Sonderheft 22
der Österreichischen Zeitschrift
für Vermessungswesen

Fehlertheorie der Graphisch-Mechanischen Integration

Grundzüge einer allgemeinen Fehlertheorie im Funktionenraum

von

Helmut Moritz, Wien

Herausgegeben von der
Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung
Eigentümer und Verleger:
Österreichischer Verein für Vermessungswesen
Wien VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3

Wien 1961

Sonderheft 22

der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen

Fehlertheorie der Graphisch-Mechanischen Integration

Grundzüge einer allgemeinen Fehlertheorie im Funktionenraum

von

Helmut Moritz, Graz

Gedruckt mit Unterstützung des Kulturamtes der Stadt Wien auf Antrag des Notringes der wissenschaftlichen Verbände Österreichs

Herausgeber, Eigentümer und Verleger:
Österreichischer Verein für Vermessungswesen
Wien VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3

Wien 1961

Photomech. Repr. u. Druck:
Bundesamt für Eich- u. Vermessungswesen (Landesaufnahme) in Wien

Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist eine für den Praktiker bestimmte Fassung der ausgezeichneten Dissertation des Herrn Dr. MORITZ "Fehlertheorie im Funktionenraum". So wurde der mathematische Apparat, der sich als überraschend einfach erweist, in einem eigenen Abschnitt - allerdings manchmal auf Kosten der Strenge - erläutert.

Im ersten Teil wird die Auswirkung der Fahrfehler bei der graphisch-mechanischen Integration, beispielsweise mit den bekannten Umfahrungsplanimetern, behandelt.

Der zweite Teil bringt Ueberlegungen allgemeiner Art, die, aufbauend auf Tienstras Theorie der korrelierten Beobachtungen, eine organische Weiterentwicklung der Fehlertheorie sind. Während bis jetzt Systeme von endlich vielen Grössen (Vektoren in einem n-fachen Raum) Gegenstand fehlertheoretischer Untersuchungen waren, werden nun Vektoren mit unendlich vielen Komponenten, unendliche Zahlenfolgen betrachtet, die - Funktionen einer Veränderlichen äquivalent - den sogenannten Hilbert - Raum bilden. Sonderfälle werden bereits im ersten Teil abgehandelt.

Für die Beurteilung von Präzisionsgeräten zur Ermittlung von Werten aus graphisch gegebenen Funktionen sowie für die Genauigkeitsbestimmung der Annäherung einer nur punktweise gegebenen Funktion durch ein Fourrier-sches Polynom erscheint die vorliegende Untersuchung von besonderer Bedeutung. Sie zeigt, dass das Operieren mit bisher in der Geodäsie nur wenig verwendeten Begriffen wie Hilbert-Raum, unendliche Matrix, neue, interessante Möglichkeiten eröffnet.

Wien, im Jänner 1961 Barvir

INHALTSVERZEICHNIS

Erster Teil

FEHLERTHEORIE DER GRAPHISCH-MECHANISCHEN INTEGRATION

Seite

Zweiter Teil

GRUNDZUEGE EINER ALLGEMEINEN FEHLERTHEORIE IM FUNKTIONENRAUM

ERSTER TEIL

FEHLERTHEORIE DER GRAPHISCH-MECHANISCHEN INTEGRATION

1. ABSCHNITT: Einführung; Fehler und Genauigkeitsmasse beim Befahren einer gezeichneten Kurve

Eine Kurve f(x) sei fehlerfrei gezeichnet gegeben; es soll auf graphisch-mechanischem Wege die Integralkurve $f^*(x)=\int f(x)dx$ gefunden werden. Dies geschieht mit Hilfe eines Integraphen, eines Instrumentes, bei dem auf der Kurve f(x) ein Fahrstift (oder etwa eine Fahrlupe) geführt wird, während ein zweiter Stift die Integralkurve $f^*(x)$ aufzeichnet. Auf den Bau eines solchen Instrumentes brauchen wir nicht einzugehen; er ist für unsere Untersuchung belanglos.

Wahre Fehler. Nun wird man aber beim Befahren nicht genau auf der Kurve f(x) bleiben, sondern eine andere Kurve $f(x) + \varepsilon(x)$ beschreiben (siehe Abb. 1).

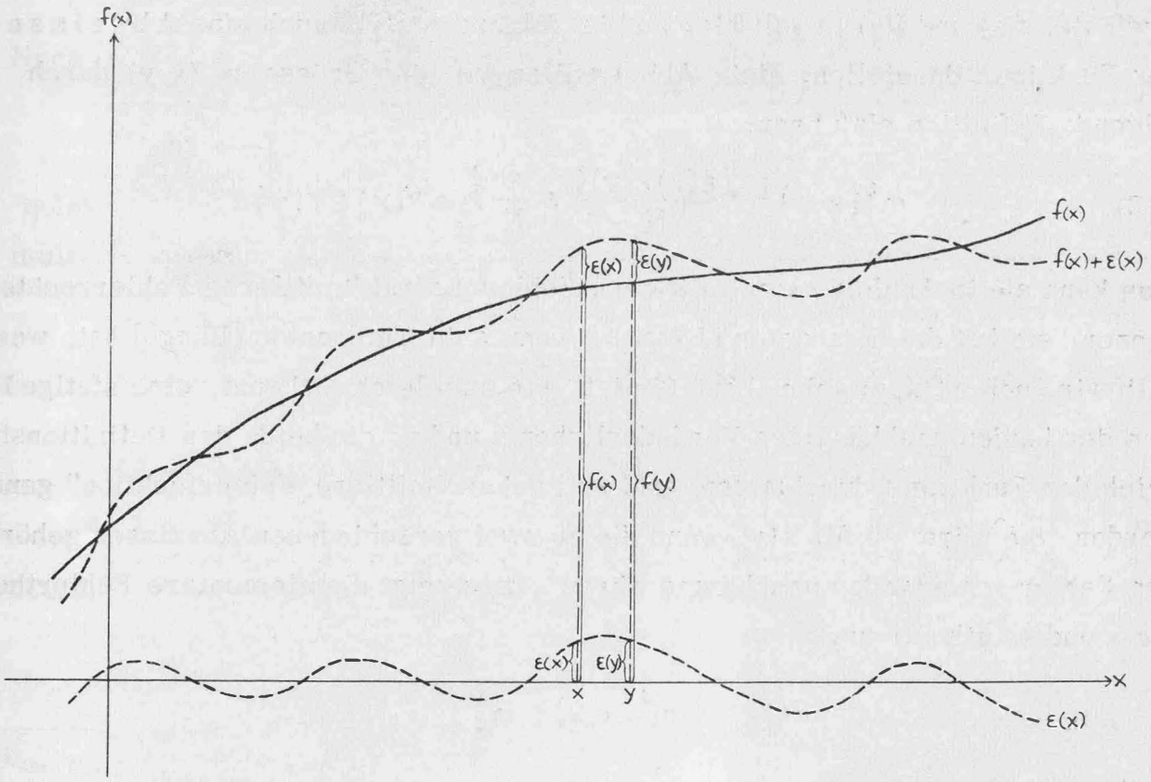

Abb. 1

$\varepsilon(x)$ ist also der wahre Fehler ε, mit dem die zur Abszisse x gehörige Ordinate f(x) behaftet ist. Alle diese Fehler bilden aber, wie ersichtlich, eine stetige Funktion. Es weisen also zwei zu benachbarten Abszissen gehörige Fehler ε eine je nach dem Abstand dieser Abszissen mehr oder weniger starke Abhängigkeit voneinander auf. Ist der Abstand gross, so ist die Abhängigkeit sehr gering; sie wird sehr gross, wenn die beiden Abszissen nahe benachbart sind, denn dann sind die zugehörigen ε ja nur wenig voneinander verschieden (siehe Abb.). Wir müssen also diese Abhängigkeit in unserer Theorie berücksichtigen.

Mittlere Fehler; die Funktion $m^2(x,y)$. Um die Genauigkeit einer Ordinate f(x) zu kennzeichnen, wählen wir wie üblich den mittleren Fehler oder zweckmässiger sein Quadrat

$$m_x^2 = \frac{[\varepsilon(x)\varepsilon(x)]}{N} \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{(i)}(x)\,\varepsilon^{(i)}(x)\,. \tag{1,1}$$

Wir denken uns also die Befahrung sehr oft (N-mal) ausgeführt - die bei der iten Befahrung auftretende Fehlerkurve sei $\varepsilon^{(i)}(x)$ -, jedesmal den zur gewünschten Abszisse x gehörigen Fehler ε bestimmt und das mittlere Fehlerquadrat nach der obenstehenden Formel berechnet. m_x^2 bedeutet, um es zu wiederholen, das mittlere Fehlerquadrat der zur Abszisse x gehörigen Ordinate.

Zur Charakterisierung der gegenseitigen Abhängigkeit der Fehler zweier Ordinaten f(x) und f(y) (y soll hier und im folgenden stets auch eine Abszisse der Funktion f darstellen; siehe Abb.) wollen wir eine Grösse $m^2(x,y)$ durch folgende Definition einführen:

$$m^2(x,y) = \frac{[\varepsilon(x)\varepsilon(y)]}{N} \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{(i)}(x)\,\varepsilon^{(i)}(y)\,. \tag{1,2}$$

Man kann sie in Analogie zum mittleren Fehlerquadrat "mittleres Fehlerrechteck" nennen; sie hat die Dimension [Länge]^2, wenn ε die Dimension [Länge] hat, weshalb wir auch $m^2(x,y)$ schreiben. Sie ist, wie man leicht erkennt, eine stetige Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y, die beide den Definitionsbereich der Funktion f durchlaufen, und soll daher "mittlere Fehlerfunktion" genannt werden. Sie wäre =0 für $x \neq y$, wenn die zu zwei verschiedenen Abszissen gehörigen Fehler voneinander unabhängig wären - dies zeigt die elementare Fehlertheorie - und es gilt für x=y

$$m^2(x,x) = m_x^2\,.$$

(Daraus erkennt man besonders gut, dass es naheliegend ist, unsere Funktion mit $m^2(x, y)$ zu bezeichnen.)

Die Funktion $Q(x, y)$. Nun führen wir durch

$$Q(x,y) = \frac{m^2(x,y)}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2}\,\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon^{(i)}(x)\,\varepsilon^{(i)}(y) \tag{1,3}$$

eine Grösse ein, die wir (nach J. M. Tienstra) Kofaktor, in unserem Falle besser Kofaktorfunktion oder einfach Q-Funktion nennen wollen. μ^2 ist eine willkürliche Konstante; sie kann als mittleres Fehlerquadrat der Gewichtseinheit bezeichnet werden.[1] Ueber die Funktion $Q(x, y)$ kann man in unserem Fall nun aussagen, dass sie bei grösserer Differenz x-y praktisch verschwinden muss, denn dann ist $\varepsilon(y)$ von $\varepsilon(x)$ fast unabhängig. Ferner muss sie nach (1, 3) in x und y symmetrisch sein; es muss also

$$Q(x,y) = Q(y,x) \tag{1,4}$$

sein.

Um ein Gesetz für $Q(x, y)$ zu finden, wollen wir der Einfachheit halber zunächst annehmen, $f(x)$ sei eine Gerade. Dann ist die Befahrungsgenauigkeit von der jeweiligen Abszisse unabhängig, m_x^2 und damit $Q(x, x)$ sind also Konstanten und $Q(x, y)$ ist nur von der Differenz x-y abhängig:

$$Q(x,y) = \varphi(x-y)\,.$$

Nach (1, 4) folgt jedoch daraus

$$\varphi(x-y) = \varphi(y-x) = \varphi(-[x-y])\,.$$

φ ist also eine symmetrische Funktion von x-y. Zusammen mit den oben formulierten Bedingungen ergibt sich eine Kurve etwa von der Gestalt der Abb. 2.

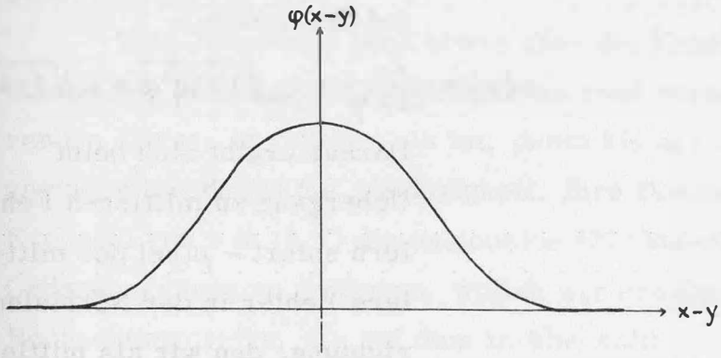

Abb. 2

Man sieht sofort die starke Ähnlichkeit mit der Gaussschen Fehlerkurve; überlegt man sich noch, dass $\varphi(x-y)$ ohnehin nicht exakt bestimmbar ist, so sieht man, dass man sie inner-

[1] Der Grund für diese Benennung wird später klar werden.

halb der Genauigkeit ihrer Bestimmung gewiss durch eine aus der Schar der Gaußschen Glockenkurven ersetzen kann:

$$Q(x,y) = \varphi(x-y) = \alpha e^{-A^2(x-y)^2}. \tag{1,5}$$

Zur Ableitung der Gesetzes für Q(x, y) für allgemeinere Funktionen wollen wir folgendes überlegen. Wir betrachten die Befahrung einer solchen allgemeinen Kurve $\mathfrak{C}$, die mit überall gleicher Strichstärke gezeichnet sei. Tatsächlich befahren werde die strichliert gezeichnete Kurve $\mathfrak{C}'$ (siehe Abb. 3).

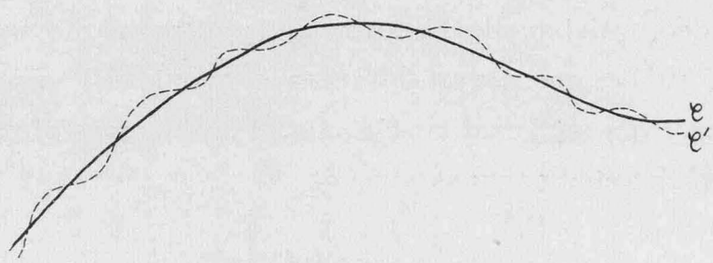

Abb. 3

Wir denken uns verschiedene Befahrungen von $\mathfrak{C}$ ausgeführt und erhalten so verschiedene Kurven $\mathfrak{C}'$; wir erkennen, dass die Wahrscheinlichkeit der Abweichung der Kurven $\mathfrak{C}'$ von $\mathfrak{C}$, in Richtung der Kurvennormalen auf $\mathfrak{C}$ gemessen, an allen Stellen gleich ist, dass also das mittlere Fehlerquadrat in Richtung der Normalen auf die Kurve $\mathfrak{C}$ überall praktisch konstant ist.

Mit dieser Erkenntnis wollen wir nochmals Gleichung (1, 5) für das Befahren einer Geraden betrachten. Diese Gerade habe die Gleichung

$$f(x) = kx + d.$$

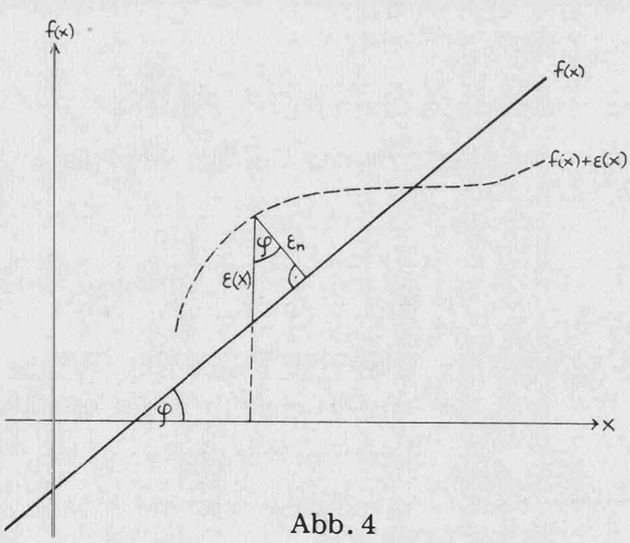

Abb. 4

Dann ist (siehe Abb. 4) – ε_n bezeichne den wahren Fehler in Richtung der Normalen auf die Gerade –

$$\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon_n}{\cos\varphi} = \varepsilon_n\sqrt{1+tg^2\varphi} = \varepsilon_n\sqrt{1+k^2}.$$

Daraus ergibt sich beim Uebergang zu mittleren Fehlern sofort – μ sei der mittlere Fehler in der Normalenrichtung, den wir als mittleren Fehler der Gewichtseinheit nehmen wollen; es entspricht also m_x dem $\varepsilon(x)$ und μ dem ε_n –

$$m_x^2 = \mu^2(1+k^2) = \mu^2 Q(x,x) = \mu^2\alpha$$

(nach 1, 5), also ist

$$\alpha = 1 + k^2$$

und damit

$$Q(x,y) = (1+k^2)\, e^{-A^2(x-y)^2}. \tag{1,6}$$

Ein Gesetz für die Q-Funktion Q (x, y) für das Befahren einer beliebigen differenzierbaren Kurve ergibt sich nun leicht aus folgender Ueberlegung. Q(x, y) ist auch für diesen allgemeinen Fall nur für kleine $|x-y|$ von Null merklich verschieden. Im Intervall x. . . . y kann man aber dann, wenn dieses nur klein ist, die Kurve durch eine Gerade mit der Steigung f'(x) oder f'(y) oder besser

$$k = f'\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

ersetzen. Damit folgt aus (1, 6) als Gesetz für die Q-Funktion für das Befahren einer allgemeinen Kurve

$$Q(x,y) = \left[1 + f'^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\right] e^{-C^2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2}, \tag{1,7}$$

wenn man noch

$$A = \frac{C}{2}$$

setzt. Für grössere $|x-y|$ kann man die Kurve natürlich nicht mehr durch eine Gerade ersetzen; in diesem Fall verschwindet Q(x, y) jedoch ohnehin effektiv und (1, 7) auch, sodass diese Gleichung praktisch stets gilt - ausser die betrachtete Kurve oszilliert sehr stark, was aber ohnehin kaum vorkommen wird. Da auch bei einer allgemeinen Kurve das mittlere Fehlerquadrat μ^2 in Richtung der Kurvennormalen eine Konstante ist, so kann es auch in diesem Fall als mittleres Fehlerquadrat der Gewichtseinheit genommen werden, sodass (1, 7) tatsächlich eine Q-Funktion darstellt - die Funktion $m^2(x, y) = \mu^2 Q(x, y)$ ist ihr ja proportional.

Zum Abschluss noch etwas über die Konstante C. Sie kennzeichnet die Stärke der Abhängigkeit der Fehler an zwei verschiedenen Stellen der zu befahrenden Kurve; je grösser sie ist, desto kleiner ist Q(x, y) nach (1, 7) und desto geringer ist damit die Abhängigkeit. Ihre Dimension ist $[\text{Länge}]^{-1}$, da der Exponent von e in (1, 7) dimensionslos sein muss; um einen Einblick in die Grössenordnung zu gewinnen, wollen wir erwähnen, dass sich für sie aus einer Beobachtungsreihe, die auf dem in Abschnitt 3 angegebenen Weg erhalten wurde, der Wert

$$C = 0{,}3\ \text{mm}^{-1}$$

ergab. C ist vor allem eine Funktion der Fahrgeschwindigkeit; je grösser diese ist, desto grösser ist die Abhängigkeit der Fehler untereinander und umso kleiner ist C. Damit C eine Konstante ist, müssen wir also strenggenommen annehmen, dass die Kurve mit überall ungefähr gleicher Geschwindigkeit befahren wird.

2. ABSCHNITT. Fehlerfortpflanzung für die graphisch-mechanische Integration; Verallgemeinerungen

Da mit dem Fahrstift nicht die zu integrierende Kurve f(x), sondern eine Kurve $f(x) + \varepsilon(x)$ befahren wird, wird auch der Zeichenstift des Integraphen nicht die Kurve $f^*(x) = \int f(x)\,dx$, sondern eine Kurve

$$f^*(x) + \varepsilon^*(x) = \int \big(f(x) + \varepsilon(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int \varepsilon(x)\,dx$$

aufzeichnen - fehlerfreies Funktionieren des Instrumentes vorausgesetzt. Die Fehlerfunktion $\varepsilon^*(x)$ der Integralkurve erhalten wir also aus

$$\varepsilon^*(x) = \int \varepsilon(x)\,dx\,. \tag{2, 1}$$

Wir sollen nun die dazugehörige Q-Funktion $Q^*(x, y)$ berechnen. Zu diesem Zweck schreiben wir (2, 1) genauer (bei passend gewähltem Abszissennullpunkt)

$$\varepsilon^*(x) = \int_0^x \varepsilon(u)\,du\,. \tag{2, 2}$$

Das Befahren denken wir uns N-mal durchgeführt; es ergeben sich dabei die N Funktionen

$$\varepsilon^{*(i)}(x) = \int_0^x \varepsilon^{(i)}(u)\,du \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, N)\,. \tag{2, 3}$$

Nach (1, 2) ist

$$m^{*2}(x,y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{*(i)}(x)\,\varepsilon^{*(i)}(y)$$

und durch Einsetzen von (2, 3) erhalten wir

$$\begin{aligned} m^{*2}(x,y) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\int_0^x \varepsilon^{(i)}(u)\,du \int_0^y \varepsilon^{(i)}(v)\,dv\right\} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{u=0}^{x}\int_{v=0}^{y} \varepsilon^{(i)}(u)\,\varepsilon^{(i)}(v)\,du\,dv \\ &= \int_{u=0}^{x}\int_{v=0}^{y} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{(i)}(u)\,\varepsilon^{(i)}(v)\,du\,dv\,, \end{aligned}$$

also mit (1, 2)

$$m^{*2}(x,y) = \int_{u=0}^{x}\int_{v=0}^{y} m^2(u,v)\,du\,dv\,. \tag{2, 4}$$

Bei dieser Ableitung wurden folgende bekannte Sätze aus der Integralrechnung verwendet:

1.) Die Bezeichnung der Integrationsvariablen in einem bestimmten Integral ist belanglos;

2.) das Produkt zweier einfacher bestimmter Integrale kann man zu einem Doppelintegral zusammenfassen;

3.) Integral-und Summenzeichen sind vertauschbar (Distributivität der Integration).

Dividiert man beide Seiten von (2, 4) durch μ^2, das mittlere Fehlerquadrat der Gewichtseinheit, so erhält man

$$Q^*(x,y) = \int_{u=0}^{x} \int_{v=0}^{y} Q(u,v)\, du\, dv . \tag{2, 5}$$

Gleichung (2, 4) oder Gleichung (2, 5) stellt das Fehlerfortpflanzungsgesetz für die graphisch-mechanische Integration dar. Genauer müsste man (2, 5) als Fortpflanzungsgesetz der Q-Funktionen bezeichnen; wir wollen aber der Kürze halber auch in diesem Fall von Fehlerfortpflanzung sprechen.

Ein Beispiel. Als Beispiel wollen wir nun, um einen Einblick zu gewinnen, Gleichung (2, 5) für die einfache Q-Funktion (1, 5) (mit α=1 und $A=\frac{C}{2}$)

$$Q(x,y) = e^{-C^2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2}$$

auswerten, die das Befahren einer Geraden charakterisiert.

Wir erhalten

$$Q^*(x,y) = \int_{u=0}^{x} \int_{v=0}^{y} Q(u,v)\, du\, dv = \int_{u=0}^{x} \int_{v=0}^{y} e^{-C^2\left(\frac{u-v}{2}\right)^2} du\, dv . \tag{2, 6}$$

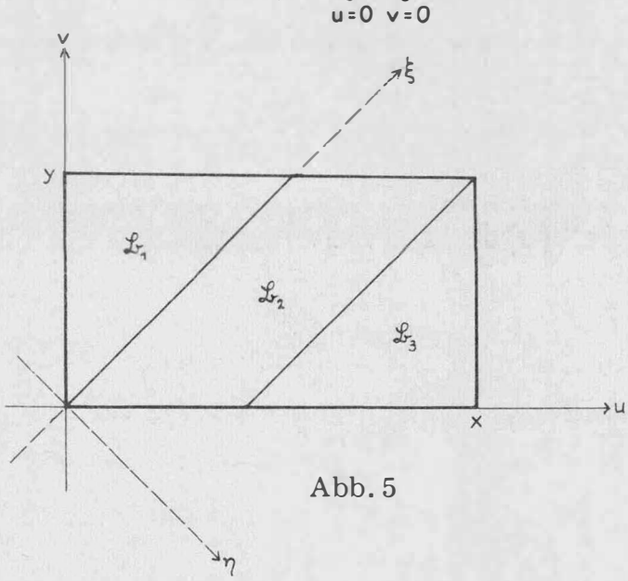

Abb. 5

Um dieses Integral zu berechnen, führen wir durch

$$\xi = \frac{u+v}{2} \qquad u = \xi + \eta \tag{2, 7}$$
$$\eta = \frac{u-v}{2} \qquad v = \xi - \eta$$

eine Transformation der Integrationsveränderlichen ein (siehe Abb. 5). Es ist dann

$$Q^*(x,y) = \iint_{(\mathcal{L})} e^{-C^2\eta^2} \frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)}\, d\xi\, d\eta ,$$

wobei $\mathcal{L}$ den rechteckigen Integrationsbereich ($0 \leq u \leq x$, $0 \leq v \leq y$) im neuen Koordinatensystem bedeutet und $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)}$ die Transformationsdeterminante

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{vmatrix} = -2$$

ist.

Wir müssen den Integrationsbereich $\mathfrak{L}$ in drei Teilbereiche $\mathfrak{L}_k$ (k=1, 2, 3) unterteilen (siehe Abb.) und bezeichnen mit I_k das Integral über $\mathfrak{L}_k$, sodass

$$Q^*(x,y) = I_1 + I_2 + I_3$$

gilt. Dann ist

$$I_1 = 2\int_{\eta=-\frac{y}{2}}^{0} \int_{\xi=-\eta}^{\eta+y} e^{-C^2\eta^2} d\xi\, d\eta = 2\int_{-\frac{y}{2}}^{0} (2\eta+y)\, e^{-C^2\eta^2} d\eta$$

$$I_2 = 2\int_{\eta=0}^{\frac{x-y}{2}} \int_{\xi=\eta}^{\eta+y} e^{-C^2\eta^2} d\xi\, d\eta = 2\int_{0}^{\frac{x-y}{2}} y\, e^{-C^2\eta^2} d\eta$$

$$I_3 = 2\int_{\eta=\frac{x-y}{2}}^{\frac{x}{2}} \int_{\xi=\eta}^{-\eta+x} e^{-C^2\eta^2} d\xi\, d\eta = 2\int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{x}{2}} (-2\eta+x)\, e^{-C^2\eta^2} d\eta\,.$$

Nach einiger Rechnung erhält man daraus

$$Q^*(x,y) = \frac{2x}{C}\,\Phi\left(C\frac{x}{2}\right) + \frac{2y}{C}\,\Phi\left(C\frac{y}{2}\right) - \frac{2(x-y)}{C}\,\Phi\left(C\frac{x-y}{2}\right) - \tag{2,8}$$
$$- \frac{2}{C^2}\left(1 - e^{-C^2\left(\frac{x}{2}\right)^2} - e^{-C^2\left(\frac{y}{2}\right)^2} + e^{-C^2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2}\right).$$

Hierin bedeutet

$$\Phi(x) \equiv \int_0^x e^{-u^2} du$$

eine Funktion der oberen Grenze x eines bestimmten Integrals, die bis auf einen konstanten Faktor das Gaußsche Fehlerintegral ist, das man in mathematischen Tafelwerken tabelliert findet.

Die Formel (2, 8) ist streng, aber unhandlich; sie erlaubt jedoch einige Vereinfachungen; es kann nämlich, wie eine einfache Abschätzung der Grössenordnungen (etwa mit dem im vorigen Abschnitt angegebenen Wert von $C = 0{,}3\ \mathrm{mm}^{-1}$) zeigt, für nur einigermassen grosse positive x - und y - Werte stets

$$\Phi\left(C\frac{x}{2}\right) \doteq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad {}^{1)}$$
$$\Phi\left(C\frac{y}{2}\right) \doteq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{2,9}$$

gesetzt werden, ferner kann man den Summanden mit C^2 im Nenner gegenüber den ersten drei vernachlässigen, sodass man erhält:

---

1) $\Phi\left(C\frac{x}{2}\right) \equiv \int_0^{C\frac{x}{2}} e^{-u^2} du \doteq \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(2, 10) $$Q^*(x,y) = \frac{\sqrt{\pi}}{C}(x+y) - \frac{2}{C}(x-y)\,\Phi\left(C\frac{x-y}{2}\right).$$

Zwei Sonderfälle dieser Gleichung sind besonders wichtig:

1.) Es ist x = y. Dann haben wir

(2, 11) $$Q^*(x,x) = \frac{2\sqrt{\pi}}{C}\,x\,.$$

Das mittlere Fehlerquadrat der Ordinate der Integralkurve wächst also proportional der Abszisse x.

2.) Es ist $|x-y|$ einigermassen gross, sodass wir auch dafür die Vereinfachungen (2, 9) einführen dürfen, also

$$\Phi\left(C\frac{x-y}{2}\right) \doteq \begin{cases} +\frac{\sqrt{\pi}}{2} & \text{für } x-y>0 \\ -\frac{\sqrt{\pi}}{2} & \text{für } x-y<0 \end{cases}.$$

Dann wird aus (2, 10)

$$Q^*(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{C}(x+y) - \frac{\sqrt{\pi}}{C}(x-y) & \text{für } x-y>0 \\ \frac{\sqrt{\pi}}{C}(x+y) + \frac{\sqrt{\pi}}{C}(x-y) & \text{für } x-y<0 \end{cases}.$$

Also ist

(2, 12) $$Q^*(x,y) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{\pi}}{C}\,y & \text{für } x>y \\ \frac{2\sqrt{\pi}}{C}\,x & \text{für } x<y \end{cases}.$$

Damit erhalten wir die interessante Beziehung

(2, 13) $$Q^*(x,y) = \begin{cases} Q^*(x,x) & \text{für } x<y \\ Q^*(y,y) & \text{für } y<x \end{cases}.$$

Es ist also für die Grösse $Q^*(x,y)$ nur die k l e i n e r e der beiden Abszissen x und y massgebend.

Wir wollen noch kurz den allgemeinen Fall streifen, dass f'(x) nicht konstant ist. Es ist dann nach (1, 7)

$$Q(x,y) = \psi\left(\frac{x+y}{2}\right) e^{-C^2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2},$$

wenn wir

$$1 + f'^2\left(\frac{x+y}{2}\right) \equiv \psi\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

setzen. Dann wird

(2, 14) $$Q^*(x,y) = \int_{u=0}^{x}\int_{v=0}^{y} \psi\left(\frac{u+v}{2}\right) e^{-C^2\left(\frac{u-v}{2}\right)^2} du\,dv = -2\iint_{(\mathfrak{L})} \psi(\xi)\, e^{-C^2\eta^2} d\xi\, d\eta\,,$$

wenn wir wieder die Transformation (2, 7) einführen. Die Berechenbarkeit dieses Doppelintegrals hängt von der Gestalt der Funktion ψ ab.

Sonderfälle, bei denen (2, 14) in geschlossener Form integrierbar ist, sind z. B.

$$\psi(\xi) \equiv 1$$
$$\psi(\xi) = \cos k\xi$$
$$\psi(\xi) = \sin k\xi$$
$$\psi(\xi) = \xi^k .$$

Nun wird i. a. $\psi(\xi)$ überhaupt nicht in geschlossener analytischer Form darstellbar sein. Man wird aber oft f(x) durch ein Polynom in x^k ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$) oder ein Fouriersches Polynom, also eine Linearkombination von Funktionen von der Form cos kx und sin kx ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$), annähern können, sodass auch $\psi(\xi) = 1 + f'^2(\xi)$ durch ein Polynom in ξ^k oder ein Fouriersches Polynom in $\cos k\xi$ und $\sin k\xi$ approximiert wird. Dadurch können wir diesen allgemeineren Fall auf den der oben angeführten speziellen Funktionen $\psi(\xi)$ zurückführen. Wir wollen aber nicht näher darauf eingehen - die Rechnung ist zwar mühsam, bietet aber keine prinzipiellen Schwierigkeiten - , sondern nur erwähnen, dass auch in diesen Fällen die Beziehung (2, 13) gilt

$$Q^*(x,y) = \begin{cases} Q^*(x,x) & \text{für } x < y \\ Q^*(y,y) & \text{für } y < x \end{cases}$$

(die Gleichungen (2, 11) und (2, 12) gelten natürlich im allgemeinen nicht mehr).

Eine Verallgemeinerung. Nun kehren wir noch einmal zum allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetz (2, 5) für die Integration zurück und überlegen, unter welchen Voraussetzungen es abgeleitet wurde. Wir erkennen, dass nur vorausgesetzt wird, dass jede Ordinate der zu integrierenden Funktion mit einem zufälligen Fehler $\varepsilon(x)$ behaftet ist und sich nur diese Fehler (nicht etwa instrumentelle Fehler des Integraphen) bei der Integration auswirken. Die Integration muss dabei aber keineswegs graphisch-mechanisch erfolgen, es könnte etwa auch folgendes sein. Von der Funktion f(x) sei die genaue Gleichung nicht bekannt, sondern nur eine Näherungsgleichung. Man kenne aber die Funktion Q (x, y), die die Genauigkeit der Annäherung kennzeichnet. Dies sei an dem folgenden Beispiel erläutert.

Die Funktion f(x) sei eine quadratische Parabel, für die man nach dem üblichen Ausgleichsverfahren eine Näherungsgleichung

$$f(x) = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 \tag{2,15}$$

erhielt. Die Unbekannten bei der Ausgleichung sind die Zahlen A_1, A_2, A_3. Gleichzeitig erhalten wir Grössen

$$Q_{11} = [\alpha\alpha] \qquad Q_{12} = [\alpha\beta] \qquad Q_{13} = [\alpha\gamma]$$
$$Q_{22} = [\beta\beta] \qquad Q_{23} = [\beta\gamma]$$
$$Q_{33} = [\gamma\gamma] \ ,$$

die die Genauigkeit der Unbekannten und ihre gegenseitige Abhängigkeit kennzeichnen (vgl. etwa den 1. Band des Jordanschen Handbuches der Vermessungskunde oder das Lehrbuch von Grossmann[1]). Bezeichnen nämlich ε_1, ε_2, ε_3 die wahren Fehler von A_1, A_2, A_3 und m_1, m_2, m_3 ihre mittleren Fehler, so gilt:

$$\begin{aligned} m_1^2 &= \mu^2 Q_{11} = \frac{[\varepsilon_1\varepsilon_1]}{N} & \mu^2 Q_{12} &= \frac{[\varepsilon_1\varepsilon_2]}{N} \\ m_2^2 &= \mu^2 Q_{22} = \frac{[\varepsilon_2\varepsilon_2]}{N} & \mu^2 Q_{13} &= \frac{[\varepsilon_1\varepsilon_3]}{N} \\ m_3^2 &= \mu^2 Q_{33} = \frac{[\varepsilon_3\varepsilon_3]}{N} & \mu^2 Q_{23} &= \frac{[\varepsilon_2\varepsilon_3]}{N} \end{aligned} \tag{2,16}$$

(siehe auch den 4. Abschnitt dieser Arbeit).

Um die Q-Funktion für f(x) daraus zu berechnen, gehen wir wieder von den wahren Fehlern aus. Aus (2,15) folgt

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \varepsilon_3 x^2 .$$

Es ist also

$$\begin{aligned} \varepsilon(x)\varepsilon(y) &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \varepsilon_3 x^2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 y + \varepsilon_3 y^2) \\ &= \varepsilon_1^2 + (x+y)\,\varepsilon_1\varepsilon_2 + (x^2+y^2)\,\varepsilon_1\varepsilon_3 + \\ &\quad + xy\,\varepsilon_2^2 + (x^2y + xy^2)\,\varepsilon_2\varepsilon_3 + \\ &\quad + x^2y^2\,\varepsilon_3^2 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{[\varepsilon(x)\varepsilon(y)]}{N} = \frac{[\varepsilon_1\varepsilon_1]}{N} &+ (x+y)\frac{[\varepsilon_1\varepsilon_2]}{N} + (x^2+y^2)\frac{[\varepsilon_1\varepsilon_3]}{N} + \\ &+ xy\frac{[\varepsilon_2\varepsilon_2]}{N} + (x^2y + xy^2)\frac{[\varepsilon_2\varepsilon_3]}{N} + \\ &+ x^2y^2\frac{[\varepsilon_3\varepsilon_3]}{N} \end{aligned}$$

---

[1] W. Grossmann, Grundzüge der Ausgleichungsrechnung, Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953.

und damit nach (2, 16) und (1, 3)

$$\mu^2 Q(x,y) = \mu^2 Q_{11} + (x+y)\mu^2 Q_{12} + (x^2+y^2)\mu^2 Q_{13} + \\ + xy\,\mu^2 Q_{22} + (x^2y+xy^2)\mu^2 Q_{23} + \\ + x^2y^2\,\mu^2 Q_{33}\,.$$

Die Division durch μ^2 liefert die gesuchte Beziehung

$$Q(x,y) = Q_{11} + (x+y)\,Q_{12} + (x^2+y^2)\,Q_{13} + \\ + xy\,Q_{22} + (x^2y+xy^2)\,Q_{23} + \\ + x^2y^2\,Q_{33}\,, \tag{2, 17}$$

die die Q-Funktion Q(x, y) von f(x) aus den von der Ausgleichung her bekannten Grössen Q_{11}, Q_{12}, ..., Q_{33} zu berechnen gestattet.

Es werde jetzt die Näherungsgleichung (2, 15) für die Funktion f(x) analytisch integriert:

$$f^*(x) \doteq \int_0^x (A_1 + A_2 u + A_3 u^2)\,du = A_1 x + \frac{A_2}{2}x^2 + \frac{A_3}{3}x^3\,. \tag{2, 18}$$

Die Genauigkeit der Approximation der wahren Integralkurve von f(x) durch (2, 18) wird durch eine Funktion Q^* (x, y) gegeben, die nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz (2, 5) berechnet wird:

$$Q^*(x,y) = \int_{u=0}^{x}\int_{v=0}^{y} Q(u,v)\,du\,dv \\ = \int_{u=0}^{x}\int_{v=0}^{y} \Big\{ Q_{11} + (u+v)\,Q_{12} + (u^2+v^2)\,Q_{13} + \\ + uv\,Q_{22} + (u^2v+uv^2)\,Q_{23} + \\ + u^2v^2\,Q_{33} \Big\}\,du\,dv\,,$$

also

$$Q^*(x,y) = xy\,Q_{11} + \frac{1}{2}(x^2y+xy^2)\,Q_{12} + \frac{1}{3}(x^3y+xy^3)\,Q_{13} + \\ + \frac{1}{4}x^2y^2\,Q_{22} + \frac{1}{6}(x^3y^2+x^2y^3)\,Q_{23} + \\ + \frac{1}{9}x^3y^3\,Q_{33}\,, \tag{2, 19}$$

ein Ergebnis, das man natürlich auch aus

$$\varepsilon^*(x) = \int_0^x \varepsilon(u)\,du = \varepsilon_1 x + \frac{1}{2}\varepsilon_2 x^2 + \frac{1}{3}\varepsilon_3 x^3$$

auf demselben Weg erhält, auf dem Q(x, y) (2, 17) aus $\varepsilon(x)$ gewonnen wurde. - Soweit unser Beispiel.

Aber auch bei der graphisch-mechanischen Integration können noch andere Q-Funktionen als (1, 7) eine Rolle spielen. Ist nämlich die zu befahrende Kurve selbst nicht fehlerfrei gezeichnet, wie bisher angenommen wurde, sondern ist ihre Genauigkeit durch eine Funktion $Q_1(x, y)$ gekennzeichnet, so kommt diese zur Funktion (1, 7), die das Befahren dieser Kurve charakterisiert, additiv hinzu. Wegen der Unabhängigkeit beider Fehlereinflüsse voneinander setzen sich nämlich die $m^2(x, y)$ und damit die $Q(x, y)$ additiv zusammen. Dies ist folgendermassen leicht zu erkennen: Ist

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)$$

die gesamte wahre Fehlerfunktion, resultierend aus fehlerhafter Zeichnung (ε_1) und fehlerhafter Befahrung (ε_2), so folgt daraus

$$\frac{[\varepsilon(x)\,\varepsilon(y)]}{N} = \frac{[\varepsilon_1(x)\,\varepsilon_1(y)]}{N} + \frac{[\varepsilon_2(x)\,\varepsilon_2(y)]}{N} + \frac{[\varepsilon_1(x)\,\varepsilon_2(y)]}{N} + \frac{[\varepsilon_2(x)\,\varepsilon_1(y)]}{N} \quad .$$

Da aber die letzten beiden Glieder wegen der gegenseitigen Unabhängigkeit beider Fehlereinflüsse verschwinden, so ist in leichtverständlicher Bezeichnung nach (1, 2)

$$m^2(x,y) = m_1^2(x,y) + m_2^2(x,y)$$

und damit nach (1, 7)

$$Q(x,y) = Q_1(x,y) + \left[1 + f'^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\right] e^{-C^2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2} .$$

Funktionaloperatoren. Man kann jedoch noch weitere Verallgemeinerungen der Formel (2, 5) betrachten. Die Integration ist ja nur eine unter den vielen sogenannten Funktionaloperationen, die man mit einer gegebenen Funktion oder Kurve ausführen kann. Bei einer solchen Funktionaloperation wird irgendeiner gegebenen Funktion $f(x)$ eine andere Funktion $f^*(x)$ eindeutig zugeordnet - ihre Integralfunktion $\int f(x)dx$, ihre Ableitungsfunktion $\frac{df(x)}{dx}$ oder etwa die Funktionen $\int x^n f(x)dx$ oder $\int (f(x))^2 dx$.
Statt Funktionaloperation verwendet man häufiger den Ausdruck Funktionaloperator oder einfach Operator; man sagt etwa, der Operator $\int \ldots . dx$ ordne der Funktion $f(x)$ die Funktion $\int f(x)dx$ zu, oder die Anwendung des Operators $\frac{d}{dx}$ auf die Funktion $f(x)$ ergebe die Funktion $\frac{d}{dx} f(x)$, die also hier durch eine Art symbolischer "Multiplikation" des Operatorzeichens $\frac{d}{dx}$ mit der Funktion $f(x)$ erhalten wird.

Die Theorie der Fehlerfortpflanzung bei allgemeineren (den sogenannten linearen) Operatoren wird im zweiten Teil der Arbeit behandelt.

3. ABSCHNITT. Theorie der Fahrfehler beim Umfahrungsplanimeter.

In diesem Abschnitt wollen wir den Einfluss der Fahrfehler auf die Flächeninhaltsbestimmung mit einem Umfahrungsplanimeter (etwa dem Polarplanimeter) anwenden. Bezeichnen wir (siehe Abb. 6) mit ε den Abstand des Fahrstiftes von der geschlossenen Begrenzungskurve $\mathfrak{C}$ der Fläche, also dasjenige Stück der Kurvennormalen auf $\mathfrak{C}$, das zwischen $\mathfrak{C}$ und dem tatsächlichen Weg des Fahrstiftes $\mathfrak{C}'$ liegt, mit s die Bogenlänge der Kurve $\mathfrak{C}$, von einem bestimmten Punkt aus gemessen, mit U ihren Gesamtumfang und mit η den wahren Fehler des Inhaltes der von $\mathfrak{C}$ umschlossenen Fläche, so ist (Abb. 6)

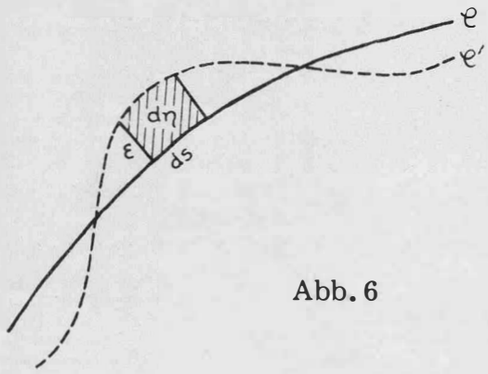

Abb. 6

$$d\eta = \varepsilon\, ds \ ,$$

(3, 1) $$\eta = \int_0^U \varepsilon(s)\, ds \ .$$

Wir schreiben $\varepsilon = \varepsilon(s)$, weil ε eine (stetige) Funktion der Bogenlänge ist.

Ist nun $m_F^2 = \frac{[\eta\eta]}{N}$ das mittlere Fehlerquadrat des Flächeninhaltes, so ist, ganz ähnlich wie bei der Ableitung von Gl. (2, 5)

$$m_F^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\eta^{(i)})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^U \varepsilon^{(i)}(s)\, ds \int_0^U \varepsilon^{(i)}(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{s=0}^{U}\int_{t=0}^{U} \varepsilon^{(i)}(s)\,\varepsilon^{(i)}(t)\, ds\, dt$$

$$= \int_{s=0}^{U}\int_{t=0}^{U} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{(i)}(s)\,\varepsilon^{(i)}(t)\, ds\, dt \ ,$$

also

(3, 2) $$m_F^2 = \int_{s=0}^{U}\int_{t=0}^{U} m^2(s,t)\, ds\, dt \ .$$

t bedeutet hier natürlich auch eine Bogenlänge, die vom selben Nullpunkt aus wie s gemessen wird.

Da $\varepsilon(s)$ stets in der Kurvennormale liegt, hat hier die Q-Funktion

$$Q(s,t) = \frac{m^2(s,t)}{\mu^2}$$

bei beliebig gestalteter Begrenzungskurve $\mathcal{C}$ die einfache Gestalt (1, 5), es ist also

$$m^2(s,t) = \mu^2 \alpha e^{-\frac{C^2}{4}(s-t)^2} .$$

Bedeutet μ wieder den (konstanten) mittleren Fehler in Richtung der Kurvennormalen, so muss $\alpha = 1$ sein, da dann $m^2(s, s) = \mu^2$ ist. Damit wird

$$m^2(s,t) = \mu^2 e^{-C^2\left(\frac{s-t}{2}\right)^2} . \tag{3, 3}$$

Dies setzen wir in (3, 2) ein und erhalten

$$m_F^2 = \mu^2 \int_0^U \int_0^U e^{-C^2\left(\frac{s-t}{2}\right)^2} ds\, dt .$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit (2, 6) zeigt, dass

$$m_F^2 = \mu^2 Q^*(U, U)$$

mit der dortigen Bedeutung von $Q^*(x, y)$ ist. Damit erhalten wir aus (2, 11) in hinreichender Näherung

$$m_F^2 = \frac{2\sqrt{\pi}}{C} U \mu^2 . \tag{3, 4}$$

Diese Formel zeigt, dass die Genauigkeit einer Flächenbestimmung nicht vom Flächeninhalt der Figur abhängt, wie in den Fehlergrenzformeln angenommen wird, sondern von ihrem Umfang. Der mittlere Fehler m_F ist ja proportional $\sqrt{U}$. (Dies hat schon Baer erkannt, freilich auf Grund einer nicht ganz einwandfreien Ueberlegung [1]). Dass die üblichen Fehlergrenzformeln und - tabellen sich trotzdem so gut bewährt haben, erklärt sich wohl daraus, dass bei den gewöhnlich vorkommenden Figuren Flächeninhalt und Umfang einigermassen proportional sind.

Bestimmung von C. Nun soll auf Grund von Gleichung (3, 4) ein Weg angegeben werden, die Konstante C zu berechnen. Zu diesem Zweck braucht man μ^2 und m_F^2. μ^2 kann dadurch bestimmt werden, dass man eine Kurve befährt, auf ein von aussen kommendes Zeichen plötzlich stehenbleibt und den Abstand des Fahrstiftes von der Kurve möglichst genau bestimmt (etwa Eindrücken des Fahrstiftes in die Unterlage und Messen des Abstandes des eingedrückten Punktes von der Kurve mit einem Glasmasstab). Eine solche Messung kann als wahrer Fehler ε aufgefasst werden; der Vorgang ist oftmals auszuführen (etwa N-mal); man erhält dann

---

[1] H. Baer, Genauigkeitsuntersuchungen am Polarplanimeter, Zeitschrift für Instrumentenkunde 57 (1937).

$$\mu^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{N} .$$

Um m_F^2 zu bestimmen, hat man nur eine beliebige Fläche, deren Inhalt man gar nicht zu kennen braucht, oftmals zu umfahren (nur in einer Pollage und in einem Umfahrungssinn!), die Messungsergebnisse zu mitteln und in der üblichen Weise das mittlere Fehlerquadrat des Flächeninhaltes zu errechnen. Systematische Instrumentenfehler spielen dabei keine Rolle - der Wert des Flächeninhaltes ist ja ohne Bedeutung - ; unregelmässige Instrumentenfehler müssen als vernachlässigbar angenommen werden: man muss eben die Versuchsbedingungen in dieser Hinsicht möglichst günstig gestalten (gutes Instrument, gleichmässige Unterlage u. dgl.). Auf diese Art wurde auch der in Abschnitt 1 angegebene Wert $C = 0,3\ mm^{-1}$ ermittelt; für μ ergab sich etwa 0,1 mm. Diese Werte sind natürlich von der Fahrgeschwindigkeit, der Lupenvergrösserung, der Strichstärke von $\mathfrak{C}$ u. dgl. abhängig.

Das Funktional. Schliesslich sei noch eine ähnliche Verallgemeinerung betrachtet wie im vorigen Abschnitt. Durch (3, 1) wird der Funktion $\varepsilon(s)$ eine Zahl η zugeordnet. Eine solche allgemeine Zuordnung bezeichnet man gerne als Funktional. Um auf den Unterschied gegenüber dem im vorigen Abschnitt betrachteten Funktionaloperator hinzuweisen, sei nochmals zusammengefasst:

Operator : Zuordnung Funktion $\longrightarrow$ Funktion,

z. B. $\varepsilon^*(x) = \int \varepsilon(x)\,dx$;

Funktional: Zuordnung Funktion $\longrightarrow$ Zahl,

z. B. $\eta = \int_0^u \varepsilon(s)\,ds$.

Die Theorie der Fehlerfortpflanzung bei allgemeineren (den sogenannten linearen) Funktionalen wird wie die der Fehlerfortpflanzung bei linearen Operatoren im zweiten Teil der Arbeit behandelt.

ZWEITER TEIL

GRUNDZUEGE EINER ALLGEMEINEN FEHLERTHEORIE IM FUNKTIONENRAUM

4. ABSCHNITT: Ueberblick über die Fehlertheorie korrelierter Beobachtungen.

Im zweiten Teil wollen wir, wie schon angekündigt, eine allgemeine Fehlertheorie von Funktionen und von Funktionaloperationen u. dgl. bringen, die man mit ihnen ausführen kann.

Unsere Betrachtungen werden auf der - heute bereits nicht mehr wegzudenkenden - Fehlertheorie korrelierter Beobachtungen aufbauen und sich als organische Fortentwicklung dieser vor allem von J. M. Tienstra[1] geschaffenen Theorie erweisen. Wir werden deshalb darauf kurz eingehen, allerdings auf einem anderen Weg als den Tienstra einschlug, indem wir mehr auf den bekannten und gewohnten Begriffen aufbauen, vor allem auf dem des wahren Fehlers.

Tienstra hat diesen Begriff mit Recht einer tiefgreifenden Kritik unterzogen, die ihn dazu führte, ihn abzulehnen und seine Theorie ohne ihn aufzubauen: er ging von den Begriffen der Statistik aus. Wir sind jedoch der Ansicht, dass der Begriff des wahren Fehlers zwar vom erkenntnistheoretischen Standpunkt eine sehr weitgehende und in der Tat oft kaum zulässige Abstraktion darstellt, dass er aber für nicht in die letzten Tiefen dringende Untersuchungen doch eine äusserst nützliche und praktische Fiktion ist. Deshalb werden wir diesen Begriff verwenden, der die Ableitungen wesentlich vereinfacht und durchsichtiger und anschaulicher gestaltet. Die Ergebnisse sind natürlich dieselben wie bei Tienstra.

Fehler und Genauigkeitsmasse. Es sei ein System von n beobachteten Grössen $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ gegeben. Ihre wahren Fehler seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots\ldots, \varepsilon_n$.

Unabhängige Beobachtungen. In der klassischen Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung (Gauss, Helmert) wird angenommen, dass die Beobachtungen x_k voneinander unabhängig seien. Dann wird ihre Genauigkeit durch die mittleren Fehlerquadrate

---

[1] J. M. Tienstra, Theory of the Adjustment of Normally Distributed Observations, N. V. Uitgeverij "Argus", Amsterdam 1956.

(4, 1) $$m_k^2 = \frac{[\varepsilon_k \varepsilon_k]}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_k^{(i)} \varepsilon_k^{(i)}$$

gekennzeichnet, während für $k \neq l$ die Grössen

$$\frac{[\varepsilon_k \varepsilon_l]}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_k^{(i)} \varepsilon_l^{(i)}$$

verschwinden. Wir nehmen dabei also an, dass sehr viele (N) Beobachtungsreihen für das System $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n$ ausgeführt werden - eine beliebige davon habe den Index i - und dass jedesmal die wahren Fehler $\varepsilon_1^{(i)}$, $\varepsilon_2^{(i)}$, $\varepsilon_3^{(i)}, \ldots\ldots, \varepsilon_n^{(i)}$ bekannt seien; das ist natürlich nur eine Fiktion. Die eckige Summenklammer soll hier und im folgenden, wenn nicht ausdrücklich anders bemerkt, stets die Summation $\sum_{i=1}^{N}$ über alle Beobachtungsreihen bedeuten.

Statt der mittleren Fehlerquadrate kann man zur Charakterisierung der Genauigkeit auch die ihnen verkehrt proportionalen Gewichte

(4, 2) $$p_k = \frac{\mu^2}{m_k^2}$$

(μ^2 = mittleres Fehlerquadrat der Gewichtseinheit, ein beliebiger Proportionalitätsfaktor) oder die zu den p_k reziproken, also zu den m_k^2 wieder proportionalen Grössen

(4, 3) $$q_k = \frac{1}{p_k} = \frac{m_k^2}{\mu^2}$$

verwenden, die man Gewichtsreziproke oder neuerlich auch gerne Kofaktoren nennt.

Korrelierte Beobachtungen - Vektoren, Matrizen. Sind die Beobachtungen jedoch voneinander abhängig oder, wie man auch sagt, korreliert,[1] so reichen die mittleren Fehlerquadrate m_k^2 zur Charakterisierung der Genauigkeit der Beobachtungsreihe nicht mehr aus, sondern man muss auch die "mittleren Fehlerrechtecke"

(4, 4) $$m_{kl}^2 = \frac{[\varepsilon_k \varepsilon_l]}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_k^{(i)} \varepsilon_l^{(i)} \qquad (k \neq l)$$

heranziehen, die in der klassischen Theorie, wie erwähnt, verschwinden, für korrelierte Beobachtungen jedoch von Null verschieden sind.

Wir werden uns künftig der Kürze und Prägnanz halber der Ausdrucksweise der linearen Algebra bedienen, ohne aber ihre Kenntnis unbedingt vorauszusetzen.

---

1) Strenggenommen sind allerdings Abhängigkeit und Korrelation nur dann dasselbe, wenn die Beobachtungsfehler eine Gaußsche Verteilung besitzen.

Ein System von n Zahlen $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ nennen wir einen Vektor und bezeichnen ihn mit einem Frakturbuchstaben oder (bei griechischen Buchstaben) durch einen darübergesetzten Pfeil; wir schreiben also etwa

$$\mathfrak{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n).$$

Einen solchen Vektor kann man als die Koordinaten eines Punktes in einem n-dimensionalen Raum deuten. Das System der n beobachteten Grössen x_k und das ihrer wahren Fehler ε_k können als Vektoren aufgefasst werden:

$$\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

$$\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n).$$

Ein System von n^2 Zahlen

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \ldots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \ldots A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \ldots A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \ldots A_{nn} \end{pmatrix}$$

nennt man eine (quadratische) Matrix; quadratisch deshalb, weil gleichviel Zeilen (horizontale Reihen) wie Spalten (vertikale Reihen) vorhanden sind. Da wir in Hinkunft nur quadratische Matrizen betrachten, wollen wir, wenn wir von Matrizen sprechen, darunter stets quadratische verstehen. Eine Matrix bezeichnen wir i.a. mit grossen Frakturbuchstaben. Ist

$$A_{kl} = A_{lk},$$

also etwa

$$A_{13} = A_{31},$$

so heisst die Matrix symmetrisch.

Die mittleren Fehlerrechtecke m^2_{kl} (4, 4) bilden zusammen mit den mittleren Fehlerquadraten m^2_k (4, 1), die wir in Analogie zu (4, 4) auch mit m^2_{kk} bezeichnen können, eine solche Matrix, die (mittlere) Fehlermatrix

$$(4,5) \qquad \mathfrak{F} = \begin{pmatrix} m^2_{11} & m^2_{12} & m^2_{13} & \ldots m^2_{1n} \\ m^2_{21} & m^2_{22} & m^2_{23} & \ldots m^2_{2n} \\ m^2_{31} & m^2_{32} & m^2_{33} & \ldots m^2_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m^2_{n1} & m^2_{n2} & m^2_{n3} & \ldots m^2_{nn} \end{pmatrix}.$$

Diese ist symmetrisch, da nach (4, 4)

$$m^2_{kl} = m^2_{lk}$$

ist.

Die Matrix $\mathfrak{Q}$ mit den Elementen

$$Q_{kl} = \frac{m^2_{kl}}{\mu^2} \tag{4, 6}$$

nennen wir Q-Matrix und ihre Elemente, wie schon beim Spezialfall nichtkorrelierter Beobachtungen angedeutet, Kofaktoren (nach Tienstra).

Um wieder auf diesen Spezialfall zurückzukommen:
sind die Beobachtungen nicht korreliert, so sind nur die $m^2_{kk} = m^2_k$ von Null verschieden, während, wie erwähnt, die m^2_{kl} für $k \neq l$ gleich Null sind. Die mittlere Fehlermatrix hat also dann die Form

$$\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_n^2 \end{pmatrix},$$

die Q - Matrix lautet

$$\mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q_n \end{pmatrix}.$$

Sind schliesslich alle mittleren Fehlerquadrate gleich (gleichgewichtige Beobachtungen), so kann man

$$m_1^2 = m_2^2 = m_3^2 = \dots = m_n^2 = \mu^2 \tag{4, 7}$$

setzen und erhält

$$\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} \mu^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \equiv \mathfrak{E} .$$

Diese letztere Matrix heisst Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ und ist sehr wichtig; ihre Elemente bezeichnet man gerne mit δ_{kl}, dem sogenannten Kroneckerschen Delta. Es ist also

(4, 8) $$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad k = l \\ 0 & \text{für} \quad k \neq l \end{cases} .$$

Fehlerfortpflanzung bei linearen Funktionen. Nun wollen wir das Fehlerfortpflanzungsgesetz für korrelierte Beobachtungen herleiten.

Es sei eine lineare Funktion der beobachteten Grössen x_k gegeben:

(4, 9) $$w = \Phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = h_1 x_1 + h_2 x_2 + h_3 x_3 + \dots + h_n x_n \equiv \sum_{k=1}^{n} h_k x_k .$$

Dieser Ausdruck bildet das sogenannte innere Produkt der zwei Vektoren

$$\mathfrak{h} = (h_1, h_2, h_3, \dots, h_n)$$
$$\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) ;$$

wir schreiben dafür $\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{x}$ oder auch $(\mathfrak{h}, \mathfrak{x})$, es ist also

(4, 10) $$(\mathfrak{h}, \mathfrak{x}) = \sum_{k=1}^{n} h_k x_k ,$$

sodass wir (4, 9) auch schreiben können:

(4, 9') $$w = \Phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (\mathfrak{h}, \mathfrak{x}) .$$

Gesucht sei das mittlere Fehlerquadrat m^2_w dieser Funktion oder ihr Kofaktor

$$q_w = \frac{m^2_w}{\mu^2} .$$

Wir gehen vom wahren Fehler η von w aus:

$$w + \eta = \Phi(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, x_3 + \varepsilon_3, \dots, x_n + \varepsilon_n) = \sum_{k=1}^{n} h_k (x_k + \varepsilon_k) = \sum_{k=1}^{n} h_k x_k + \sum_{k=1}^{n} h_k \varepsilon_k ,$$

es ist also wegen (4, 9)

$$\eta = \sum_{k=1}^{n} h_k \varepsilon_k = h_1 \varepsilon_1 + h_2 \varepsilon_2 + h_3 \varepsilon_3 + \dots + h_n \varepsilon_n .$$

Daraus folgt

$$\eta^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} h_k \varepsilon_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} h_k \varepsilon_k \sum_{l=1}^{n} h_l \varepsilon_l \overset{1)}{=} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} h_k h_l \varepsilon_k \varepsilon_l \equiv$$

$$\begin{aligned}
\equiv\ & h_1 h_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1 + h_1 h_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + h_1 h_3 \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \ldots + h_1 h_n \varepsilon_1 \varepsilon_n + \\
+\ & h_2 h_1 \varepsilon_2 \varepsilon_1 + h_2 h_2 \varepsilon_2 \varepsilon_2 + h_2 h_3 \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \ldots + h_2 h_n \varepsilon_2 \varepsilon_n + \\
+\ & h_3 h_1 \varepsilon_3 \varepsilon_1 + h_3 h_2 \varepsilon_3 \varepsilon_2 + h_3 h_3 \varepsilon_3 \varepsilon_3 + \ldots + h_3 h_n \varepsilon_3 \varepsilon_n + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\ & h_n h_1 \varepsilon_n \varepsilon_1 + h_n h_2 \varepsilon_n \varepsilon_2 + h_n h_3 \varepsilon_n \varepsilon_3 + \ldots + h_n h_n \varepsilon_n \varepsilon_n
\end{aligned}$$

Man kann nämlich das Produkt zweier einfacher Summen zu einer Doppelsumme zusammenfassen (vgl. das Entsprechende für Integrale); dabei gilt folgender Vorgang:

1.) in beiden Summen verschiedene Summationsindizes wählen;

2.) beide Summenzeichen an die Spitze stellen, die darauf folgenden Faktoren können beliebig umgestellt werden.

Der Beweis ergibt sich durch einfaches Ausmultiplizieren von

$$\sum_{k=1}^{n} h_k \varepsilon_k \sum_{l=1}^{n} h_l \varepsilon_l = (h_1\varepsilon_1 + h_2\varepsilon_2 + h_3\varepsilon_3 + \ldots + h_n\varepsilon_n)(h_1\varepsilon_1 + h_2\varepsilon_2 + h_3\varepsilon_3 + \ldots + h_n\varepsilon_n) .$$

Wir erhalten also weiter:

$$\frac{[\eta\eta]}{N} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} h_k h_l \frac{[\varepsilon_k \varepsilon_l]}{N} ,$$

also nach (4, 4)

(4, 11) $$m_w^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} h_k h_l m_{kl}^2$$

und nach Division durch μ^2:

(4, 12) $$q_w = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} h_k h_l Q_{kl} .$$

(Man beachte die Ähnlichkeit der Herleitung von (4, 11) mit der von (3, 2)!)

Im klassischen Fall ($Q_{kl} = 0$ für $k \neq l$, $Q_{kk} = q_k = \frac{1}{p_k}$) reduziert sich Gleichung (4, 12) auf

$$q_w = h_1^2 q_1 + h_2^2 q_2 + h_3^2 q_3 + \ldots + h_n^2 q_n$$

oder

(4, 13) $$\frac{1}{p_w} = \frac{h_1^2}{p_1} + \frac{h_2^2}{p_2} + \frac{h_3^2}{p_3} + \ldots + \frac{h_n^2}{p_n} = \left[\frac{hh}{p}\right]^{2)} \qquad \left(p_w = \frac{1}{q_w}\right) ,$$

---

1) Aus Zweckmässigkeitsgründen wird in der zweiten Summe der Index, über den summiert wird, mit l bezeichnet; die Bezeichnung eines Summationsindex ist natürlich gleichgültig.

2) eckige Summenklammer für $\sum_1^n$, abweichend von unserem sonstigen Gebrauch!

das bekannte Gewichtsfortpflanzungsgesetz. Sind schliesslich alle Beobachtungen gleichgewichtig (Fall (4, 7)), dann haben wir die nicht minder bekannte Formel

(4, 13') $$q_w = \frac{1}{p_w} = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \ldots + h_n^2 = [hh] \; .$$ [1)]

Fehlerfortpflanzung bei linearen Transformationen. Es sei nun durch

(4, 14) $$x_k^* = \sum_{l=1}^{n} L_{kl} x_l \; ,$$

also

$$\begin{aligned}
x_1^* &= L_{11}x_1 + L_{12}x_2 + L_{13}x_3 + \ldots + L_{1n}x_n \\
x_2^* &= L_{21}x_1 + L_{22}x_2 + L_{23}x_3 + \ldots + L_{2n}x_n \\
x_3^* &= L_{31}x_1 + L_{32}x_2 + L_{33}x_3 + \ldots + L_{3n}x_n \\
&\vdots \\
x_n^* &= L_{n1}x_1 + L_{n2}x_2 + L_{n3}x_3 + \ldots + L_{nn}x_n
\end{aligned}$$

eine lineare Transformation der beobachteten Grössen x_k gegeben. Wir schreiben dafür auch symbolisch

(4, 15) $$\varphi^* = \mathcal{L}\varphi \; ,$$

wenn $\varphi^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_n^*)$ und $\mathcal{L} = (L_{kl})$[2)] ist. Die Kofaktoren Q^*_{kl} der transformierten Grössen x_k^* seien gesucht.

Wir gehen wieder von den wahren Fehlern aus; aus (4, 14) folgt unmittelbar

$$x_k^* + \varepsilon_k^* = \sum_{l=1}^{n} L_{kl}(x_l + \varepsilon_l) = \sum_{l=1}^{n} L_{kl} x_l + \sum_{l=1}^{n} L_{kl}\varepsilon_l \; ,$$

also

$$\varepsilon_k^* = \sum_{l=1}^{n} L_{kl}\varepsilon_l \; .$$

[1)] eckige Summenklammer für $\sum_1^n$, abweichend von unserem sonstigen Gebrauch!

[2)] es bedeutet

$$(A_{kl}) \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \ldots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \ldots A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \ldots A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \ldots A_{nn} \end{pmatrix}$$

Wir erhalten wie früher daraus

$$\varepsilon_k^* \varepsilon_l^* = \sum_{r=1}^{n} L_{kr} \varepsilon_r \sum_{s=1}^{n} L_{ls} \varepsilon_s = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} L_{kr} L_{ls} \varepsilon_r \varepsilon_s$$

$$\frac{[\varepsilon_k^* \varepsilon_l^*]}{N} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} L_{kr} L_{ls} \frac{[\varepsilon_r \varepsilon_s]}{N}$$

(4, 16) $$m_{kl}^{*2} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} L_{kr} L_{ls} m_{rs}^2$$

(4, 17) $$Q_{kl}^* = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} L_{kr} L_{ls} Q_{rs} \; .$$

Die Grössen x_k^*, die aus den direkt beobachteten x_k durch eine lineare Transformation erhalten werden, kann man nun - und das ist das Wesentliche an der neuen Theorie - ebenso wie die x_k als direkt beobachtete Werte betrachten, deren Genauigkeit nun eben durch die Q_{kl}^* gegeben wird. Dass dies möglich ist, liegt daran, dass wir hier stets mit dem allgemeinen Fall nichtverschwindender Q_{kl} für $k \neq l$ arbeiten. [1)]

Wir wollen jedoch darauf nicht näher eingehen, da diese Betrachtungen etwas abseits des Weges unserer Arbeit liegen und verweisen für eine nähere Verfolgung dieses weittragenden Gedankens, der die Fehlertheorie und die Ausgleichsrechnung ungeahnt vereinheitlicht und logisch vereinfacht, auf das obenzitierte Werk von Tienstra.

Bei der Behandlung all dieser Probleme hat sich der Algorithmus der linearen Algebra als sehr nützlich erwiesen. Es liegt daher nahe, auch für die eigentliche Aufgabe unserer Arbeit, die Fehleruntersuchung stetiger Funktionen, nach einem entsprechenden mathematischen Apparat zu suchen. Ein solcher liegt nun tatsächlich in der sogenannten (linearen) Funktionalanalysis bereits vor, mit der wir uns im nächsten Abschnitt etwas beschäftigen werden. Mit diesem mathematischen Hilfsmittel werden wir dann die Formeln (4, 11) bzw. (4, 12) und (4, 16) bzw. (4, 17) in einfachster Weise für die Fehlerfortpflanzung bei linearen Funktionalen und linearen Operatoren verallgemeinern.

[1)] Es sei nur erwähnt, dass man etwa auch die bei der einfachen Punkteinschaltung (mit Richtungen) erhaltenen ausgeglichenen Koordinaten x, y des Neupunktes als direkt beobachtete Werte betrachten kann, wenn man als Q-Matrix für sie die beim Rechenvorgang erhaltenen Grössen

$$\begin{pmatrix} Q_{xx} = [\alpha\alpha] & Q_{xy} = [\alpha\beta] \\ Q_{xy} = [\alpha\beta] & Q_{yy} = [\beta\beta] \end{pmatrix}$$

nimmt.

5. ABSCHNITT. Ueberblick über die mathematischen Grundlagen.

Wir wollen nun so elementar wie möglich einen Ueberblick über die verwendeten Begriffe aus der Funktionalanalysis geben. Auf Strenge und Vollständigkeit wird zu Gunsten einer leichten Verständlichkeit verzichtet. Die Grundbegriffe dieser Theorie sind tatsächlich so einfach, dass man nur die Scheu vor ungewohnten Begriffen, wie unendlichdimensionalen Räumen, abzulegen braucht, um mit ihr bald vertraut zu werden. Für Details, Beweise u. dgl. wird auf die Literatur verwiesen, etwa auf die leichtverständliche Darstellung Smirnows.[1)]

Die (lineare) Funktionalanalysis besteht im wesentlichen aus einer Erweiterung der Begriffe der klassischen linearen Algebra auf viel allgemeinere Fälle.

Verallgemeinerung des Vektorbegriffes. Zwei Verallgemeinerungen des Vektorbegriffes liegen nahe:

1.) Statt Vektoren mit n Komponenten betrachten wir solche mit abzählbar unendlich vielen, also Vektoren

$$\varphi = (x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots) \equiv \{x_k\}_1^\infty . \tag{5, 1}$$

Solche "Vektoren" sind aber nichts anderes als unendliche Zahlenfolgen (wir beschränken uns auf reelle Folgen).

2.) Als weitere Verallgemeinerung suchen wir nun "Vektoren" mit kontinuierlich unendlich vielen "Komponenten" zu definieren. Dass so etwas tatsächlich ganz zwanglos möglich ist, soll folgende Ueberlegung zeigen. Unter einer Funktion einer unabhängigen Veränderlichen x verstehen wir bekanntlich folgendes: bestimmten Werten x, die den Definitionsbereich der Funktion bilden, werden auf bestimmte Weise Werte f (x) zugeordnet. Dieser Definitionsbereich kann nun z. B. die ganze x-Achse oder ein Intervall von ihr sein, er kann aber auch nur aus einzelnen Punkten der x-Achse bestehen. Ist er die Folge der positiven ganzen Zahlen 1, 2, 3, ..., n, so ist eine solche Funktion nichts anderes als ein Vektor im n-dimensionalen Raum, denn jeder dieser Zahlen k = 1, 2, 3, ..., n als Abszisse ist als Funktionswert die k-te Komponente des betreffenden Vektors zugeordnet. Im Falle abzählbar unendlich vieler Komponenten besteht der Definitionsbereich aus allen posi-

---

[1)] W. J. Smirnow, Lehrgang der Höheren Mathematik, Teil III/1, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954.

tiven ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... Nun liegt es nahe, auch eine in einem Intervall $a \leqq x \leqq b$ der reellen Achse definierte Funktion f(x) (aus Zweckmässigkeitsgründen betrachten wir nur stückweise stetige Funktionen) als Vektor anzusehen, indem wir jedem Wert x_0 aus diesem Intervall die Zahl $f(x_0)$ als Komponente unseres Vektors vom Index x_0 zuordnen. Der Definitionsbereich einer solchen Funktion soll daher immer ein bestimmtes festes Intervall der reellen Achse sein; auch die Funktionswerte wollen wir stets als reell annehmen.

Der Hilbertraum. Da auch der erste Fall in unseren Untersuchungen eine Rolle spielt, wollen wir uns zunächst mit ihm etwas beschäftigen. Man spricht hier, in Analogie zum n-dimensionalen Raum R_n, von einem unendlichdimensionalen R_∞, nennt ihn auch Hilbertschen Folgenraum, da die Vektoren dieses "Raumes", den D. Hilbert als erster untersucht hat, von gewissen Zahlenfolgen gebildet werden, wie wir schon gesehen haben. Wir wollen ihn kurz Hilbertraum oder Raum H nennen, obwohl manche Autoren unter dem (abstrakten) Hilbertraum einen wesentlich allgemeineren Begriff verstehen, der den Hilbertschen Folgenraum und auch den sofort zu besprechenden Funktionenraum als Sonderfälle einschliesst. Die Formeln für den R_∞ gehen aus denen für R_n durch Grenzübergang $n \to \infty$ hervor, soweit dieser sinnvoll ist, d. h. die unendlichen Reihen, in die die n-gliedrigen Summen übergehen, konvergieren.

Das innere Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ und $\mathfrak{y} = (y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots, y_n)$ des R_n ist nach (4, 10) gegeben durch

$$(5,2) \qquad (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \ldots + x_n y_n .$$

Die Länge oder "Norm" $\|\mathfrak{x}\|$ des Vektors $\mathfrak{x}$ ist definiert durch die Quadratwurzel aus dem inneren Produkt des Vektors mit sich selbst, es ist also

$$(5,3) \qquad \|\mathfrak{x}\|^2 = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 .$$

Das Normquadrat (5, 3) eines Vektors mit reellen Komponenten ist ersichtlich stets positiv.

Das innere Produkt zweier Hilbertvektoren

$$\mathfrak{x} = \{x_k\}_1^\infty$$

$$\mathfrak{y} = \{y_k\}_1^\infty$$

ist dann definiert durch die Reihe

$$(5,4) \qquad (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \ldots\ldots$$

wenn sie konvergiert. Die Norm $\|\varphi\|$ von φ wird durch die Gleichung

$$\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots \tag{5, 5}$$

geliefert. Damit nun eine Zahlenfolge $\{x_k\}_1^\infty$ dem Raume H angehört, soll per definitionem ihre Norm endlich sein, das heisst der Hilbertraum wird aus allen (reellen) Zahlenfolgen gebildet, für die (5, 5) konvergiert. Dann ist auch, wie man zeigen kann, die Konvergenz von (5, 4) gesichert.

Der Funktionenraum. Nun wollen wir den Begriff des inneren Produktes zweier Funktionen f(x) und g(x) definieren, und zwar in Analogie zu (5, 2). Da wir es nun mit kontinuierlich unendlich vielen Komponenten zu tun haben, müssen wir die dort auftretende Summe durch ein Integral ersetzen (beim Uebergang zum Kontinuum wird aus einer Summe ein Integral):

$$\big(f(x), g(x)\big) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \big(g(x), f(x)\big). \tag{5, 6}$$

Für die Norm $\|f(x)\|$ von f(x) erhalten wir analog

$$\|f(x)\|^2 = \big(f(x), f(x)\big) = \int_a^b [f(x)]^2 dx\ . \tag{5, 7}$$

Diese Norm ist nun bei stückweise stetigen Funktionen gewiss vorhanden und endlich. Man bezeichnet die Gesamtheit dieser im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierten stückweise stetigen Funktionen als Funktionenraum und diese Funktionen selbst als Elemente des Funktionenraumes.

Abbildung des Funktionenraumes auf den Hilbertraum. Es gilt der grundlegende Satz: Jedem Element des Funktionenraumes f(x) lässt sich ein Vektor $\{a_k\}_1^\infty$ aus dem Raume H umkehrbar eindeutig linear und sogar "längentreu" zuordnen. Dies geschieht auf folgende Weise: man führt im Funktionenraume ein sogenanntes vollständiges Orthonormalsystem $\varphi_k(x)$ von Funktionen ein. Diese Bezeichnung Orthonormalsystem bedeutet, dass das System der Funktionen $\varphi_k(x)$ normiert, d.h. die Norm jeder dieser Funktionen bezüglich des betrachteten Intervalles $a \leqq x \leqq b$ ist gleich 1, und dass es orthogonal ist, d.h. je zwei dieser Funktionen $\varphi_k(x)$ und $\varphi_l(x)$ sind zueinander orthogonal. Die Orthogonalität zweier Funktionen ist wie die Orthogonalität zweier Vektoren in der linearen Algebra durch das Verschwinden ihres inneren Produktes definiert. Die Orthogonalität und die Normiertheit eines Funktionensystems $\varphi_k(x)$ lassen sich in einer Gleichung zusammenfassen:

$$\big(\varphi_k(x), \varphi_l(x)\big) = \int_a^b \varphi_k(x)\, \varphi_l(x)\, dx = \delta_{kl}\ . \tag{5, 8}$$

δ_{kl} ist wieder das Kroneckersche Delta, definiert als

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad k = l \\ 0 & \text{für} \quad k \neq l \end{cases} .$$

Gleichung (5, 8) bedeutet also:

$$(\varphi_k(x), \varphi_k(x)) = \| \varphi_k(x) \|^2 = 1 \qquad \text{(Normierung)}$$

$$(\varphi_k(x), \varphi_l(x)) = 0 \quad \text{für} \quad k \neq l \qquad \text{(Orthogonalität).}$$

Ein wichtiges und bekanntes solches Orthonormalsystem bilden die Funktionen

(5, 9) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 3x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 3x, \ldots .$

im Intervall $0 \leqq x < 2\pi$, die ja bei der Fourierentwicklung von Funktionen auftreten. Der Leser überprüfe selbst das Bestehen von Gleichung (5, 8) für dieses System. Es treten dabei folgende bestimmte Integrale auf ($\mu, \nu = 1, 2, 3, \ldots .$)

$$\int_0^{2\pi} \sin \nu x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos \nu x \, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \mu x \sin \nu x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \big(\cos(\mu - \nu) x - \cos(\mu + \nu) x \big) dx = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mu \neq \nu \\ \pi & \text{für} \quad \mu = \nu \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \mu x \cos \nu x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \big(\sin(\mu - \nu) x + \sin(\mu + \nu) x \big) dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \mu x \cos \nu x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \big(\cos(\mu - \nu) x + \cos(\mu + \nu) x \big) dx = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mu \neq \nu \\ \pi & \text{für} \quad \mu = \nu \end{cases} .$$

Eine Funktion aus dem Funktionenraum lässt sich nun stets eindeutig nach einem solchen vollständigen Orthonormalsystem entwickeln, d. h. es ist

(5, 10) $$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + a_3 \varphi_3(x) + \ldots ,$$

wir haben also in dem System der unendlichvielen konstanten Grössen (a_1, a_2, a_3, ...) einen Vektor aus dem Hilbertraum vor uns, den wir dem Element f(x) des Funktionenraumes umkehrbar eindeutig zuordnen können. Diese Grössen a_k nennt man Fourierkoeffizienten, da, wie wir schon angedeutet haben, die Fourierentwicklung einer Funktion im wesentlichen einen Sonderfall von (5, 10) darstellt. Die Analogie von (5, 10) mit der Darstellung eines Vektors im R_n in einer orthonormierten Basis $\mathfrak{n}_k$

$$\mathfrak{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathfrak{n}_k = x_1\mathfrak{n}_1 + x_2\mathfrak{n}_2 + x_3\mathfrak{n}_3 + \ldots + x_n\mathfrak{n}_n \quad ^{1)}$$

legt dabei nahe, die Gesamtheit der Funktionen $\varphi_k(x)$ als "Basis" im Funktionenraum zu bezeichnen. Die Vollständigkeit eines Systems $\varphi_k(x)$ bedeutet übrigens gerade die Darstellbarkeit nach (5, 10) einer beliebigen Funktion des Funktionenraumes in diesem System.

Die Fourierkoeffizienten a_k erhält man, wenn man das innere Produkt beider Seiten von Gleichung (5, 10) mit einer beliebigen Funktion $\varphi_l(x)$ aus dem System bildet:

$$\big(f(x), \varphi_l(x)\big) = \int_a^b f(x)\,\varphi_l(x)\,dx = \int_a^b \sum_k a_k \varphi_k(x)\,\varphi_l(x)\,dx =$$

$$= \sum_k a_k \int_a^b \varphi_k(x)\,\varphi_l(x)\,dx = \sum_k a_k \delta_{kl} = a_l \,,$$

es ist also

$$a_l = \big(f(x), \varphi_l(x)\big) \,. \tag{5, 11}$$

Diese Ableitung ist einfach, wenn auch nicht ganz streng; $\sum_k$ bedeutet natürlich $\sum_{k=1}^{\infty}$; $\sum_k a_k \delta_{kl} = a_l$, da links alle Summanden ausser dem für $k=l$ verschwinden und $a_l \delta_{ll} = a_l$ ist.

Es lässt sich leicht zeigen, dass die inneren Produkte zweier Funktionen und der ihnen zugeordneten Vektoren im Raume H gleich sind, dass also

$$\big(f(x), g(x)\big) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sum_k a_k b_k \tag{5, 12}$$

---

[1] Es sei etwa n=3, sodass wir also den gewohnten dreidimensionalen Raum vor uns haben; setzen wir, wie üblich,

$$x_1 = x \qquad \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{i}$$
$$x_2 = y \qquad \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{j}$$
$$x_3 = z \qquad \mathfrak{n}_3 = \mathfrak{k} \,,$$

dann haben wir

$$\mathfrak{x} = \sum_{k=1}^{3} x_k \mathfrak{n}_k = x_1\mathfrak{n}_1 + x_2\mathfrak{n}_2 + x_3\mathfrak{n}_3 = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k} \,,$$

die bekannte Darstellung eines Vektors im Dreibein der zueinander senkrechten Einheitsvektoren $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$. Es ist dann

$$x = \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{i} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{i})$$
$$y = \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{j} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{j})$$
$$z = \mathfrak{x}\,\mathfrak{k} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{k}),$$

also allgemein

$$x_k = (\mathfrak{x}, \mathfrak{n}_k) \,.$$

Diese Formel ist in (5, 11) verallgemeinert.

ist, wenn

$$f(x) = \sum_k a_k \varphi_k(x)$$

$$g(x) = \sum_k b_k \varphi_k(x)$$

ist und

$$\mathfrak{a} = \{ a_k \}_1^\infty$$

$$\mathfrak{b} = \{ b_k \}_1^\infty$$

bedeutet, also f(x) der Vektor $\mathfrak{a}$ und g(x) der Vektor $\mathfrak{b}$ entspricht.

Aus (5, 12) folgt sofort die Gleichheit der Normen und damit die "Längentreue" der Abbildung

$$\| f(x) \| = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx} = \| \mathfrak{a} \| = \sqrt{\sum_{k=1}^\infty a_k^2} \quad , \tag{5, 13}$$

woraus man erkennt, dass auch $\| \mathfrak{a} \|$ endlich ist, dass also $\mathfrak{a}$ dem Raume H wirklich angehört. Gl. (5, 13) ist übrigens die aus der Theorie der Fourierreihen bekannte Vollständigkeitsrelation.

Lineare Operatoren. Wir wollen nun den Begriff der linearen Transformation im R_n auf den Raum H und den Funktionenraum übertragen. Im R_n hat eine lineare Transformation nach (4, 14) die Gestalt

$$x_k^* = \sum_{l=1}^n L_{kl} x_l \ . \tag{5, 14}$$

Für den Raum H haben wir $n \to \infty$ gehen zu lassen und erhalten zunächst rein formal

$$x_k^* = \sum_{l=1}^\infty L_{kl} x_l \ . \tag{5, 15}$$

Damit diese Formel einen Sinn hat, müssen erstens alle Reihen auf der rechten Seite konvergieren und zweitens der so entstandene Vektor $\{ x_k^* \}_1^\infty$ dem Hilbertraum angehören, also eine endliche Norm $\sqrt{\sum_{k=1}^\infty x_k^{*2}}$ besitzen. Die Grössen L_{kl} in (5, 15) bilden eine "unendliche Matrix"

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & \cdots \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & \cdots \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & \cdots \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} .$$

Um ein Analogon im Funktionenraum für die lineare Transformation (5, 14) zu finden, müssen wir beachten, dass diese Gleichung dem Vektor $\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ den Vektor $\varphi^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ linear zuordnet ist, d.h. es ist

$$\sum_{l=1}^{n} L_{kl}(\alpha x_l + \beta y_l) = \alpha \sum_{l=1}^{n} L_{kl} x_l + \beta \sum_{l=1}^{n} L_{kl} y_l ,$$

was aus den elementaren Eigenschaften der Addition sofort folgt. Diese letztere Aussage lässt sich unmittelbar auf den Funktionenraum übertragen; wir gelangen so zum linearen Funktionaloperator.

Im ersten Abschnitt haben wir schon den Begriff des Funktionaloperators eingeführt. Wir wollen wiederholen:

Ein (Funktional-) Operator T ist eine Zuordnung, die jeder Funktion f(x) aus einer bestimmten Menge von Funktionen eine andere Funktion $f^*(x)$ eindeutig zuordnet. Wir schreiben

$$f^*(x) = T\{f(x)\} .$$

Ein Operator L heisst linear, wenn gilt:

$$L\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha L\{f(x)\} + \beta L\{g(x)\}$$

für beliebige reelle α und β.

In der Folge wollen wir uns nur mit linearen Operatoren beschäftigen.

Wenn wir nun (5, 14) sinngemäss (die Summe ist durch ein Integral zu ersetzen) auf den Fall kontinuierlich vieler Komponenten übertragen, so erhalten wir eine Darstellung eines linearen Operators als sogenannten Integraloperator:

(5, 16) $$f^*(x) = \int_a^b L(x,u) f(u)\, du .$$

Es entsprechen hier:
das Integral dem Summenzeichen,
die Funktion L(x, u) (der sogenannte Kern des Operators)
der Matrix (L_{kl}),
die unabhängigen Variablen (z. B. x, u) den Indizes (z. B. k, l).

Es ist hier zu bemerken, dass die Benennung der unabhängigen Variablen (x, u usw.) für die Zugehörigkeit einer Funktion zu dem betreffenden Funktionenraum gleichgültig ist, ebenso wie die Bezeichnung des Komponentenindex mit k, l usw. für die Zugehörigkeit eines Vektors zum Raume R_n. Wichtig ist nur, dass der Definitionsbereich der Funktion stets das gleiche Intervall (a. . . b) ist. Wir werden daher künftig oft einfach vom Element (des Funktionenraumes) f sprechen und damit f(x), f(u) usw., aber stets mit $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq u \leqq b$ usw., meinen.

Die Analogie von (5, 16) mit (5, 14) wäre vollständig, wenn sich jeder lineare Operator als Integraloperator darstellen liesse. Das ist jedoch keineswegs der Fall. Schon ganz einfache Operationen, etwa die Identität

$$\mathfrak{J} f(x) \equiv f(x)$$

oder der Differentiationsoperator

$$\mathfrak{D} f(x) \equiv \frac{df(x)}{dx}$$

lassen eine solche Darstellung nicht zu.

Die Bezeichnung der letzten zwei linearen Operatoren bedarf einer Erklärung. Wir wollen nämlich lineare Operatoren künftig auf zwei Arten bezeichnen:

1.) Mit Fraktur-(oder Kurrent-)buchstaben ohne nachfolgende geschlungene Klammer, also etwa

(5, 17) $$f^*(x) = \mathfrak{L} f(x)$$

oder einfach

(5, 17') $$f^* = \mathfrak{L} f \ .$$

Diese Bezeichnung steht in gewisser Analogie zur Darstellung einer linearen Transformation (5, 14) in symbolischer Matrizenschreibweise (4, 15)

$$\mathfrak{x}^* = \mathfrak{L} \mathfrak{x} \ .$$

2.) Oft ist es jedoch zweckmässiger, den linearen Operator (5, 17) folgendermassen darzustellen:

(5, 18) $$f^*(x) = \mathfrak{L}_{xu} f(u) \ ,$$

also wieder mit Frakturbuchstaben, aber mit zwei Indizes, deren erster die unabhängige Variable der "Bildfunktion" f^*, und deren zweiter die unabhängige Variable der "Stammfunktion" f angibt. Hier ist eine gewisse formelle Ähnlichkeit mit (5, 14) festzustellen, insbesondere wenn man dort nach der Einsteinschen Summenkonvention[1] das Summenzeichen weglässt und Gl. (5, 14) schreibt

$$x_k^* = L_{kl} x_l \ .$$

Diese formelle Analogie bezieht sich auch darauf, dass man in (5, 18) die Bezeichnung der unabhängigen Veränderlichen der Stammfunktion f ganz beliebig

---

[1] Einsteinsche Summenkonvention: kommt in einem Ausdruck ein Index zweimal vor, so ist über ihn zu summieren; es bedeutet etwa

$$a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \ ,$$

$$c_{rs} d_{st} = \sum_{s=1}^{n} c_{rs} d_{st} \ .$$

wählen kann (ebenso wie den Index, über den summiert wird, in (5, 14)). Es ist also

$$f^*(x) = \mathcal{L}_{xu} f(u) = \mathcal{L}_{xv} f(v) = \mathcal{L}_{xt} f(t) = \ldots .$$

Die Matrix eines linearen Operators. Betrachten wir nun die Abbildung auf den Hilbertraum, so gilt, da diese linear ist,[1] der wichtige Satz: jedem linearen Operator im Funktionenraum entspricht eindeutig eine lineare Transformation der der betreffenden Stammfunktion entsprechenden Fourierkoeffizienten im Raume H und damit eine unendliche Matrix (vgl. etwa Gl. (5, 15)). Die Elemente dieser Matrix wollen wir mit gewöhnlichen Buchstaben bezeichnen, aber jede Matrix und den entsprechenden Operator mit dem gleichen Buchstaben. So entspricht also dem Operator $\mathcal{L}$ die Matrix mit den Elementen L_{kl}. Es seien also

$$f = \sum_k a_k \varphi_k$$

$$f^* = \sum_k a_k^* \varphi_k ,$$

dann gilt, wenn

$$f^* = \mathcal{L} f$$

ist:

(5, 19) $$a_k^* = \sum_l L_{kl} a_l .$$

Die Matrix (L_{kl}) ist aus der Gleichung

(5, 20) $$L_{kl} = (\mathcal{L}\varphi_l, \varphi_k)$$

zu berechnen. Das kann auf folgende Art leicht erkannt werden:

Es gilt nach (5, 11)

$$a_k^* = (f^*, \varphi_k) = (\mathcal{L} f, \varphi_k) ,$$

daraus folgt mit (5, 19)

$$\sum_r L_{kr} a_r = (\mathcal{L} f, \varphi_k) .$$

Nehmen wir nun für f eine Funktion aus unserem vollständigen Orthonormalsystem, etwa φ_l, dann hat man als Fourierkoeffizienten ersichtlich

$$a_k = \delta_{lk}$$

(die $\delta_{lk} = \delta_{kl}$ sind nach (4, 8) definiert). Diese Beziehungen setzen wir in die

---

[1] d. h. entspricht der Funktion f(x) der Hilbertvektor $\{a_k\}_1^\infty$ und der Funktion g(x) der Vektor $\{b_k\}_1^\infty$, so entspricht, wie sich aus (5, 11) sofort ergibt, der Funktion $\alpha f(x) + \beta g(x)$ der Hilbertvektor $\{\alpha a_k + \beta b_k\}_1^\infty$

letzte Gleichung ein und erhalten

$$\sum_r L_{kr}\delta_{lr} = L_{kl} = (\mathcal{L}\varphi_l, \varphi_k) .$$

Dies ist gerade Gl. (5, 20).

Der Identität

$$f^* = \mathfrak{J} f \equiv f$$

entspricht z. B. die unendliche Einheitsmatrix mit den Elementen δ_{kl}:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} .$$

Lineare Funktionale. Schliesslich wollen wir noch den Begriff der linearen Ortsfunktion im R_n (4, 9)

$$w = \Phi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} h_k x_k = (\mathfrak{f}, \varphi) \tag{5, 21}$$

zum Begriff des linearen Funktionals im Funktionenraum erweitern (für die Uebertragung von (5, 21) auf den Hilbertraum braucht man nur die Summe $\sum_{k=1}^{n}$ durch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}$ zu ersetzen; ihre Konvergenz ist gesichert, wenn φ und $\mathfrak{f}$ dem Hilbertraum angehören).

Es sei also im Funktionenraum wieder eine bestimmte Menge von Elementen (Funktionen) gegeben. Eine Zuordnung, die jedem Element f aus dieser Menge eine bestimmte Zahl $w = \Phi(f)$ entsprechen lässt, heisst ein Funktional.

Ein Funktional heisst linear, wenn die Gleichung

$$\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\Phi(f) + \beta\Phi(g)$$

für beliebige (reelle) Zahlen α und β gilt.

Eine vollständige Analogie zum R_n kommt zum Ausdruck im Satz von F. Riesz:

Jedes lineare Funktional ist von der Form

$$\Phi(f) = (h, f) = \int_a^b h(x) f(x)\, dx , \tag{5, 22}$$

wobei die Funktion h durch das Funktional Φ eindeutig definiert ist. (Für die Allgemeingültigkeit dieses Satzes muss man allerdings noch etwas allgemeinere Funktionen als Elemente des Funktionenraumes auffassen.) Die Analogie von (5, 22) zu (5, 21) ist vollkommen und offensichtlich.[1)]

Gehen wir nun zum zugeordneten Raum H über!

Es seien

$$f = \sum_k a_k \varphi_k$$
$$h = \sum_k h_k \varphi_k \quad .$$

Dann wird nach (5, 22) und (5, 12)

$$w = \Phi(f) = (h, f) = \sum_k h_k a_k \quad , \tag{5, 23}$$

eine Reihe, die gewiss konvergiert. Es entsteht also eine lineare Ortsfunktion (Ortsvektor ist $\{a_k\}_1^\infty$) im Raume H.

Damit wollen wir den Ueberblick über die mathematischen Grundlagen unserer Theorie abschliessen; andere Begriffe, die wir später noch brauchen werden, wollen wir erst an Ort und Stelle einführen, um diesen Abschnitt nicht zu unübersichtlich zu gestalten.

[1)] Ein lineares Funktional lässt also im Gegensatz zum linearen Operator stets eine Integraldarstellung zu!

6. ABSCHNITT: Fehler und Genauigkeitsmasse von Funktionen.

Jede Ordinate einer vorgegebenen Funktion f (x) sei mit einem wahren Fehler behaftet. Die Gesamtheit all dieser Fehler bildet eine (stetige) Funktion ε (x) derselben unabhängigen Veränderlichen.

Führen wir nun ein vollständiges Orthonormalsystem φ_k (x) bezüglich eines Intervalles $a \leqq x \leqq b$ ein, so lässt sich die Funktion $\varepsilon(x)$ darin darstellen:

(6, 1) $$\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \varphi_k(x)$$

mit

6, 2) $$\varepsilon_k = \left(\varepsilon(x), \varphi_k(x)\right) = \int_a^b \varepsilon(x)\, \varphi_k(x)\, dx$$

Der Vektor $\left\{\varepsilon_k\right\}_1^{\infty}$ werde Fehlervektor genannt.

Denken wir uns N solcher wahrer Fehlerfunktionen $\varepsilon^{(i)}(x)$ (i = 1, 2, 3, ... , N) gegeben (die Kurve werde etwa N-mal befahren), so kann man die mittlere Fehlerfunktion $m^2(x, y)$ durch

(6, 3) $$m^2(x,y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{(i)}(x)\, \varepsilon^{(i)}(y) = \frac{[\varepsilon(x)\, \varepsilon(y)]}{N}$$

definieren und die dazu proportionale Q-Funktion als

(6, 4) $$Q(x,y) = \frac{m^2(x,y)}{\mu^2}$$

erklären (μ^2. . . . . mittleres Fehlerquadrat der Gewichtseinheit).

Ebenso kann man aber, vom wahren Fehlervektor $\left\{\varepsilon_k\right\}_1^{\infty}$ ausgehend, wie im 4. Abschnitt die mittlere Fehlermatrix als die (nunmehr unendliche) Matrix mit den Elementen

(6, 5) $$m_{kl}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_k^{(i)} \varepsilon_l^{(i)} = \frac{[\varepsilon_k\, \varepsilon_l]}{N}$$

erklären und entsprechend die Q-Matrix mit den Elementen

(6, 6) $$Q_{kl} = \frac{m_{kl}^2}{\mu^2}$$

bilden.

Wir wollen nun zeigen, dass die m_{kl}^2 mit den Fourierkoeffizienten der Entwicklung von $m^2(x, y)$ im Orthonormalsystem der $\varphi_k(x)$ übereinstimmen.

Um allgemein eine Entwicklung einer Funktion F(x, y) zweier Veränderlicher in diesem Orthonormalsystem zu erhalten, setzen wir versuchsweise

$$F(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} F_{kl} \varphi_k(x) \varphi_l(y) \ ,$$

worin die F_{kl} konstante Koeffizienten sind. Diese werden folgendermassen bestimmt: wir multiplizieren diese Gleichung mit $\varphi_r(x)\ \varphi_s(y)$ und integrieren über das Quadrat $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$:

$$\int_{x=a}^{b} \int_{y=a}^{b} F(x,y)\, \varphi_r(x)\, \varphi_s(y)\, dx\, dy = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} F_{kl} \int_{x=a}^{b} \int_{y=a}^{b} \varphi_k(x)\, \varphi_l(y)\, \varphi_r(x)\, \varphi_s(y)\, dx\, dy$$

$$= \sum_k \sum_l F_{kl} \int_a^b \varphi_k(x)\, \varphi_r(x)\, dx \int_a^b \varphi_l(y)\, \varphi_s(y)\, dy$$

$$= \sum_k \sum_l F_{kl} (\varphi_k, \varphi_r)(\varphi_l, \varphi_s) \ .$$

Da nach (5, 8), der Definition eines Orthonormalsystems,

$$(\varphi_k, \varphi_r) = \delta_{kr}$$
$$(\varphi_l, \varphi_s) = \delta_{ls}$$

ist, so haben wir weiter

$$\int_{x=a}^{b} \int_{y=a}^{b} F(x,y)\, \varphi_r(x)\, \varphi_s(y)\, dx\, dy = \sum_k \sum_l F_{kl}\, \delta_{kr}\, \delta_{ls} = F_{rs} \ ,$$

da δ_{kr} nur für $k = r$ von Null verschieden (und gleich 1) ist und ebenso δ_{ls} nur für $l = s$. Es ist also

$$F_{kl} = \int_{x=a}^{b} \int_{y=a}^{b} F(x,y)\, \varphi_k(x)\, \varphi_l(y)\, dx\, dy \ . \tag{6, 7}$$

All das stellt eine einfache Verallgemeinerung des Falles einer Veränderlichen (5, 10) dar.

Nach diesem kleinen Exkurs kehren wir wieder zu unserer Fragestellung zurück: dem Zusammenhang zwischen $m^2(x, y)$ und den m^2_{kl}. Die Fourierkoeffizienten der Entwicklung von $m^2(x, y)$ sind gleich

$$\int_a^b \int_a^b m^2(x,y)\, \varphi_k(x)\, \varphi_l(y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_a^b \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{(i)}(x)\, \varepsilon^{(i)}(y)\, \varphi_k(x)\, \varphi_l(y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int_a^b \int_a^b \varepsilon^{(i)}(x)\, \varepsilon^{(i)}(y)\, \varphi_k(x)\, \varphi_l(y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int_a^b \varepsilon^{(i)}(x)\, \varphi_k(x)\, dx \int_a^b \varepsilon^{(i)}(y)\, \varphi_l(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_k^{(i)} \varepsilon_l^{(i)} = m^2_{kl} \ ,$$

was zu beweisen war. Dieselbe einfache Zuordnung besteht damit auch zwischen der Q-Funktion und der Q-Matrix: die Elemente der Q-Matrix sind die Koeffizienten der Entwicklung der Q-Funktion im vollständigen Orthonormalsystem $\varphi_k(x)$:

$$Q(x,y) = \sum_{k=1} \sum_{l=1} Q_{kl}\, \varphi_k(x)\, \varphi_l(y)$$

mit

$$Q_{kl} = \int_{x=a}^{b} \int_{y=a}^{b} Q(x,y)\, \varphi_k(x)\, \varphi_l(y)\, dx\, dy = \frac{1}{\mu^2} \frac{[\varepsilon_k \varepsilon_l]}{N} .$$

7. ABSCHNITT: Fehlerfortpflanzung beim linearen Operator.

Es sei eine Funktion f(x) mit der Q-Funktion Q(x, y) gegeben. Gesucht ist die Q-Funktion $Q^*(x, y)$ der Funktion $f^*(x)$, die aus f(x) durch die lineare Funktionaloperation

(7, 1) $$f^*(x) = \mathcal{L} f(x)$$

hervorgeht. Um sie zu finden, gehen wir wieder vom wahren Fehler $\varepsilon(x)$ aus. Diese Funktion geht nun durch die betrachtete Operation in

(7, 2) $$\varepsilon^*(x) = \mathcal{L}\varepsilon(x)$$

über, was aus

$$f^*(x) + \varepsilon^*(x) = \mathcal{L}\left\{f(x) + \varepsilon(x)\right\} = \mathcal{L}f(x) + \mathcal{L}\varepsilon(x)$$

(wegen der Linearität des Operators) mit (7, 1) sofort folgt. Wir werden nun zweckmässig die Schreibweise (5, 18) für unseren Operator $\mathcal{L}$ verwenden, also (7, 2) schreiben

(7, 3) $$\varepsilon^*(x) = \mathcal{L}_{xu}\varepsilon(u) ,$$

etwa wie man statt

$$\varepsilon^*(x) = \int \varepsilon(x)\, dx$$

genauer

$$\varepsilon^*(x) = \int_a^x \varepsilon(u)\, du$$

schreibt. Diese Schreibweise wird es uns ermöglichen, dem elementaren Fall des R_n äusserlich weitgehend ähnliche Ergebnisse zu bekommen.

Nach (7, 3) erhalten wir für die mittlere Fehlerfunktion von $f^*(x)$

$$m^{*2}(x,y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{*(i)}(x)\,\varepsilon^{*(i)}(y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}_{xu}\varepsilon^{(i)}(u)\,\mathcal{L}_{yv}\varepsilon^{(i)}(v) .$$

Diesen Ausdruck formen wir rein formal um in

$$\left(m^{*2}(x,y) =\right) \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}_{xu}\mathcal{L}_{yv}\varepsilon^{(i)}(u)\,\varepsilon^{(i)}(v) = \mathcal{L}_{xu}\mathcal{L}_{yv}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{(i)}(u)\,\varepsilon^{(i)}(v) .$$

Damit erhalten wir

(7, 4) $$m^{*2}(x,y) = \mathcal{L}_{xu}\mathcal{L}_{yv}\, m^2(u,v)$$

und nach Division durch μ^2, das mittlere Fehlerquadrat der Gewichtseinheit,

(7, 5) $$Q^*(x,y) = \mathcal{L}_{xu}\mathcal{L}_{yv}\, Q(u,v)$$

als Fortpflanzungsgesetz für die mittlere Fehlerfunktion und die Q-Funktion bezüglich der linearen Operation (7, 1).

Der lineare Doppeloperator. Bei der Herleitung von Gleichung (7, 4) wurde, wie schon erwähnt, rein formal gerechnet, ohne die Bedeutung und die Zulässigkeit der durchgeführten Manipulationen zu überlegen. Dies wollen wir jetzt tun.

Es sei $\mathcal{L}_{xu}\mathcal{L}_{yv}$ ein "(linearer) Doppeloperator", der auf eine Funktion F(u, v) zweier Veränderlicher wirkt und sie folgendermassen in eine andere Funktion

$$F^*(x,y) = \mathcal{L}_{xu}\mathcal{L}_{yv}F(u,v)$$

überführt: wir bilden zunächst die Operation

$$\mathcal{L}_{yv}F(u,v) ,$$

bezüglich welcher F(u, v) als eine Funktion von v allein zu betrachten ist (u gilt als Parameter). Dies kommt durch den Index v im Operatorzeichen $\mathcal{L}_{yv}$ zum Ausdruck - man erkennt den Vorteil unserer Bezeichnungsweise. Durch diese Operation erhalten wir eine Funktion G(u, y) von u und y, auf die wir nun die zweite Operation

$$\mathcal{L}_{xu}G(u,y)$$

anwenden, bezüglich der entsprechend G(u, y) als Funktion von u allein mit dem Parameter y betrachtet wird. Man erhält so eine Funktion von x und y, die eben unser $F^*(x,y)$ ist. Es ist also

$$(7,6) \qquad F^*(x,y) = \mathcal{L}_{xu}\mathcal{L}_{yv}F(u,v) = \mathcal{L}_{xu}G(u,y) = \mathcal{L}_{xu}\left(\mathcal{L}_{yv}F(u,v)\right) .$$

Dadurch ist der eingeführte Doppeloperator $\mathcal{L}_{xu}\mathcal{L}_{yv}$ eindeutig definiert. Das Doppelintegral $\int_{u=a}^{x}\int_{v=a}^{y}\ldots du\,dv$ ist ein Sonderfall eines solchen Doppeloperators. Aus der Linearität des einfachen Operators $\mathcal{L}$ folgt die des Doppeloperators $\mathcal{L}_{xu}\mathcal{L}_{yv}$:

$$\mathcal{L}_{xu}\mathcal{L}_{yv}\left(\alpha F_1(u,v)+\beta F_2(u,v)\right) = \mathcal{L}_{xu}\left(\alpha\mathcal{L}_{yv}F_1(u,v)+\beta\mathcal{L}_{yv}F_2(u,v)\right) =$$

$$= \alpha\mathcal{L}_{xu}\mathcal{L}_{yv}F_1(u,v)+\beta\mathcal{L}_{xu}\mathcal{L}_{yv}F_2(u,v) .$$

Ist nun die Stammfunktion F(u, v) das Produkt zweier Funktionen, von denen die eine nur von u, die andere nur von v abhängt:

$$F(u,v) = g(u)\,h(v) ,$$

so wird

$$\mathcal{L}_{xu}\mathcal{L}_{yv}\, g(u)\, h(v) = \mathcal{L}_{xu}\left(\mathcal{L}_{yv}\, g(u)\, h(v)\right)$$
$$= \mathcal{L}_{xu}\left(g(u)\,\mathcal{L}_{yv}\, h(v)\right)$$
$$= \mathcal{L}_{yv}\, h(v) . \mathcal{L}_{xu}\, g(u) ,$$

es ist also

$$\mathcal{L}_{xu}\mathcal{L}_{yv}\, g(u)\, h(v) = \mathcal{L}_{xu}\, g(u)\, \mathcal{L}_{yv}\, h(v) , \tag{7, 7}$$

denn wegen der Linearität des Operators $\mathcal{L}$ ist

$$\mathcal{L}_{yv}\left(c . h(v)\right) = c . \mathcal{L}_{yv} h(v)$$

und es kann, da $\mathcal{L}_{yv}$ nur auf die Veränderliche v wirkt, g (u) als eine Konstante c angesehen werden. Ähnlich ist es dann mit $\mathcal{L}_{xu}$, bezüglich dessen die Funktion $\mathcal{L}_{yv} h(v)$ als heraushebbare Konstante anzusehen ist.

Wegen (7, 7) ist also

$$\mathcal{L}_{xu}\, \varepsilon^{(i)}(u)\, \mathcal{L}_{yv}\, \varepsilon^{(i)}(v) = \mathcal{L}_{xu}\mathcal{L}_{yv}\, \varepsilon^{(i)}(u)\, \varepsilon^{(i)}(v) ,$$

ferner ist wegen der Linearität von $\mathcal{L}_{xu}\mathcal{L}_{yv}$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}_{xu}\mathcal{L}_{yv}\, \varepsilon^{(i)}(u)\, \varepsilon^{(i)}(v) = \mathcal{L}_{xu}\mathcal{L}_{yv}\, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{(i)}(u)\, \varepsilon^{(i)}(v) ;$$

damit sind die Bedeutung und die Berechtigung der bei der Herleitung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes (7, 4) durchgeführten Umformungen völlig geklärt.

Abbildung auf den Hilbertraum. Bezeichnet (L_{kl}) die dem Operator $\mathcal{L}$ entsprechende Transformationsmatrix im Hilbertraum, ist also nach (5, 20)

$$L_{kl} = (\mathcal{L}\varphi_l , \varphi_k) ,$$

so nehmen die Fortpflanzungsgesetze der mittleren Fehlermatrix und der Q-Matrix die Gestalt der Formeln (4, 16) und (4, 17) an (mit $n \longrightarrow \infty$), es ist also

$$m^{*2}_{kl} = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} L_{kr} L_{ls}\, m^2_{rs} \tag{7, 8}$$

$$Q^*_{kl} = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} L_{kr} L_{ls}\, Q_{rs} . \tag{7, 9}$$

Der einfache Beweis verläuft folgendermassen:

Die der Gleichung (7, 2) im Hilbertraum entsprechende Beziehung lautet nach (5, 19), wenn ε_k und ε^*_k die Fourierkoeffizienten von $\varepsilon(x)$ bzw. $\varepsilon^*(x)$

sind:

$$\varepsilon_k^* = \sum_{r=1}^{\infty} L_{kr}\,\varepsilon_r$$

Daraus erhält man

$$m_{kl}^{*2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_k^{*(i)}\varepsilon_l^{*(i)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\sum_{r=1}^{\infty} L_{kr}\,\varepsilon_r^{(i)} \sum_{s=1}^{\infty} L_{ls}\,\varepsilon_s^{(i)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} L_{kr}L_{ls}\,\varepsilon_r^{(i)}\varepsilon_s^{(i)}\right\} = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\left\{L_{kr}L_{ls}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_r^{(i)}\varepsilon_s^{(i)}\right\}$$

und damit

$$m_{kl}^{*2} = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} L_{kr}L_{ls}\,m_{rs}^2 ,$$

also die Gleichung (7, 8); (7, 9) geht daraus durch Division durch μ^2 hervor.

Hiezu sei bemerkt, dass man die verwendeten Umformungen durchführen kann, obwohl es sich um unendliche Reihen statt endlicher Summen handelt; die Bedeutung ist dieselbe wie bei diesen; der Doppelsumme $\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}$ entspricht die unendliche Doppelreihe $\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}$. Das ist dann möglich, wenn die Reihen absolut konvergieren[1]; die Reihen $\sum_{r=1}^{\infty} L_{kr}\,\varepsilon_r$ sind aber absolut konvergent.

Anwendungen. Das allgemeine Fehlerfortpflanzungsgesetz (7, 5) für lineare Operatoren wollen wir nun auf den im fünften Kapitel eingeführten Integraloperator (5, 16) anwenden, der, wie erwähnt, formal genau der linearen Transformation eines Vektors entspricht:

$$f^*(x) = \int_a^b L(x,u)\,f(u)\,du .$$

(L(x, u) ist, um es zu wiederholen, eine gewöhnliche Funktion zweier Veränderlicher.) Wir erhalten aus (7, 5) unter Berücksichtigung der Definition (7, 6) des Doppeloperators sofort das Fehlerfortpflanzungsgesetz für diesen Operator:

$$Q^*(x,y) = \int_{u=a}^{b}\int_{v=a}^{b} L(x,u)\,L(y,v)\,Q(u,v)\,du\,dv . \tag{7, 10}$$

Man hat hier ein sehr anschauliches Beispiel für den oben eingeführten Begriff des Doppeloperators; die Formel entspricht völlig dem Fortpflanzungsgesetz

---

[1] siehe etwa Mangoldt-Knopp, Einführung in die Höhere Mathematik, zweiter Band, S. Hirzel Verlag Zürich 1957.

(4, 17) für die Q-Matrix bei einer linearen Transformation:

$$Q^*_{kl} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} L_{kr} L_{ls} Q_{rs} \; ;$$

es entsprechen einander, um es zu wiederholen:

unabhängige Veränderliche ..... laufender Index
Funktion zweier Veränderlicher..... Matrix
Doppelintegral ..... Doppelsumme
Intervallanfang a ..... erster Index 1
Intervallende b ..... letzter Index n

Leider lassen sich, wie bereits erwähnt, nicht alle linearen Operatoren als Integraloperatoren darstellen.

Der im ersten Teil ausführlich behandelte Integrationsoperator

$$f^*(x) = \int_a^x f(u)\,du \quad ^{1)}$$

lässt eine Darstellung als Integraloperator zu, es ist dann der Integralkern

$$L(x,u) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad u \leqq x \\ 0 & \text{für} \quad u > x \end{cases}$$

Das dort gefundene Fehlerfortpflanzungsgesetz (2, 5) für die Integration ergibt sich nun als einfacher Sonderfall des allgemeinen Gesetzes (7, 5), bzw. von (7, 10).

Nichtlineare Operationen. Zum Abschluss noch einiges über nichtlineare Operatoren, d.h. über solche Funktionaloperatoren

(7, 11) $$f^*(x) = T\left\{f(x)\right\}$$

(vgl. die Definition im 5. Abschnitt), für die i.a.

$$T\left\{\alpha f + \beta g\right\} \neq \alpha T\left\{f\right\} + \beta T\left\{g\right\}$$

ist. Solche Funktionaloperatoren entsprechen den allgemeinen (nichtlinearen) Koordinatentransformationen im R_n

(7, 12) $$x^*_k = \psi_k(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \; .$$

Wir wollen nun kurz an den in diesem Fall einzuschlagenden Weg erinnern und daraus auf das Analogon im Funktionenraum schliessen.

Es seien die x_k mit den wahren Fehlern ε_k und die x^*_k mit den wahren Fehlern ε^*_k behaftet. Wir erhalten dann aus (7, 12)

---

1) Wir hatten früher a=0 gesetzt.

$$x_k^* + \varepsilon_k^* = \psi_k(x_1+\varepsilon_1, x_2+\varepsilon_2, x_3+\varepsilon_3, \ldots, x_n+\varepsilon_n) .$$

Entwickeln wir die rechte Seite dieser Gleichung nach dem Taylorschen Satz und brechen wegen der Kleinheit der ε_r nach dem linearen Glied ab, so folgt

$$x_k^* + \varepsilon_k^* = \psi_k(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_r}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)\, \varepsilon_r + \ldots$$

und daraus mit Gl. (7, 12), wenn wir noch

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x_r}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = L_{kr}$$

setzen:

(7, 13) $$\varepsilon_k^* = \sum_{r=1}^{n} L_{kr}\, \varepsilon_r .$$

Wir erhalten also die ε_k^* in hinreichender Näherung als lineare Funktionen der ε_k.

Nun der analoge Fall im Funktionenraum: Nach (7, 11) ist in der üblichen Bezeichnung

$$f^*(x) + \varepsilon^*(x) = T\left\{f(x) + \varepsilon(x)\right\} .$$

In Analogie zu (7, 13) müssen wir also trachten, eine Gleichung von der Form

(7, 14) $$\varepsilon^*(x) = \mathcal{L}\, \varepsilon(x)$$

mit $\mathcal{L}$ als linearen Operator zu erhalten. Wir wollen auf eine allgemeine Untersuchung dieses Problems verzichten und nur als Illustration einen auch praktisch wichtigeren Sonderfall bringen:

Es sei

(7, 15) $$f^*(x) = T\left\{f(x)\right\} = \int_a^x F[f(u)]\, du ,$$

worin $F[f(u)]$ eine beliebige stetige und differenzierbare Funktion von $f(u)$ bedeute. Dann haben wir

(7, 16) $$f^*(x) + \varepsilon^*(x) = \int_a^x F[f(u) + \varepsilon(u)]\, du .$$

Entwickeln wir $F[f(u) + \varepsilon(u)]$ nach dem Taylorschen Satz:

$$F[f(u) + \varepsilon(u)] = F[f(u)] + F'[f(u)]\, \varepsilon(u) + \ldots$$

unter Beschränkung auf das in $\varepsilon(u)$ lineare Glied und setzen diese Entwicklung in (7, 16) ein, so folgt

(7, 16') $$f^*(x) + \varepsilon^*(x) = \int_a^x F[f(u)]\, du + \int_a^x F'[f(u)]\, \varepsilon(u)\, du + \ldots$$

$F'[f(u)]$ bedeutet hierin natürlich den gewöhnlichen Differentialquotienten $\frac{dF}{df}$

an der Stelle f(u). Setzen wir dafür noch

$$F'[f(u)] = h(u) \ ,$$

so erhalten wir aus (7, 16') mit (7, 15)

$$\varepsilon^*(x) = \int_a^x h(u)\,\varepsilon(u)\,du \ , \tag{7, 17}$$

also einen Operator, von dessen Linearität man sich leicht überzeugt. Damit ist dieser Fall auf den einer linearen Funktionaloperation, den wir schon behandelt haben, zurückgeführt. Aus der allgemeinen Formel (7, 5) erhält man sofort das Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$Q^*(x,y) = \int_{u=a}^{x} \int_{v=a}^{y} h(u)\,h(v)\,Q(u,v)\,du\,dv \ . \tag{7, 18}$$

Als Beispiel setzen wir

$$F[f(u)] = [f(u)]^2 .$$

Dann wird

$$h(u) = F'[f(u)] = 2f(u)$$

und (7, 17) erhält die Gestalt

$$\varepsilon^*(x) = 2\int_a^x f(u)\,\varepsilon(u)\,du \ .$$

Für die Q-Funktion bekommen wir für dieses Beispiel nach (7, 18)

$$Q^*(x,y) = 4\int_{u=a}^{x} \int_{v=a}^{y} f(u)\,f(v)\,Q(u,v)\,du\,dv \ .$$

8. ABSCHNITT: Fehlerfortpflanzung beim linearen Funktional

Es sei durch

$$w = \Phi\big(f(x)\big) = \big(h(x), f(x)\big) \tag{8,1}$$

ein lineares Funktional gegeben. (Vgl. die Definition im 5. Abschnitt und den dortigen Satz von Riesz). w ist also eine (reelle) Zahl, die der Funktion f(x) zugeordnet ist; h(x) ist die für das Funktional charakteristische Hilfsfunktion. Ist nun f(x) mit einem wahren Fehler $\varepsilon(x)$ behaftet, so hat die Zahl w den wahren Fehler η (auch eine Zahl), der sich aus

$$w + \eta = \Phi\big(f(x) + \varepsilon(x)\big) = \Phi\big(f(x)\big) + \Phi\big(\varepsilon(x)\big)$$

mit (8, 1) zu

$$\eta = \Phi\big(\varepsilon(x)\big) = \big(h(x), \varepsilon(x)\big) = \int_a^b h(x)\,\varepsilon(x)\,dx \tag{8,2}$$

berechnet.

Wir denken uns nun N Bestimmungen von w durchgeführt; eine beliebige davon habe den Index i. Dann ist

$$\eta^{(i)} = \big(h(x), \varepsilon^{(i)}(x)\big) = \int_a^b h(x)\,\varepsilon^{(i)}(x)\,dx\ .$$

Wenn wir daraus das mittlere Fehlerquadrat m_w^2 von w berechnen, erhalten wir

$$m_w^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\eta^{(i)}\eta^{(i)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_a^b h(x)\,\varepsilon^{(i)}(x)\,dx\int_a^b h(y)\,\varepsilon^{(i)}(y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{x=a}^{b}\int_{y=a}^{b} h(x)\,h(y)\,\varepsilon^{(i)}(x)\,\varepsilon^{(i)}(y)\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b}\int_{y=a}^{b} h(x)\,h(y)\,\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon^{(i)}(x)\,\varepsilon^{(i)}(y)\,dx\,dy\,,$$

also schliesslich

$$m_w^2 = \int_{x=a}^{b}\int_{y=a}^{b} h(x)\,h(y)\,m^2(x,y)\,dx\,dy\ . \tag{8,3}$$

Bezeichnen wir nun den Kofaktor von w mit q_w, ist also

$$q_w = \frac{m_w^2}{\mu^2}\ ,$$

so wird

$$q_w = \int_{x=a}^{b}\int_{y=a}^{b} h(x)\,h(y)\,Q(x,y)\,dx\,dy\ . \tag{8,4}$$

(8, 3) und (8, 4) stellen also die Fehlerfortpflanzungsgesetze für das lineare Funktional (8, 1) dar.

Abbildung auf den Hilbertraum. Betrachten wir wieder die Abbildung auf den Hilbertraum mit den "Abbildungsgleichungen"

$$f(x) = \sum_k a_k \varphi_k(x)$$

(8, 5) $$\varepsilon(x) = \sum_k \varepsilon_k \varphi_k(x)$$

$$h(x) = \sum_k h_k \varphi_k(x) \quad ,$$

so wird nach (5, 23)

$$w = \sum_k h_k a_k$$

und

(8, 6) $$\eta = \sum_k h_k \varepsilon_k$$

und aus der letzten Gleichung auf die übliche Weise:

(8, 7) $$m_w^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} h_k h_l m_{kl}^2$$

(8, 8) $$q_w = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} h_k h_l Q_{kl} \; .$$

Es sei hier besonders auf die völlige Analogie etwa zwischen (8, 4) und (4, 12) bzw. (8, 8) hingewiesen, die sich bis auf die Entsprechung von Doppelintegral und Doppelsumme erstreckt - ähnlich wie die zwischen (7, 10) und (4, 17) bzw. (7, 9).

Anwendung. Ein wichtiges Beispiel für die Fehlerfortpflanzung beim linearen Funktional liefert die im 3. Abschnitt durchgeführte Untersuchung des Einflusses der Fahrfehler auf die Flächenbestimmung mit dem Umfahrungsplanimeter. Der Vergleich von (3, 1) mit (8, 2) zeigt, dass hier die Hilfsfunktion

$$h \equiv 1$$

ist und dass a = 0, b = U sind. Die Gleichung (3, 2) ergibt sich daher als einfacher Sonderfall von (8, 3).

Damit wollen wir die Betrachtung der Fehlerfortpflanzung beim linearen Funktional beschliessen; auf eine entsprechende Untersuchung für das nichtlineare Funktional, das dem nichtlinearen Operator (7, 11) entspricht und ähnlich behandelt wird, müssen wir aus Platzgründen verzichten.

9. ABSCHNITT: Anwendungsmöglichkeiten der Theorie; ein Beispiel für die Abbildung auf dem Hilbertraum.

Voraussetzungsgemäss ist unsere Theorie stets dann anwendbar, wenn mit einer Funktion oder Kurve eine Operation ((lineare) Funktionaloperation im engeren Sinn oder Bildung eines (linearen) Funktionals) vorgenommen wird, wenn die Funktion nicht exakt, sondern mit Fehlern behaftet in die Operation eingeht und wenn nur d i e s e Fehler sich auf das Ergebnis auswirken.

Besonders wichtig sind die graphisch-mechanischen Operationen. Hier sind die verschiedenen Arten von Integriergeräten zu nennen - nicht nur die gewöhnlichen Integraphen und Planimeter, sondern auch etwa die Produkt-und Stjeltjes-Integraphen und -planimeter, die Integrale von der Form

$$\int f(x)\,h(x)\,dx \qquad \text{bzw.} \qquad \int f(x)\,dH(x)$$

(h (x) und H (x) sind Hilfsfunktionen) auswerten.[1]

Auf die graphisch-mechanische Differentiation hingegen lässt sich unsere Theorie nicht anwenden, da hiebei die gegebene Kurve nicht bloss mit einem Fahrstift befahren wird, sondern andere Vorrichtungen verwendet werden.[2]

Die Abbildung auf den Hilbertraum ist für graphisch-mechanische Operationen in praktischer Hinsicht unbedeutend, da, wie man nachrechnen kann, die der Q-Funktion (1, 7) (für das Befahren einer Kurve) entsprechende Q-Matrizen für die gebräuchlichen Systeme von Orthonormalfunktionen die Eigenschaft haben, dass ihre Elemente Q_{kl} für zunehmende k und l nur langsam gegen Null konvergieren, und sich also für zahlenmässige Rechnungen schlecht eignen. Das liegt an der besonderen Art der Funktion (1, 7), die nur für $x \doteq y$ merklich von Null verschieden ist.

Wir haben jedoch in den theoretischen Ableitungen die Abbildung auf den Hilbertraum deshalb mitbehandelt, weil dieser erstens einen natürlichen, für eine abgerundete Darstellung notwendigen Uebergang vom n-dimensionalen Raum zum Funktionenraum bildet, und weil es zweitens auch ganz andere Q-Funktionen gibt, bei denen diese Abbildung sehr wohl eine praktische Bedeu-

---

[1] Zur Anwendung auf die heute sehr weit entwickelten allgemeinen Differentialgleichungsmaschinen, die sogenannten Analogrechner, wäre ein Ausbau der Theorie der Fehlerfortpflanzung bei nichtlinearen Operatoren und ihre Erweiterung auf nichtlineare Operatoren mit mehreren variablen Funktionen nötig - all das stösst auf grosse mathematische Schwierigkeiten.

[2] Zur Orientierung über instrumentelle Fragen sei etwa Fr. A. Willers, Mathematische Maschinen und Instrumente, Akademieverlag Berlin 1951, genannt.

tung haben kann.

Man denke etwa an folgendes Beispiel: eine periodische Funktion ist durch eine Anzahl von gemessenen Funktionswerten gegeben und wird durch ein Fouriersches Polynom nach dem bekannten Ausgleichsverfahren angenähert. Als Ergebnis der dabei durchgeführten Fehlerrechnung bekommt man eine Matrix der Kofaktoren Q_{kl}, die die Q-Matrix für die Unbekannten der Ausgleichung darstellt und mit der Matrix (6, 6) übereinstimmt, wenn man als Unbekannte die durch die Gleichung

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)$$

-mit $\varphi_k(x)$ nach (5, 9) - definierten Koeffizienten a_k wählt: (Q_{kl}) nach (6, 6) ist ja per definitionem die Q-Matrix für den Hilbertvektor $\{a_k\}_1^{\infty}$ [1]. Die a_k stehen mit den Unbekannten der üblichen Fourier-Ausgleichung natürlich in einfachstem Zusammenhang (Proportionalität mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$). Dass die so erhaltene Matrix endlich von der Dimension n ist, bedeutet nur den Sonderfall einer unendlichen Matrix, deren Elemente Q_{kl} gleich Null sind für k oder l oder beide grösser als n. Unsere Theorie gilt dann, wie man leicht sieht, auch für den Fall, dass man mit der durch den Näherungsausdruck analytisch gegebenen Funktion eine rechnerische Funktionaloperation durchführt, sie zum Beispiel analytisch differenziert, oder mit ihr analytisch ein Funktional bildet. In einem solchen Fall können die für die Fehlerfortpflanzung im Hilbertraum massgebenden Gleichungen (7, 9) und (8, 8) auch praktisch von Bedeutung sein, da dann, wie gesagt, das Primäre nicht die Q-Funktion, sondern die Q-Matrix ist. Wir wollen also nun ein Beispiel für die Abbildung auf den Hilbertraum betrachten.

Fortpflanzung der Q-Matrix bei der Differentiation.

Es sei eine Funktion f (x) gegeben, deren Genauigkeit durch die Q-Matrix $\mathfrak{Q} = (Q_{kl})$ bezüglich des vollständigen Orthonormalsystem (5, 9) gekennzeichnet sei. Diese Funktion werde nun differenziert; gefragt ist die Q-Matrix $\mathfrak{Q}^* = (Q^*_{kl})$ der Ableitungskurve

$$f^*(x) = \vartheta f(x) \equiv \frac{df(x)}{dx} .$$

---

1) Die Grössen ε_k nach (6, 2) können ja als wahre Fehler der a_k betrachtet werden.

Wir müssen hiezu den Differentiationsoperator ϑ im Orthonormalsystem (5, 9) darstellen.

Dieses System lautet, um es zu wiederholen:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{2\nu}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \nu x \\ \varphi_{2\nu+1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \nu x \end{aligned}\right\} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots .$$

Die Elemente D_{kl} der zu ϑ gehörigen Matrix sind nach (5, 20) aus der Gleichung

$$D_{kl} = (\vartheta \varphi_l, \varphi_k)$$

zu berechnen.

Nun ist

$$\vartheta \varphi_1(x) \equiv 0$$

$$\vartheta \varphi_{2\nu}(x) = \nu \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \nu x = + \nu \varphi_{2\nu+1}(x)$$

$$\vartheta \varphi_{2\nu+1}(x) = - \nu \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \nu x = - \nu \varphi_{2\nu}(x) .$$

Es ist also

(9, 1) $$D_{11} = D_{k1} = D_{1l} = 0$$

und (μ, ν bedeuten hier und im folgenden stets die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, . .)

$$D_{2\mu,2\nu} = \int_0^{2\pi} \nu \varphi_{2\nu+1}(x) \varphi_{2\mu}(x)\, dx = 0$$

(9, 2)
$$D_{2\mu,2\nu+1} = \int_0^{2\pi} [-\nu \varphi_{2\nu}(x)] \varphi_{2\mu}(x)\, dx = \begin{cases} -\mu & \text{für} \quad \mu = \nu \\ 0 & \text{für} \quad \mu \neq \nu \end{cases}$$

$$D_{2\mu+1,2\nu} = \int_0^{2\pi} \nu \varphi_{2\nu+1}(x) \varphi_{2\mu+1}(x)\, dx = \begin{cases} \mu & \text{für} \quad \mu = \nu \\ 0 & \text{für} \quad \mu \neq \nu \end{cases}$$

$$D_{2\mu+1,2\nu+1} = \int_0^{2\pi} [-\nu \varphi_{2\nu}(x)] \varphi_{2\mu+1}(x)\, dx = 0$$

unter Berücksichtigung der Orthonormalität der φ_k. Wir bekommen damit für

ϑ folgende Matrix (die punktierte schräge Linie bedeutet die Hauptdiagonale):

$$\vartheta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & +2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +3 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +4 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Die Matrix (Q^*_{kl}) ergibt sich nach (7, 9) zu

$$Q^*_{kl} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} D_{kr} D_{ls} Q_{rs} .$$

Es ist also wegen (9, 1)

(9, 3) $$Q^*_{11} = Q^*_{k1} = Q^*_{1l} = 0$$

und etwa

$$\begin{aligned} Q^*_{2\mu,2\nu} = & \sum_{\varrho=1}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{\infty} D_{2\mu,2\varrho} D_{2\nu,2\sigma} Q_{2\varrho,2\sigma} + \\ & + \sum_{\varrho=1}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{\infty} D_{2\mu,2\varrho} D_{2\nu,2\sigma+1} Q_{2\varrho,2\sigma+1} + \\ & + \sum_{\varrho=1}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{\infty} D_{2\mu,2\varrho+1} D_{2\nu,2\sigma} Q_{2\varrho+1,2\sigma} + \\ & + \sum_{\varrho=1}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{\infty} D_{2\mu,2\varrho+1} D_{2\nu,2\sigma+1} Q_{2\varrho+1,2\sigma+1} . \end{aligned}$$

Die ersten drei Summen auf der rechten Seite sind Null (wegen(9, 2)), von der vierten ist nur das Glied mit $\varrho = \mu$ und $\sigma = \nu$ von Null verschieden. Ähnliche Verhältnisse haben wir bei den anderen Q^*_{kl}, sodass wir schliesslich erhalten:

$$
\begin{aligned}
Q^*_{2\mu,2\nu} &= \mu\nu\, Q_{2\mu+1,2\nu+1} \\
Q^*_{2\mu,2\nu+1} &= -\mu\nu\, Q_{2\mu+1,2\nu} \\
Q^*_{2\mu+1,2\nu} &= -\mu\nu\, Q_{2\mu,2\nu+1} \\
Q^*_{2\mu+1,2\nu+1} &= \mu\nu\, Q_{2\mu,2\nu} \; .
\end{aligned}
\tag{9,4}
$$

Aus diesen Formeln (Faktor $\mu\nu$!) ist die bekannte Tatsache ersichtlich, dass eine Unsicherheit in der Kurvenbestimmung durch die Differentiation vergrössert wird.

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen

6 Hefte, je 32 Seiten. Jahresabonnement S 72·—.

Sonderhefte zur Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen

Sonderheft 1: Festschrift Eduard Doležal. Zum 70. Geburtstag. 198 Seiten, Neuauflage, 1948 Preis S 18·—. (Vergriffen)

Sonderheft 2: Lego (Herausgeber), Die Zentralisierung des Vermessungswesens in ihrer Bedeutung für die topographische Landesaufnahme. 40 Seiten, 1935. Preis S 24·—. (Vergr.)

Sonderheft 3: Ledersteger, Der schrittweise Aufbau des europäischen Lotabweichungssystems und sein bestanschließendes Ellipsoid. 140 Seiten, 1948. Preis S 25·—.

Sonderheft 4: Zaar, Zweimedienphotogrammetrie. 40 Seiten, 1948. Preis S 18·—.

Sonderheft 5: Rinner, Abbildungsgesetz und Orientierungsaufgaben in der Zweimedienphotogrammetrie. 45 Seiten, 1948. Preis S 18·—.

Sonderheft 6: Hauer, Entwicklung von Formeln zur praktischen Anwendung der flächentreuen Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene. 31 Seiten, 1949. Preis S 15·—. (Vergriffen)

Sonderheft 7/8: Ledersteger, Numerische Untersuchungen über die Perioden der Polbewegung. Zur Analyse der Laplace'schen Widersprüche. 59 + 22 Seiten, 1949. Preis S 25·—.

Sonderheft 9: Die Entwicklung und Organisation des Vermessungswesens in Österreich. 56 Seiten, 1949. Preis S 22·—.

Sonderheft 11: Mader, Das Newton'sche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung. 74 Seiten, 1951. Preis S 25·—.

Sonderheft 12: Ledersteger, Die Bestimmung des mittleren Erdellipsoides und der absoluten Lage der Landestriangulationen. 140 Seiten, 1951. Preis S 35·—.

Sonderheft 13: Hubeny, Isotherme Koordinatensysteme und konforme Abbildungen des Rotationsellipsoides. 208 Seiten, 1953. Preis S 60·—.

Sonderheft 14: Festschrift Eduard Doležal. Zum 90. Geburtstag. 764 Seiten und viele Abbildungen. 1952. Preis S 120·—.

Sonderheft 15: Mader, Die orthometrische Schwerekorrektion des Präzisions-Nivellements in den Hohen Tauern. 26 Seiten und 12 Tabellen. 1954. Preis S 28·—.

Sonderheft 16: Theodor Scheimpflug — Festschrift. Zum 150jährigen Bestand des staatlichen Vermessungswesens in Österreich. 90 Seiten mit 46 Abbildungen und XIV Tafeln, 1956. Preis S 60·—.

Sonderheft 17: Ulbrich, Geodätische Deformationsmessungen an österreichischen Staumauern und Großbauwerken. 72 Seiten mit 40 Abbildungen und einer Luftbildkarten-Beilage, 1956. Preis S 48·—.

Sonderheft 18: Brandstätter, Exakte Schichtlinien und topographische Geländedarstellung. 94 Seiten mit 49 Abbildungen und Karten und 2 Kartenbeilagen. 1957. Preis S 80·— (DM 14·—).

Sonderheft 19: Vorträge aus Anlaß der 150-Jahr-Feier des staatlichen Vermessungswesens in Österreich, 4.—9. Juni 1956

Teil 1: Über das staatliche Vermessungswesen, 24 Seiten, 1957. Preis S 28·—.

Teil 2: Über Höhere Geodäsie. 28 Seiten, 1957. Preis S 34·—.

Teil 3: Vermessungsarbeiten anderer Behörden. 24 Seiten, 1957. Preis S 28·—.

Teil 4: Der Sachverständige. · Das k. u. k. Militärgeographische Institut. 18 Seiten, 1958. Preis S 20·—.

Teil 5: Über besondere photogrammetrische Arbeiten. 38 Seiten, 1958. Preis S 40·—.

Teil 6: Markscheidewesen und Probleme der Angewandten Geodäsie. 42 Seiten, 1958. Preis S 42·—.

Sonderheft 20: Jerie, Weitere Analogien zwischen Aufgaben der Mechanik und der Ausgleichsrechnung. 24 Seiten mit 14 Abbildungen. Preis S 32·—.

Sonderheft 21: Mader, Die zweiten Ableitungen des Newton'schen Potentials eines Kugelsegments. · Topographisch berechnete partielle Geoidhebungen. · Tabellen zur Berechnung der Gravitation unendlicher, plattenförmiger prismatischer Körper. 36 Seiten mit 11 Abbildungen. Preis S 42·—.

Sonderheft 22: Moritz, Fehlertheorie der Graphisch-Mechanischen Integretion. · Grundzüge einer allgemeinen Fehlertheorie im Funktionenraum. 53 Seiten mit 6 Abbildungen. Preis S 52·— (DM 9·—).

Sämtliche Publikationen zu beziehen durch den

Österreichischen Verein für Vermessungswesen

Wien VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3