000 0000	+ 064 2352	- 018 6905	+ 055 8570	+ 004 8233	- 258 0624	+ 005 5468	- 216 4476	- 296 7703
6	1 000 0000	+ 107 3278	- 087 9667	- 120 7432	+ 026 8372	- 305 0833	- 023 8554	+ 395 7714	+ 271 1863
	+ 069 462	+ 021 180	+ 195 156	- 186 730	+ 053 128	- 111 844	- 130 820	- 977 761	

Tabelle 4

α'	33	22	31	12	11	13	21	32	w
	- 191 705	+ 237 851	+ 206 107	- 370 651	+ 090 272	- 102 640	+ 072 624	- 871 836	+ 000 482,3
β'	+ 091 842	- 129 424	- 187 032	+ 360 297	- 082 478	+ 058 905	- 090 602	+ 842 599	- 478,0
ξ'	- 048 531	- 003 857	- 384 311	+ 186 036	+ 892 108	+ 112 667	- 018 519	- 080 171	- 026,0

Tabelle 5

dc33	dc22	dc31	dc12	dc11	dc13	dc32
+ 7357 477	+ 0431 790 + 0037 425	- 0560 251 - 0054 122 + 0521 151	+ 0067 054 + 0002 270 + 0031 296 + 0032 318	+ 0424 030 + 0025 357 - 0082 927 + 0001 521 + 0037 175	- 0410 343 - 0033 935 + 0424 030 + 0021 729 - 0064 331 + 0380 446	+ 0645 778 + 0045 816 - 0078 046 - 0034 132 + 0031 298 + 0067 032 + 0623 829
+ 009,324	+ 1745,543	- 001,101	- 9518,362	+ 2205,111	+ 2018,149	- 0247,156
dc21	ka	kb	kc	kw	s	
- 0079 162	- 0191 705	+ 0091 842	- 0048 531	0	- 7727 980	
- 0006 354	+ 0237 851	- 0129 424	- 0003 857	0	- 0552 813	
- 0025 308	+ 0206 107	- 0187 032	- 0384 311	0	+ 0189 412	
+ 0025 357	- 0370 651	+ 0360 297	+ 0186 036	0	- 0323 091	
- 0001 646	+ 0090 272	- 0082 478	+ 0892 108	0	- 1270 375	
- 0031 516	- 0102 640	+ 0058 905	+ 0112 667	0	- 0422 062	
- 0054 122	- 0871 836	- 0842 599	- 0080 171	0	- 1138 063	
+ 0032 867	+ 0072 624	- 0090 602	- 0018 519	0	+ 0176 383	
	0	0	0	+ 0482 300	+ 0447 678	
		0	0	- 0478 000	- 0386 107	
			0	+ 0026 000	- 0681 422	
+ 9536,443	- 000,056	- 000,040	+ 000,120			

Tabelle 6

	x'	y'	x''	y''	u'	v'	w'
16	0 457	+ 78 272	+ 77 971	83 057	- 74 913	+ 82 596	- 211 291
17	2 976	- 4 122	- 79 590	1 381	- 78 318	+ 0 979	- 210 480
18	7 903	- 76 509	- 76 810	- 68 826	- 77 074	- 69 268	- 209 758
22	72 579	79 625	- 6 841	81 559	- 3 834	+ 79 547	- 210 847
23	81 474	- 0 878	- 1 268	2 111	0	0	- 210 014
24	85 198	- 71 322	- 0 739	- 65 762	- 0 956	- 67 865	- 209 329
19	37 376	+ 79 486	- 41 420	82 807	- 38 376	+ 81 548	- 211 068
21	47 367	- 75 842	- 36 859	- 69 159	- 37 141	- 70 473	- 209 513

$\varphi' = 08,45'$
 $\omega' = 10,10'$
 $\alpha' = -39,05'$

f = 210 000, x, y, f u. μ

Tabelle 7

	33	22	31	12	11	13	21	32	23
16	1 000 0000	+ 156 3637	+ 371 2905	+ 003 6797	- 003 4544	- 009 3038	- 146 7888	- 395 5095	- 395 3476
17	1 000 0000	0	+ 379 0000	0	- 000 0006	- 000 0017	+ 000 0010	- 006 5762	- 000 0026
18	1 000 0000	+ 112 3688	+ 365 7619	- 001 5604	- 001 7414	- 004 7611	+ 125 4039	+ 327 7428	+ 342 8566
22	1 000 0000	+ 148 1254	+ 032 5762	+ 137 2867	- 011 5153	- 353 4889	- 012 4244	- 388 3762	- 381 3967
23	1 000 0000	- 000 0468	+ 006 0381	+ 003 7404	- 002 2467	- 372 0904	+ 000 0280	- 010 0524	+ 004 6516
24	1 000 0000	+ 105 3590	+ 003 5190	- 115 6032	- 001 2991	- 369 1595	+ 001 1840	+ 313 1524	+ 336 4464
19	1 000 0000	+ 154 0598	+ 197 2381	+ 073 3605	- 036 6949	- 186 0436	- 007 0606	- 394 3190	- 390 6983
21	1 000 0000	+ 114 8826	+ 175 5190	- 062 8013	- 033 4706	- 190 6949	+ 061 2278	+ 329 3286	+ 348 8387
	- 010 7174	- 011 4157	+ 010 9479	+ 063 3742	- 001 3484	+ 011 5160	- 057 4485	999 2734	

Tabelle 8 a

	22	31	12	13	21
16	+ 1 147 4158	+ 371 2905	+ 000 8607	- 002 1762	- 138 3888
17	+ 999 8709	+ 379 0000	+ 000 0932	- 014 1714	+ 007 4392
18	+ 1 119 4061	+ 361 7619	- 012 3340	- 037 6333	+ 133 2575
22	+ 1 147 2593	+ 032 5762	+ 134 2284	- 345 6143	- 012 3518
23	+ 999 9580	+ 006 0381	+ 003 9000	- 387 9714	+ 000 0252
	- 027 994	- 004 465	- 075 365	+ 034 640	+ 054 458

Tabelle 8 b

	22	31	12	13	21
16	+ 1 156 3637	+ 371 2905	+ 003 6797	- 009 3038	- 146 7888
17	+ 1 000 0000	+ 379 0000	0	- 000 0017	+ 000 0010
18	+ 1 112 3688	+ 365 7619	- 001 5604	- 004 7611	+ 125 4039
22	+ 1 148 1254	+ 032 5762	+ 137 2867	- 353 4889	- 012 4244
23	+ 999 9532	+ 006 0381	+ 003 7404	- 372 0904	+ 000 0280
	- 011 325	+ 012 538	+ 061 363	+ 009 898	- 055 491

Modell III, IV System $K_1(x, y, f)$

Tabelle 9a

Kehrmatrix				Iteration			
22	31	12	13	21	1	1'	1''
+ 3 060 744	- 6 464 800	+ 3 569 709	+ 0 324 987	- 0 416 797	+ 022 786	+ 020 290	+ 019 958
- 7 731 132	+ 19 122 073	- 9 173 930	- 0 835 115	+ 0 978 709	+ 026 205	+ 023 964	+ 023 577
- 4 654 944	+ 8 514 959	- 4 638 183	+ 7 230 072	- 6 275 733	+ 036 586	+ 034 539	+ 034 103
+ 7 721 475	- 16 279 317	+ 9 011 483	+ 0 897 334	- 3 699 670	+ 009 210	+ 006 735	+ 006 408
- 2 741 254	- 1 988 702	+ 4 813 572	+ 0 484 826	- 0 810 795	+ 014 233	+ 012 026	+ 011 642

Modell III, IV System $K(u, v, w)$

Tabelle 9b

Kehrmatrix				Iteration			
22	31	12	13	21	1	1'	1''
+ 3 246 783	- 6 839 558	+ 3 796 424	- 0 041 411	- 0 090 388	+ 000 162	+ 001 733	+ 001 282
- 8 566 659	+ 20 684 767	- 10 016 912	+ 0 109 263	+ 0 238 479	+ 006 574	+ 008 275	+ 007 794
- 3 420 500	+ 5 938 072	- 3 256 230	+ 7 530 134	- 7 026 525	+ 015 114	+ 016 927	+ 016 421
+ 8 551 710	- 17 985 047	+ 10 007 480	- 0 033 808	- 2 997 199	+ 006 980	+ 008 552	+ 008 101
- 3 531 657	- 0 270 495	+ 3 854 328	+ 0 141 056	- 0 095 105	+ 014 704	+ 016 393	+ 015 912

Tabelle 10a

	Soll-Werte	Iteration			
		1	2	3	4
a ₂₂	-- 027 598	-- 027 994	027 651	027 634	027 620
a ₃₁	+ 010 425	+ 004 446	009 336	010 273	010 498
a ₁₂	+ 076 883	+ 075 365	077 372	077 054	076 966
a ₁₃	-- 040 453	-- 034 640	039 350	040 285	040 512
a ₂₁	-- 056 125	-- 054 458	056 493	056 227	056 148
a ₁₁	+ 001 614	+ 001 669	001 645	001 621	001 613
a ₂₃	+ 997 128	+ 997 450	997 152	997 128	997 123
a ₃₂	-- 996 620	-- 996 750	996 592	996 607	996 613
a ₃₃	-- 030 239	-- 030 083	030 191	030 278	030 249
da ₁₁		+ 001 669	-- 000 023	-- 000 026	-- 000 008
da ₂₃		-- 002 550	+ 000 298	-- 000 024	-- 000 006
da ₃₂		-- 003 250	-- 000 158	-- 000 015	-- 000 005

Tabelle 10b

	Soll-Wert	Iteration			
		1	2	3	4
a ₂₂	- 011 395	- 011 325	- 011 456	- 011 422	- 011 428
a ₃₁	+ 009 298	+ 012 538	+ 008 392	+ 009 573	+ 009 374
a ₁₂	+ 062 230	+ 061 363	+ 062 531	+ 062 223	+ 062 296
a ₁₃	+ 013 109	+ 009 898	+ 014 032	+ 012 845	+ 013 045
a ₂₁	- 056 331	- 055 491	- 056 532	- 056 287	- 056 334
a ₁₁	- 001 285	- 001 281	- 001 288	- 001 286	- 001 287
a ₂₃	+ 998 269	+ 998 354	+ 998 245	+ 998 275	+ 998 269
a ₃₂	- 997 958	- 997 982	- 997 946	- 997 956	- 997 953
a ₃₃	- 010 088	- 009 592	- 010 222	- 010 108	- 010 208
da ₁₁		- 001 281	- 000 007	+ 000 002	- 000 001
da ₂₃		- 001 646	- 000 109	- 000 030	- 000 006
da ₃₂		+ 002 018	+ 000 036	- 000 010	+ 000 003

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1. Grundlegende Beziehungen	1
2. Schnittbedingung im System K_1	3
3. Schnittbedingung im System K	8
4. Verträglichkeitsbedingungen	9
5. Zahlenbeispiel	12
6. Orientierung durch Folgebildanschluß	16
6. 1. Ermittlung der a_{ik}	16
6. 1. 1. aus acht Punkten	18
6. 1. 2. aus fünf Punkten	21
6. 2. Interpolation einer Drehmatrix	23
6. 3. Zahlenbeispiel	24
7. Orientierung von Senkrechtaufnahmen	28
7. 1. Theoretische Betrachtungen	29
7. 2. Zahlenbeispiel	31
8. Zusammenfassung	33
Tabellen	35

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen

6 Hefte, je 32 Seiten. Jahresabonnement S 72,—.

Sonderhefte zur Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen

- Sonderheft 1: *Festschrift Eduard Doležal. Zum 70. Geburtstag.* 198 Seiten, Neuauflage, 1948. Preis S 18,—. (Vergriffen.)
- Sonderheft 2: Lego (Herausgeber), *Die Zentralisierung des Vermessungswesens in ihrer Bedeutung für die topographische Landesaufnahme.* 40 Seiten, 1935. Preis S 24,—. (Vergriffen.)
- Sonderheft 3: Ledersteger, *Der schrittweise Aufbau des europäischen Lotabweichungssystems und sein bestanschließendes Ellipsoid.* 140 Seiten, 1948. Preis S 25,—.
- Sonderheft 4: Zaar, *Zweimedienphotogrammetrie.* 40 Seiten, 1948. Preis S 18,—.
- Sonderheft 5: Rinner, *Abbildungsgesetz und Orientierungsaufgaben in der Zweimedienphotogrammetrie.* 45 Seiten, 1948. Preis S 18,—.
- Sonderheft 6: Hauer, *Entwicklung von Formeln zur praktischen Anwendung der flächentreuen Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene.* 31 Seiten, 1949. Preis S 15,—. (Vergriffen.)
- Sonderheft 7/8: Ledersteger, *Numerische Untersuchungen über die Perioden der Polbewegung. Zur Analyse der Laplaceschen Widersprüche.* 59+22 Seiten, 1949. Preis S 25,—.
- Sonderheft 9: *Die Entwicklung und Organisation des Vermessungswesens in Österreich.* 56 Seiten, 1949. Preis S 22,—.
- Sonderheft 11: Mader, *Das Newtonsche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung.* 74 Seiten, 1951. Preis S 25,—.
- Sonderheft 12: Ledersteger, *Die Bestimmung des mittleren Erdellipsoids und der absoluten Lage der Landestriangulationen.* 140 Seiten, 1951. Preis S 35,—.
- Sonderheft 13: Hubeny, *Isotherme Koordinatensysteme und konforme Abbildungen des Rotationsellipsoids.* 208 Seiten, 1953. Preis S 60,—.
- Sonderheft 14: *Festschrift Eduard Doležal. Zum 90. Geburtstag.* 764 Seiten und viele Abbildungen. 1952. Preis S 120,—.
- Sonderheft 15: Mader, *Die orthometrische Schwerekorrektion des Präzisions-Nivellements in den Hohen Tauern.* 26 Seiten und 12 Tabellen. 1954. Preis S 28,—.
- Sonderheft 16: *Theodor Scheimpflug — Festschrift.* Zum 150jährigen Bestand des staatlichen Vermessungswesens in Österreich. 90 Seiten mit 46 Abbildungen und XIV Tafeln, 1956. Preis S 60,—.
- Sonderheft 17: Ulbrich, *Geodätische Deformationsmessungen an österreichischen Staumauern und Großbauwerken.* 72 Seiten mit 40 Abbildungen und einer Luftbildkarten-Beilage, 1956. Preis S 48,—.
- Sonderheft 18: Brandstätter, *Exakte Schichtlinien und topographische Geländedarstellung.* 94 Seiten mit 49 Abbildungen und Karten und 2 Kartenbeilagen. 1957. Preis S 80,— (DM 14,—).
- Sonderheft 19: *Vorträge aus Anlaß der 150-Jahr-Feier des staatlichen Vermessungswesens in Österreich, 4. bis 9. Juni 1956.*
- Teil 1: *Über das staatliche Vermessungswesen.* 24 Seiten, 1957. Preis S 28,—.
- Teil 2: *Über Höhere Geodäsie.* 28 Seiten, 1957. Preis S 34,—.
- Teil 3: *Vermessungsarbeiten anderer Behörden.* 24 Seiten, 1957. Preis S 28,—.
- Teil 4: *Der Sachverständige. — Das k. u. k. Militärgeographische Institut.* 18 Seiten, 1958. Preis S 20,—.
- Teil 5: *Über besondere photogrammetrische Arbeiten.* 38 Seiten, 1958. Preis S 40,—.
- Teil 6: *Markscheidewesen und Probleme der Angewandten Geodäsie.* 42 Seiten, 1958. Preis S 42,—.
- Sonderheft 20: Jerie, *Weitere Analogien zwischen Aufgaben der Mechanik und der Ausgleichsrechnung.* 24 Seiten mit 14 Abbildungen. Preis S 32,—.
- Sonderheft 21: Mader, *Die zweiten Ableitungen des Newtonschen Potentials eines Kugelsegments. — Topographisch berechnete partielle Geoidhebungen. — Tabellen zur Berechnung der Gravitation unendlicher, plattenförmiger prismatischer Körper.* 36 Seiten mit 11 Abbildungen. Preis S 42,—.
- Sonderheft 22: Moritz, *Fehlertheorie der Graphisch-Mechanischen Integration. — Grundzüge einer allgemeinen Fehlertheorie im Funktionenraum.* 53 Seiten mit 6 Abbildungen. Preis S 52,— (DM 9,—).
- Sonderheft 23: Rinner, *Studien über eine allgemeine, voraussetzungslose Lösung des Folgebildanschlusses.* 44 Seiten. Preis S 48,— (DM 8,—).

Sämtliche Publikationen zu beziehen durch den

Österreichischen Verein für Vermessungswesen

Wien VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY