

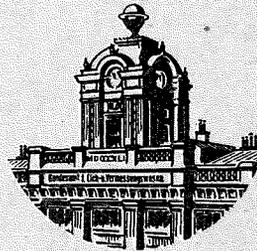
612/2
Institut für Landesvermessung
der Technischen Universität in Wien
1040, Gußhausstraße 25-29

Sonderveröffentlichung 19
der Österreichischen Zeitschrift
für Vermessungswesen

VORTRÄGE
aus Anlaß der 150-Jahr-Feier
des staatlichen Vermessungswesens
in Österreich

4. — 9. Juni 1956

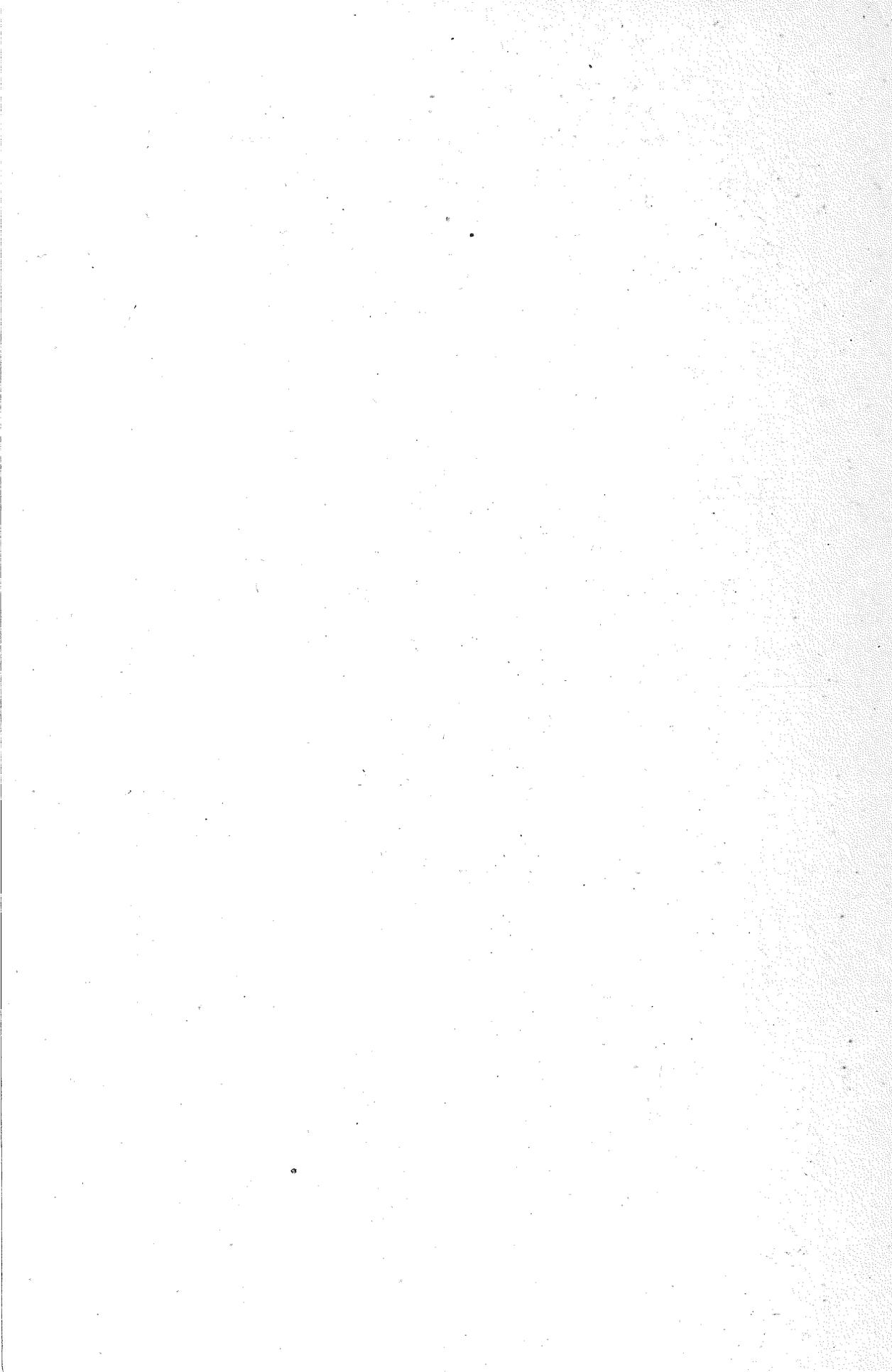
Teil 2: Über Höhere Geodäsie



Herausgegeben vom
Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen
und dem Österreichischen Verein für Vermessungswesen

Im Selbstverlag des Vereines, Wien VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3

Wien 1957



Sonderveröffentlichung 19
der Österreichischen Zeitschrift
für Vermessungswesen

VORTRÄGE
aus Anlaß der 150-Jahr-Feier
des staatlichen Vermessungswesens
in Österreich

4. — 9. Juni 1956

Teil 2: Über Höhere Geodäsie



Herausgegeben vom
Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen
und dem Österreichischen Verein für Vermessungswesen

Im Selbstverlag des Vereines, Wien VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3

Wien 1957

Inhaltsverzeichnis

Heft 19/2	A. Barvir: Gravimetrische Lagerstättenforschung und die damit verbundenen geodätischen Arbeiten.....	Seite 25
	E. Buchar: Die Geoidundulation auf dem Gebiete der CSR	„ 33
	K. Ledersteger: Die theoretischen Grundlagen der Großraumtriangulation.	„ 41

Photomech. Repr. und Druck:
Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen (Landesaufnahme) in Wien

Gravimetrische Lagerstättenforschung und die damit verbundenen geodätischen Arbeiten

Von A. Barvir

Die Geophysik ist bekanntlich die Lehre von den physikalischen Eigenschaften unseres Erdballes und von den physikalischen Vorgängen in seinem Inneren, an seiner Oberfläche und in seiner Umgebung. Die Erkenntnisse dieser Wissenschaft macht sich die angewandte Geophysik zur Auffindung von Bodenschätzen zunutze. Die Messmethoden der allgemeinen Geophysik werden verfeinert und liefern Hinweise auf geologische Untergrundverhältnisse bis zu einer dem Menschen wirtschaftlich erreichbaren Tiefe von einigen Kilometern. Dabei werden die physikalischen Messarbeiten weitgehend mechanisiert, so dass sie fast nur mehr Routinearbeit sind und oft von Hilfspersonal besorgt werden können.

Alle geophysikalischen Messmethoden erfordern zusätzlich eine ebenso umfangreiche geodätische Arbeit.

a) Bei der magnetischen Vermessung grösserer Gebiete wird von einem Flugzeug an einem zirka 30 Meter langen Seil ein Luft-Magnetometer nachgeschleppt, das automatisch die Variationen des Erdmagnetfeldes registriert. Gleichzeitig wird das überflogene Gelände vom Flugzeug aus aerophotogrammetrisch aufgenommen. Kamera und Magnetometer sind durch eine Leitung im Schleppseil elektrisch verbunden, so dass jedem photographischen Aufnahmezeitpunkt die entsprechende Variation in der magnetischen Feldstärke zugeordnet erscheint. Die Empfindlichkeit dieser Magnetometer beträgt ungefähr ein Hunderttausendstel der erdmagnetischen Feldstärke, so dass sich die unterirdischen Schichten durch ihren verschiedenen Magnetitgehalt und ihre verschiedene Tiefenlage bemerkbar machen. An geodätischen Arbeiten fallen die luftphotogrammetrische Geländeaufnahme samt allen erforderlichen Passpunktmessungen an. Darüber hinaus erfolgt die Auswertung der magnetischen Registrierungen - deren Resultat ein Plan der Kurven gleicher magnetischer Anomalien ist - weitgehend analog den Arbeiten, die der Vermessungsfachmann bei der Herstellung von Schichtenplänen durchzuführen hat.

b) Bei erdmagnetischen Vermessungen, z. B. mit Schmidt'schen Feldwaagen, sind unter anderem sämtliche Beobachtungsstandpunkte geodätisch einzumessen. Für Zwecke der Lagerstättenforschung bedarf es meist vieler solcher Standpunkte; insbesondere wenn man immer zwei, zirka 50 m voneinander entfernte Magnetometer gleichzeitig abliest und nur die Differenz der Lesungen verwendet, um die täglichen Schwankungen der erdmagnetischen Feldstärke zu eliminieren.

c) Elektrische Messungen werden meist in Profilen vorgenommen. An den Endpunkten einer 200-300 m langen Strecke leitet man Strom - meist Wechselstrom - in die Erde und tastet dieses Profil mit einer Gabel, deren Zinken zwei bis drei Meter Abstand haben, ab und misst jedesmal den Erdwiderstand. Diese Methode ist besonders erfolgreich bei der Aufsuchung von Graphit und Sulfiden. Graphit hat z. B. 0,6 - 1 Ohm Widerstand, das umgebende Gestein oft $10^3 - 10^8$ Ohm. An geodätischen Arbeiten fällt die Einmessung sämtlicher Profile an.

d) Dieselbengeodätischen Arbeiten erfordern die bereits im Vortrag von Herrn Prof. ACKERL behandelten seismischen Messungen, die auch meist in Profilen vorgenommen werden.

Von allen geophysikalischen Methoden verlangen die Schweremessungen das Maximum an Vermessungsarbeit. Wie schon eingangs bemerkt, haben sich die in der praktischen Geophysik angewandten Schweremessmethoden seit Anfang unseres Jahrhunderts aus dem Studium der Figur der Erde entwickelt. Man verwendete zuerst das Pendel, dann die Drehwaage und schliesslich das Gravimeter. Aufwölbungen von dichteren, festeren Gesteinsschichten unter leichteren, z. B. Schotter-schichten bilden oft natürliche Ölfallen und bewirken, dass über ihnen im Gelände ein relativer Maximalbetrag der Schwere gemessen wird, wo der Kamm der schwereren Gesteinsfalte dem Gelände am nächsten liegt. Das Öl selbst, das oft in einer Tiefe von 1000 - 2000 m liegt, macht sich nicht bemerkbar; zumindest verfügen wir derzeit über keine Methode, die es verlässlich anzeigen würde. Wir können lediglich geologische Strukturen suchen, die der Geologe als höffig bezeichnet. Solche Lagerungsanomalien bewirken oft nur eine Zunahme der Erdschwere um 0,2 eines Milliontel von g. Die mit dem Pendel gemessenen Schwerewerte haben sich daher bald als zu ungenau erwiesen. Man hat bis zum zweiten Weltkrieg die Drehwaage verwendet und aus den mit ihr gewonnenen, sehr genauen Resultaten, nämlich Horizontal-Gradient der Schwere und Differenz der Hauptkrümmungen der Niveauflächen, viele Ölfelder erschlossen. Da die Messungen mit der Drehwaage recht zeitraubend sind, wurde diese von den nach und nach immer präziser konstruierten Gravimetern verdrängt. Es gibt derzeit ca. 50 verschiedene Ausführungen solcher Gravimeter. Trotz Serienherstellung ist jedoch nach umfangreicheren Untersuchungen, insbesondere französischer und italienischer Kollegen, die über mehrere Gravimeter verfügen, - jedes einzelne Gerät zu erproben und zu testen. Mit dem Gravimeter der II. Lehrkanzel für Geodäsie an der Technischen Hochschule in Graz wurde bisher auf mehr als 2000 Stationen gemessen, wobei sich das Instrument erfreulicherweise als sehr gut erwiesen hat.

Stellen wir uns so ein Gravimeter einfach als Federwaage vor, deren Feder ständig von einem Gewichtchen gezogen wird. An verschiedenen Punkten der Erdoberfläche aufgestellt, wird das Gewichtchen je nach den Untergrundverhältnissen die Feder mehr oder weniger dehnen. Diese minimalen Längenänderungen der Feder sind im Elastizitätsbereich proportional der wirkenden Kraft und können - insbesondere durch Lichthebel überaus stark vergrössert - abgelesen werden. Da jede durch Temperaturänderung bewirkte Längenänderung der Feder als positive oder negative Schwere störung gedeutet würde, sind die meisten Gravimetertypen aus einem mitgeführten Akkumulator elektrisch zu heizen, wobei die Temperatur im Instrument konstant und höher gehalten wird als die voraussichtliche Tagestemperatur. Ein modernes Gravimeter spricht auf eine Schwereänderung von 0,02 Milligal an. Bekanntlich wird die Einheit der Beschleunigung, 1 cm pro sec^2 , - zu Ehren Galilei's - Gal genannt.

Ihr entspricht in ihrer Wirkung auf die Masseneinheit die Kräfteinheit Dyn. Für die praktische Gravimetrie ist dieses Mass viel zu gross und daher werden die Schwereunterschiede in Tausendstel davon, in Milligal angegeben. Zwei Hundertstel eines solchen Milligals beträgt die Angabe des Gravimeters. Eine solch minimale Schwereänderung wird z. B. bewirkt durch eine kugelförmige Einlagerung

in 5 m Tiefe, die um 75 Tonnen	
10 " " 300 "	
50 " " 7,500 "	
100 m " 30.000 Tonnen mehr wiegt als eine Kugel von gleichem Volumen aus dem Gestein der Umgebung. Dabei wurde in	

$$\frac{2}{100.000} \text{ Gal} = f \cdot \Delta \rho \cdot \frac{V}{t^2}$$

für den spezifischen Gewichtsunterschied $\Delta \rho = 1$ gesetzt.

$$f = \text{Gravitationskonstante} = \frac{20}{3} \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ sec}^{-2}$$

V = Volumen der Störmasse

t = Tiefe

Die im Gelände gemessenen Schwerewerte müssen derart reduziert werden, dass sie auf einer kugelförmigen, aus Schalen - wenn auch verschiedener Dichte - bestehenden Erde alle gleich gross wären. Erst dann können aus den noch verbliebenen Schwereunterschieden Rückschlüsse auf die Dichte-Anomalien im Untergrund und damit auf den geologischen Aufbau gezogen werden.

Die einfachste Reduktion berücksichtigt die verschiedene Breitenlage der Beobachtungspunkte. Bekanntlich beträgt die Fliehkraft am Äquator über 3 Gal und am Pol null. Dazu kommt, dass das Gravimeter am Pol dem Erdschwerpunkt näher liegt als am Äquator; beide Ursachen wirken sich in einer Schwerezunahme vom Äquator bis zu den Polen um 5 Gal aus. In unseren Breiten beträgt dieser Schwerezuwachs 0,8 Milligal pro Kilometer Meridianlänge; dieser Breitenreduktion wegen müsste man daher die Süd-Nord-Entfernung eines jeden Beobachtungspunktes von einem gewählten Bezugspunkt nur auf 3-5 m genau einmessen.

So wie auf eine mittlere Breite müssen die gemessenen Schwerewerte auch auf eine Vergleichsebene reduziert werden. Als solche das Meeresniveau zu wählen, würde zu argen Verfälschungen führen, da geologischen Karten meist nur die obersten, zutage tretenden Formationen zu entnehmen sind, deren Dichte wir auch bestimmen können. Unbekannt sind aber fast durchwegs die unterschiedlichen Dichten des tieferen Untergrundes, die wir ja erst erschliessen wollen. Man wählt daher für geophysikalische Aufschlussarbeiten eine Ebene in mittlerer Höhe des gravimetrierten Gebietes als Bezugsebene, und es ist international üblich, nach BOUGUER, um ungefähr 0,2 Milligal pro 1 m Höhenunterschied zu reduzieren. Um diese Reduktion ebenso genau rechnen zu können wie man die Schwere mit dem Gravimeter misst (0,02 Milligal), müssen die Höhen der Beobachtungsstationen auf 5 bis 10 cm eingemessen werden.

Die Anbringung der Bouguer-Reduktion setzt voraus, dass das Gelände im weiteren Umkreis der Schwerestation horizontal eben ist. In hügeligem Gelände muss daher die Auswirkung der über der horizontalen Ebene gelegenen Massen sowie der leeren Talmulden unter ihr

ermittelt werden; es muss, wie bekannt, die topographische Reduktion angebracht werden. Dazu bedarf es mehrerer, verschieden genauer Schichtenpläne des gravimetrierten Gebietes und seiner Umgebung. Eines Planes 1:2000 z.B. für eine Reichweite bis zu einem Kilometer um jeden Stationspunkt; für weitere Gebiete 1:10.000 und bis zu 1:100.000. Das Gelände um die Station denkt man sich in Kreisringsektoren zerlegt von jeweils solchem Flächenausmass, dass das über jedem Kreisringsektor aus dem Gelände geschnittene Prisma bis zur maximal vorkommenden Höhe in seiner Auswirkung auf die Schwere im Beobachtungspunkt ohne fühlbaren Fehler gleich gesetzt werden kann der Auswirkung eines Prismas gleicher Grundfläche, aber mit einer oberen Deckfläche gemittelter Geländehöhe. Diesbezüglich existieren verschiedene Tabellen. Die Kreisring-Graphikons mit ihrer Sektoreneinteilung muss man in dem Masstab der verwendeten Schichtenpläne auf durchsichtige Folien zeichnen. Diese Graphikons werden nun für jeden Schwerpunkt auf den Schichtenplan aufgelegt und in jedem Sektor die mittlere Geländehöhe geschätzt und dafür aus der Tabelle, unter Berücksichtigung der in diesem Sektor vorhandenen Gesteinsdichte, der dazugehörige Einflusswert entnommen. Im österreichischen Gebirgsland sind pro Schwerestation ca. 250 Höhenschätzungen und Tabelleneingänge erforderlich. Die Ermittlung der topographischen Reduktion ist gewiss die umfangreichste und zeitraubendste Arbeit der Gravimetrie. Sie erfordert - nach Aufnahme und Kartierung der möglichst genauen Schichtenpläne - ungefähr die dreifache Arbeitszeit der Schweremessung im Gelände.

Die generelle Planung der gravimetrischen Messung - wie Gebietsumgrenzung, Festsetzung der Dichte der Stationsausteilung - erfolgt zweckmässig in enger Zusammenarbeit mit dem Geologen. Für eine übersichtliche Erfassung des Schwereverlaufes, z.B. für Zwecke der Erdöl-Geologie, werden die Stationen meist nach einem Netz von 500 m bis 1 km Maschenweite ausgewählt, oft aber auch in ca. 800 m auseinanderliegenden Profilen in 50-100 m Abstand angeordnet. Bei der Suche nach Erz-Einlagerungen hingegen, deren erfahrungsgemässe Dimensionen vom Geologen nur auf einige Zehnermeter geschätzt werden, muss die Maschenweite des Punktnetzes oft bis auf 20 m verringert werden.

Die endgültige Wahl jeder Schwerestation erfolgt erst im Gelände unter Berücksichtigung der topographischen Verhältnisse; denn für die Erfassung der erwähnten, topographischen Reduktion von Gelände-Kleinformen in nächster Umgebung des Standpunktes genügen oft die besten Schichtenpläne nicht. Man nimmt daher eine Sammlung von Daten über die Auswirkung von Kleinformen (Erdkörper regelmässiger Gestalt wie Dämme, Kanäle u.s.w.) ins Feld mit und ersieht aus den Daten, in welcher Entfernung der Standpunkt von der vorhandenen Geländeunregelmässigkeit zu wählen ist, damit deren Einfluss praktisch null wird. Muss aber der Standpunkt auf einem Damm gewählt werden, weil dieser z.B. durch einen Sumpf verläuft, so misst man das Dammprofil und entnimmt die Schwerekorrektur unmittelbar der Datensammlung. Dabei können Kleinformen des Geländes, die 4-6 mal so lang sind als ihr grösster Querschnittsdurchmesser, als Prismen unendlicher Länge betrachtet werden. Bei Langbauten, wie Dämmen veränderlichen Querschnitts, ist bei der Mittelbildung der Querschnitte darauf zu achten, dass der Einfluss jedes Querschnittes auf die Vertikal-Anziehungskomponente ungefähr mit der dritten Potenz der Horizontalentfernung sinkt.

Hat man Luftbilder zur Verfügung, so wird der endgültig gewählte Standpunkt in diese eingetragen, so dass er bei photogrammetrischer Herstellung der Schichtenpläne der La-

ge nach genau genug kartiert werden kann. Seine Höhe muss allerdings auf ± 5 cm ermittelt werden; je nach Geländeverhältnissen durch Nivellement, Zenitdistanzmessung über Entfernungen, die dem Plan entnommen werden, oder aerophotogrammetrisch.

Die Aufstellung des Gravimeters muss so stabil wie möglich erfolgen, da das empfindliche Gerät bei gelöster Klemmvorrichtung, nach Erschütterungen lange Zeit zu seiner Beruhigung braucht. Man wird daher auf weichem Boden das Stativ auf eingeschlagene Pflöcke stellen. Abgelesen wird die Schwere meist 3 mal an der Gravimetertrommel auf 0,02 Milligal, die Innentemperatur zur Vergewisserung, dass die Heizung einwandfrei funktioniert, und die Zeit auf einer nach Ortszeit gehenden Uhr. Mittels der Ortszeit entnimmt man einer Tabelle sofort die Auswirkung der wechselnden Anziehung von Sonne und Mond, die innerhalb eines Tages bis um die zehnfache Angabe des Gravimeters schwankt. Weiters wird die Zeitnotierung zur Berücksichtigung der Eigendrift des Gerätes benötigt. Darunter versteht man die Änderung der Gravimeterlesung mit der Zeit. Jedes Gravimeter hat eine solche Drift und das Gerät ist um so besser, je länger der Zeitraum, über den die Drift konstant bleibt. Erfahrungsgemäss ist sie besonders gross und veränderlich, wenn das Instrument längere Zeit nicht verwendet wurde. Daher kontrolliert und verbessert man die Drift morgens, vor Arbeitsbeginn ca. 1 Stunde lang durch Probemessungen. Dann erst beginnt man mit den geplanten Messungen und kehrt zur Ermittlung der Drift anfangs bereits nach ca 3/4 Stunden zu einer absolvierten Station zurück, später nach 1,5 bis 2 Stunden und nachmittags oft erst nach 4 Stunden. Entweder wählt man für jede Tagesarbeit einen verkehrstechnisch leicht erreichbaren Zentralpunkt, zu dem man immer wieder zurückkehrt, und verbindet diese Tages-Zentralpunkte zum Schluss durch eine eigene Schweremessungsschleife, oder man legt vor Beginn der Detailschweremessungen ein sogenanntes Basisnetz von Zentralpunkten über das aufzunehmende Gebiet und bestimmt deren Schwereunterschiede. Diese Methode hat den Vorteil, dass man während der täglichen Arbeit nicht immer zum selben Zentralpunkt zurückkehren muss, sondern fallweise an einen anderen, in dessen Nähe man sich gerade befindet, anbinden kann. Die Verbindungsmessung der Zentralpunkte wird jedenfalls in einem der Pilgerschritt-Verfahren vorgenommen, d. h., es wird die Schwere und die Zeit der Reihe nach abgelesen, z. B. auf den Stationen / a b a b / c b c / d c d / e d e / / y x y / z y z / a z a /. Bei Benützung eines geländegängigen Wagens können mit einem modernen Gravimeter in einem weitmaschigen Netz täglich 20-30 Neupunkte absolviert werden; das sind mit den wiederholten Lesungen am Zentralpunkt 30 - 40 Messungen.

Für die angeführte topographische und für die Bouguer-Reduktion benötigt man, wie schon erwähnt, die Dichte der Gesteinsschichten innerhalb des Höhenbereichs des Aufnahmegebietes. In Zusammenarbeit mit Geologen entnimmt man guten, geologischen Karten, so weit diese vorhanden sind, die Bereiche gleicher Dichte, und ermittelt das spezifische Gewicht der entnommenen Proben, am schnellsten durch Wägen in Luft und in Wasser.

$$\text{Die Dichte } \rho = \frac{G_L}{G_L - G_W} .$$

G_L = Gewicht in Luft, G_W = Gewicht in Wasser.

Für Gelände mit grösseren Höhenunterschieden kann man oft mittlere Werte der Gesteinsdichte aus Schweremessungen errechnen, die man in Strassen - oder Eisenbahntunnel vor-

nimmt, sowie in Geländepunkten, die genau über den Tunnelpunkten liegen. Oder man misst die Schwere in einem Geländeteil mit wechselnden Höhen und reduziert einmal mit einer zu grossen und einmal mit einer zu kleinen Dichte auf eine Vergleichsebene. Diese beiden Flächen reduzierter Schwere werden gegensinnige Abhängigkeit von der Geländeform aufweisen. Durch Interpolation ermittelt man die mittlere Gesteinsdichte, deren Verwendung die Fläche der reduzierten Schwerewerte von der Geländeform unabhängig macht.

Nachdem bereits im Felde die Auswirkung nahe gelegener Geländeunregelmässigkeiten sowie Sonnen- und Instrumentendrift berücksichtigt, nachher die topographische und die Bouguer- und Breitenreduktion vorgenommen wurden, notiert man die vollständig reduzierten Schwerewerte zu ihren entsprechenden Beobachtungspunkten im Schichtenplan. Sind die Werte alle gleich gross, so weist der Untergrund wahrscheinlich nur horizontal liegende Gesteinsschichten verschiedener Dichte auf, die ein homogenes Kraftfeld erzeugen. Sind sie verschieden, so wird aus ihnen ein Plan von Kurven gleicher Schwerewerte - genau wie ein Schichtenplan konstruiert. Diese Kurven zeigen fast immer einen generellen, in einer Richtung dachförmigen Schwereabfall durch das gesamte Aufnahmegebiet, der meist von tiefliegenden, grossräumig geologischen Formationen verursacht wird. Es werden nun die nacheinander geeigneten gewählten Ebene errechneten Schwerewerte abgezogen, so dass sich die lokalen Anomalien bereits besser zeigen. Oft wird zu diesem Zweck der ebene Schwereverlauf, die grossräumige Drift, so errechnet, dass die Quadratsumme der Restschweren ein Minimum wird. Damit erhält man einen zweiten Plan von Kurven gleicher Schwere, in dem sich bereits ausgesprochene Inseln oder Rücken grösserer Schwere oder Täler geringerer Schwere abzeichnen. Diesem Plan kann man auch die Horizontalgradienten der Schwere entnehmen, die vollständig den Falllinien eines Geländeschichtenplanes entsprechen und z. B. zu Zentren von Anomalien zeigen.

Sucht man nur seicht liegende Massenstörungen, so werden die zweiten Differentialquotienten der Schwere nach der Tiefe ermittelt. Denn in der Formel für die Newton'sche Anziehungskraft steht im Nenner das Quadrat der Tiefe der Massenstörung. Differenziert man diesen Ausdruck zweimal nach der Tiefe, so erscheint im Nenner die Tiefe zur 4. Potenz. In diesen Differentialquotienten werden sich daher näherliegende, also seichte Massen deutlich zu erkennen geben, tiefliegende Massen aber sehr schwach. Nach T. A. ELKINS erhält man den Betrag von $\frac{\partial^2 g_z}{\partial z^2}$ als Tangens des Neigungswinkels der Tangente an eine Kurve im Punkt $x = 0$; die Kurve ergibt sich, wenn man auf der x-Achse die Grössen r^2 und als Ordinate den Mittelwert der Schwere längs eines Kreises mit Radius r um die Schwerestation aufträgt.

Aus diesen so konstruierten, verschiedenen Schwereplänen können mit Sicherheit Regionen von unterirdischem Massenüberschuss und Massendefekt erkannt werden. Die Ursache der Schwereanomalien können natürlich unendlich viele, verschiedene Massenarrangements sein. Eine sinnvolle Interpretation der Schwerepläne ist daher nur in enger Zusammenarbeit mit Geologen möglich. Der Geologe skizziert, der Situation und Grösse der Anomalien entsprechend, geologisch mögliche Schichtenanordnungen. Zu diesen geologischen Annahmen errechnet der Ingenieur die Schwereauswirkungen und vergleicht sie mit seinen Schwereplänen. Stimmen Rechnung und Plan überein, so gewinnt die Mutung des Geologen an Wahrscheinlichkeit. Für die Berechnung der Schwereanomalien verschieden geformter Einlagerungen werden diese oft durch regelmässige Körper angenähert, für welche die Formel bereits vorliegt. Vermu-

tete Erzgänge werden als mit Masse belegte Kurven, starke Kohlenflöze z. B., als mit Masse belegte Flächen betrachtet. Für die Bestimmung der Schwerestörung, die durch praktisch unendlich lange Formationen von grossem, unregelmässigem Querschnitt verursacht sind, stehen Graphikons zur Verfügung, ähnlich denen zur Ermittlung der topographischen Reduktion. Sie werden auf einmassstäbliche Skizze des Querschnittes gelegt. Jedem Kreisring- oder Vierecksektor, der in diesen Querschnitt fällt, kann unter Berücksichtigung des Dichtekontrastes unmittelbar die entsprechende Anziehungskomponente entnommen werden. Wurden in Zusammenarbeit mit dem Geologen bereits auf Grund von weitmaschig angelegten Schwere-messungen Bezirke gefunden, die wahrscheinlich höffig sind, so müssen in diesen die Schwere-messungen nachträglich verdichtet werden.

Sehr oft - insbesondere bei der Suche nach erdölhöffigen Schichten - wird die billigere, gravimetrische, als ausschliessende Methode angewandt. Es werden dabei jene Bezirke eines weiten Gebietes ermittelt, die nicht höffig sind. Ueber den Restinseln werden dann die zehnmal so teuren, seismischen Messungen vorgenommen, deren Ergebnis in Verbindung mit den gravimetrischen Resultaten die Wahl der Bohrstellen bestimmt. Nach einer amerikanischen Statistik wurden in den letzten drei Jahren auf der ganzen Welt 125 Millionen Dollar für geophysikalische Aufschlussarbeiten investiert, wovon ein Siebentel auf Schwere-messungen entfällt.

Ein Grossteil all dieser Arbeiten ist rein geodätischer Natur. Ein weiterer, beträchtlicher Teil ist vermessungstechnischen Arbeiten weitgehend analog.

Die Geoidundulation auf dem Gebiete der ČSR

Von E. Buchar

1. Einleitung.

Mein Referat wird sich mit den vorläufigen Ergebnissen über das Geoid auf dem Gebiet der Tschechoslovakischen Republik befassen, welches mittels Methode des annähernden astronomischen Nivellements bestimmt wurde. Dabei habe ich Ergebnisse astronomischer Beobachtungen verwendet, die fast auf 100 Punkten des Katastertriangulierungsnetzes durchgeführt wurden. Nach einer kurzen Analyse der astronomischen Ergebnisse werde ich die verbesserte Lage des trigonometrischen Netzes auf dem Besselschen Ellipsoid und das System der Lotabweichungen erwähnen. Das astronomische Nivellement wurde in Meridian- und Parallelenprofilen unter Benützung der durchschnittlichen Lotabweichungen, die auf das Ellipsoid von Krassowskij bezogen wurden, durchgeführt. Nach der Ausgleichung der Knotenpunkthöhen habe ich eine Karte des mittleren Geoids erhalten, welche mit der schon früher, auf Grund eines ausführlicheren Verlaufes der Lotabweichungen bestimmten Geoidfläche verglichen wird.

2. Astronomische Ergebnisse.

Die astronomischen Beobachtungen auf unserem Gebiet kann man in zwei Gruppen teilen. Die erste Gruppe enthält die Arbeiten des ehemaligen Militärgeographischen Institutes in Wien und der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung. Die zweite Gruppe umfasst Ergebnisse aus dem Zeitabschnitt vom ersten Weltkrieg bis heute und wurde grösstenteils von unseren Vermessungsstellen beobachtet.

Die geographischen Breiten wurden je nach den Umständen mittels verschiedener Methoden bestimmt: aus den Zenitdistanzen der Sterne, aus den Sterndurchgängen im ersten Vertikal, mittels der Methode der gleichen Höhen und der Horrebow-Talcottischen Methode. Auf manchen Punkten war es möglich, die Ergebnisse einzelner Methoden zu vergleichen und so ihre gute, gegenseitige Uebereinstimmung festzustellen. So z.B. überstieg der mittels Struvmethode und der Horrebow-Talcottischen Methode bestimmte Breiteunterschied nicht den Wert von $0,3''$. Auch der Unterschied zwischen den mit dem Zirkumzenital erreichten Ergebnissen und den mittels der letzterwähnten Methode erreichten Ergebnissen war ständig gering. Der mittlere Fehler in der geographischen Breite beträgt durchschnittlich $\pm 0,1''$ und ist in der letzten Zeit noch kleiner.

Die geographischen Längen wurden auf vielen Stationen mittels Methode der gleichen Höhen gleichzeitig mit der geographischen Breite unter Benützung des bekannten Nußl-Friß-Zirkumzenitals beobachtet. Nach dem zweiten Weltkrieg wurde auch die übliche Methode der Sterndurchgänge im Meridian angewandt und mit einem Passageninstrument mit unpersönlichem Mikrometer beobachtet. Um die persönliche Gleichung beim Zirkumzenital auszuschalten, habe ich seinerzeit ein einfaches Gerät konstruiert, mit welchem die persönliche Gleichung in jeder Beobachtungsnacht festgestellt wurde. Das Gerät ist durch mehrere Jahre verwendet worden und die Ergebnisse zeigten, dass die persönliche Gleichung mittels desselben fast ausgeschaltet worden ist. Die auf 7 Punkten unabhängig mit dem Passageninstrument bestimmten geographischen Längen unterscheiden sich durchschnittlich um $0,006 \pm 0,008$. /1/ In der letzten Zeit habe ich für das Zirkumzenital ein unpersönliches Registriermikrometer vorgeschlagen, dessen Grundgedanken darin besteht, dass die Höhenbewegung des Sternes auf kurze Zeit durch Rotation eines Prismas beseitigt wird. /2/ Auch diese Apparatur gibt gute Ergebnisse. /Bild 1/ Es ist interessant, dass trotz des ungünstigen Einflusses des Transports die Durchgangshöhe des Zirkumzenitals auch im Laufe mehrerer Jahre konstant (in Grenzen von $\pm 2''$) bleibt. /1/ Ich nehme an, dass die Methode der gleichen Höhen im allgemeinen manche wichtige Vorteile zeigt und dass sie auch bei anderen astronomischen Arbeiten mehr Anwendung finden sollte, z. B. bei der Bestimmung der Rektaszensionen und Deklinationen der Sterne. Der mittlere Fehler in der geographischen Länge beträgt rund $\pm 0,2$.

Die Azimute wurden nach der üblichen Polarsternmethode bestimmt /3/. Der mittlere Fehler der Ergebnisse beträgt durchschnittlich $\pm 0,3$ und hat sich in letzter Zeit auf die Hälfte dieses Wertes erniedrigt. Auf 4 Punkten wurde auch ein Versuch unternommen, das Azimut aus Sterndurchgängen im Vertikal des Signales (bzw. der Azimutrichtung) zu bestimmen. Der mittlere Fehler eines aus 20 Sternen bestimmten Azimutes betrug in diesem Falle $\pm 0,4$. Die Ergebnisse dieser Methode unterscheiden sich in unserem Falle von den aus dem Polarstern bestimmten Werten systematisch um $\pm 1,1 - 0,3$. Diese Methode könnte vielleicht nach einer notwendigen Durcharbeitung als Kontrolle der Beobachtungen mit dem Theodolit dienen.

Auf manchen Stationen war es möglich, Azimute zu vergleichen, die im Zeitabstand von mehreren Jahrzehnten beobachtet wurden. Es wurde ein durchschnittlicher Unterschied von $0,7$ festgestellt, den man allerdings teilweise durch nicht ganz vollkommen identische Zentren erklären kann. Die Genauigkeit der Azimutbeobachtungen kann man auch gut aus den Unterschieden zwischen Azimut und Gegenazimut auf Grund der bekannten abgeänderten Laplaceschen Gleichung beurteilen,

$$A_2 - A_1 = 180^\circ + (\lambda_2 - \lambda_1) \sin \varphi,$$

wo λ_1, λ_2 die geographischen Längen von zwei Nachbarpunkten und A_1, A_2 astronomische Azimute ihrer Verbindungslinie bedeuten; der angenäherte Wert der mittleren geographischen Breite ist φ . In unserem Netz befindet sich eine grössere Anzahl solcher Paare. Der durchschnittliche äussere Fehler des Azimutes m_a , der eine Vorstellung über die reale Genauigkeit der Azimute bietet, beträgt in unserem Falle

$$m_a = \pm \frac{1}{2} |A_2 - A_1| = \pm 0,4.$$

Auch bei mehreren dreifachen Laplaceschen Punkten, wo alle Azimute beobachtet wurden, halten sich die Dreieckswidersprüche unter dem Betrage von 1".

3. Lotabweichungssystem.

Als geodätische Grundlage habe ich unser Katastertriangulierungsnetz gewählt, welches, unter teilweiser Benützung der Ergebnisse älterer Triangulierungsarbeiten des ehemaligen Militärgeographischen Institutes in Wien, seinerzeit von Ing. J. Krovák ausgebaut wurde. Der Bezugspunkt dieses Netzes ist indirekterweise der österreichische trigonometrische Punkt Hermannskogel. Es ist bekannt, dass dieses Netz auf dem Besselschen Referenzellipsoid verschoben und gedreht ist. Deshalb habe ich seine Lage und Orientierung auf Grund der Bedingung verbessert, dass die Summe der Quadrate der Lotabweichungen und der Quadrate der Widersprüche der Laplaceschen Gleichungen minimal wird und dazu habe ich die bekannten Formeln von Dr. Ledersteger benutzt. Aus den Beobachtungsergebnissen von 92 astronomischen Stationen, von denen 52 Laplace-Punkte sind, habe ich vor einiger Zeit die notwendige Verschiebung und Drehung des Netzes in seinem neuen Bezugspunkt Brdo /4/ wie folgt bestimmt:

$$\begin{aligned}d \varphi_0 &= - 0''52 \\d \lambda_0 &= - 13''72 \quad / \text{gegen Westen} / \\d A_0 &= - 9''58.\end{aligned}$$

Die übrigbleibenden Lotabweichungen im erwähnten Bezugspunkte betragen dann

$$\begin{aligned}\xi &= - 2''81 \\ \eta &= + 0''74.\end{aligned}$$

Auf Grund ganz anderer Beobachtungsergebnisse haben andere Autoren, z. B. Dr. K. Ledersteger, für den Bezugspunkt Hermannskogel ähnliche Ergebnisse erreicht. /5/ Aus der festgestellten Verschiebung $d \lambda_0$ ergibt sich dann für den Längenunterschied zwischen Ferro und Greenwich der Wert $17^{\circ}39'59''74$, der sehr gut mit dem Ergebnis Lederstegers übereinstimmt. /6/

Es ist interessant, unser Lotabweichungssystem mit dem Lederstegers zu vergleichen, das er auf Grund eines reichen Materials aus grossen Teilen Europas abgeleitet hat. /7/ Für die durchschnittlichen Unterschiede seiner Lotabweichungen und der unseren ergeben sich die Werte

$$\begin{aligned}\Delta \xi &= + 0''8 \\ \Delta \eta &= - 0''4,\end{aligned}$$

was eine sehr gute Uebereinstimmung bedeutet.

Auf Grund der Lotabweichungen in unserem System, welches auf das Besselsche Ellipsoid bezogen ist, habe ich vor einiger Zeit Karten des Verlaufes von ξ und η zusammengestellt, die dann auch zur Bestimmung des Geoides dienen. /4/ Seit dieser Zeit wurden aber astronomische Beobachtungen auf weiteren Punkten durchgeführt und es war deshalb wünschenswert, die bisherigen Ergebnisse zu ergänzen und die Lotabweichungen auf ein neueres Ellipsoid übertragen.

Unter Voraussetzung, dass das neue und frühere Ellipsoid sich im Bezugspunkte mit den Koordinaten φ_0, λ_0 berühren und dass die Länge der geodätischen Linie ungeändert bleibt,

werden die Veränderungen der Lotabweichungen folgende sein

$$d\xi = \left(\frac{dN_0}{N_0} - \frac{d\eta_0^2}{V_0^2} \right) \Delta\varphi - \frac{3}{2Q} \operatorname{tg} \varphi_0 \left[\eta_0^2 \frac{dN_0}{N_0} - (1 - 3\eta_0^2) d\eta_0^2 \right] \Delta\varphi^2 - \frac{V_0^2 \sin 2\varphi_0}{4Q} \frac{dN_0}{N_0} \Delta\lambda^2 + \dots$$

$$d\eta = \frac{dN_0}{N_0} \cos \varphi \Delta\lambda + \frac{\operatorname{tg} \varphi_0 \cos \varphi}{Q V_0^2} \frac{dN_0}{N_0} \Delta\varphi \Delta\lambda + \dots$$

In diesen bekannten Ausdrücken bedeutet N_0 den Querkrümmungsradius der ellipsoidischen Fläche im Bezugspunkte

$$N_0 = a (1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)^{-\frac{1}{2}}$$

wo a und e die grosse Halbachse und die Exzentrizität der Meridianellipse sind. Die übrigen Werte sind durch die Formeln

$$\eta_0 = e' \cos \varphi_0, \quad V_0^2 = 1 + \eta_0^2$$

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0, \quad \Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$$

gegeben, wobei e' die sogenannte zweite Exzentrizität ist.

Wenn wir für die neue Bezugsfläche das Krassowskij - Ellipsoid annehmen, dessen grosse Halbachse und Abplattung

$$a = 6,378.245 \text{ m}, \quad \mu = 1 : 298,3$$

sind, werden dann die Veränderungen der Lotabweichungen durch angenäherte numerische Ausdrücke

$$d\xi = +1,303 \cdot 10^{-4} \Delta\varphi - 1,66 \cdot 10^{-10} \Delta\lambda^2 + 0,68 \cdot 10^{-10} \Delta\varphi^2$$

$$d\eta = +1,386 \cdot 10^{-4} \Delta\lambda \cos \varphi + 8,02 \cdot 10^{-10} \Delta\varphi \Delta\lambda \cos \varphi$$

angegeben, wobei $\Delta\varphi$ und $\Delta\lambda$ in Bogensekunden ausgedrückt sind.

In unserem Falle wollen wir den Verlauf der mittleren Lotabweichungen bestimmen, welche sich auf die Mittelpunkte der Trapeze im Ausmass $40' = 74 \text{ km}$ in der geographischen Breite und $1^0 = 72 \text{ km}$ in der geographischen Länge beziehen. Die Koordinaten dieser Trapez-Mittelpunkte sind

$$\varphi = 47^0 50' + i \ 40'$$

$$\lambda = 13^0 15' + j \ 60',$$

wo i, j entweder gleich Null oder ganze Zahlen sind, die den Lagen auf dem untersuchten Gebiet entsprechen. Die mittleren Werte der Lotabweichungen wurden insgesamt für 21 Mittelpunkte bestimmt, wobei in 4 Fällen teilweise Interpolation benützt wurde. In jedem Viereck befinden sich durchschnittlich 4 astronomische Punkte. Es ist interessant, dass der Wertebereich der Meridian-Lotabweichungen durch Uebertragung auf das Krassowskij-Ellipsoid sich vergrössert hat. Im nördlichen Teil überwiegen positive und im südlichen Teil negative Werte, was bezeugt, dass das Geoid im Meridian durchschnittlich mehr gekrümmt ist als das Ellipsoid. Die Lotabweichungen in der Länge haben sich infolge Änderung des Ellipsoides im Gegenteil bedeutend vermindert und ihr Wertebereich verkleinert.

Die Verteilung der mittleren Lotabweichungen in Breite und Länge ist auf Bild 2 und 3 veranschaulicht. Der glatte Verlauf der Linien zeigt, dass die in dieser Weise erreichten

Lotabweichungen gewissermassen idealisiert sind.

4. Bestimmung des Geoids.

Die Geoidfläche wurde mittels der bekannten Methode des astronomischen Nivellements in 7 Meridian- und 4 Parallelprofilen bestimmt, die durch Knotenpunkte laufen, für die die mittleren Werte der Lotabweichungen festgestellt wurden. Die Höhenunterschiede zweier benachbarter Knotenpunkte im Meridian-beziehungsweise Parallelschnitt (in Metern ausgedrückt) sind dann

$$\begin{aligned}\Delta N_{\varphi} &= -0,0599 \sum_1^6 \xi \\ \Delta N_{\lambda} &= -[0,0581 - 0,0008 (i-2)] \sum_1^6 \eta\end{aligned}$$

wobei wir voraussetzen, dass für die Lotabweichung im Intervall zwischen beiden Punkten 6 Werte interpoliert wurden. Die Höhenunterschiede betrachtet man hier als positiv bei zunehmender Breite und Länge. Durch diese numerische Integration wurden insgesamt 29 Höhenunterschiede berechnet, von denen 27 Höhenunterschiede 9 geschlossene Vierecke bilden. Bei der Ausgleichung der Höhenunterschiede gibt das r-te Viereck für die entsprechende Korrelate k_r eine Bestimmungsgleichung

$$4 k_r - \sum k + u_r = 0,$$

wo u_r den Widerspruch in dem betreffenden Viereck und $\sum k$ die Summe der Korrelaten der anschliessenden Vierecke bedeuten. Dabei wird vorausgesetzt, dass alle Höhenunterschiede gleiches Gewicht haben. Die Verbesserung eines Höhenunterschiedes entlang irgendeiner Viereckseite ist dann

$$v_r = \frac{1}{4} k_r - k,$$

wo k die Korrelate des anschliessenden Vierecks ist.

Nach Durchführung aller Berechnungen erhalten wir zuletzt die ausgeglichenen Höhen der Knotenpunkte in Zentimetern, wie sie in folgender Tabelle angeführt sind.

Die relativen Höhen der Knotenpunkte:

i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7
4		-22	-19					
3	+92	+72	+64	+79	+50	+70		
2	+78	+96	+107	+57	0	+94	+163	
1				-44	-45	+59	+132	+150
0						+45		

Die Höhen sind auf das Ellipsoid von Krassowskij bezogen, das durch den Knotenpunkt $i = 2, j = 4$ durchläuft. Dieser Knotenpunkt befindet sich in der Nähe des Bezugspunktes Brdo. Der mittlere Fehler eines nicht ausgeglichenen Höhenunterschiedes, der einer Entfernung von 73 km entspricht, ist dann

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v v]}{9}} = \pm \sqrt{\frac{-[u k]}{9}} = \pm 35 \text{ cm}$$

Die Geoidfläche wurde so bestimmt, dass in einzelnen Profilen glatte Kurven durch die Knotenpunkte gezogen wurden, die dann zur Zusammenstellung einer Schichtlinienkarte dienten. /siehe Bild 4/ Es ist selbstverständlich, dass die Gestaltung der Geoidfläche in die-

sem Falle gewissermassen idealisiert ist, infolge einer gewissen Willkürlichkeit im Verlaufe der mittleren Lotabweichungen und der Berechnung der Profile.

Es wird interessant sein, das mittlere Geoid mit einer Geoidfläche, die ich vor mehreren Jahren auf Grund fast gleichen Materials erhalten habe, zu vergleichen. /4/ Der Verlauf der Lotabweichungen wurde hier jedoch nicht generalisiert und das Netz der Meridian- und Parallelprofile war zweimal dichter. Bei der Ausgleichung war es notwendig, 50 Normalgleichungen aufzulösen, und der mittlere Fehler eines nicht ausgeglichenen Höhenunterschiedes für die Entfernung von 36 km betrug ± 31 cm. Die Geoidfläche wurde auf das Besselsche Ellipsoid bezogen. Bei kleinem Ausmass des untersuchten Gebietes kann man den Uebergang zum Krassowskij-Ellipsoid durch eine angenäherte Formel berechnen:

$$dN = - \frac{g^2 \alpha^2}{2} dN_0,$$

wobei α die Winkelentfernung von dem Bezugspunkte (in Bogensekunden ausgedrückt) bedeutet. Die so erhaltene Geoidfläche, die auf das durch den Bezugspunkt Brdo gelegte Ellipsoid bezogen ist, sieht man auf Bild 5. Es ist sichtbar, dass der allgemeine Charakter dieses Geoids derselbe ist wie bei dem mittleren Geoid. Das Geoid ist im südwestlichen Teil des böhmisch-mährischen Hügellandes bis zur Höhe von 1 m ausgewölbt, sinkt über ganz Böhmen gegen Norden in die Tiefe bis 1 m und bildet eine etwa 0,5 m tiefe Mulde in Südmähren und in der südwestlichen Slowakei. In der Slowakei steigt es ziemlich steil gegen Osten bis zu einer Höhe über 2,6 m. Das mittlere Geoid ist nicht so gegliedert, die Höhenunterschiede sind systematisch gedämpft und diese Erscheinung kann man als Folge der Mittelung von Lotabweichungen und als Folge der Kurvenglättung erklären.

Ing. M. Cimbálník /8/ und Ing. M. Pick /9/, welche ihre Studien an meine früher erwähnte Arbeit anknüpften, haben ein ähnliches Geoid erhalten.

Das Geoid, welches für Mitteleuropa auf Grund eines verhältnismässig dünnen Netzes der astronomischen Punkte von Wolf und Berroth /10/ abgeleitet wurde, hat dagegen eine bedeutend abweichende Gestalt.

5. Schlussfolgerungen.

Zum Schluss sei es mir noch erlaubt, die hauptsächlichsten Schlussfolgerungen dieser Studie zusammenzufassen. Die astronomischen Angaben entsprechen, hinsichtlich ihrer Genauigkeit, gut dem gegebenen Zweck. Es wird aber notwendig sein, dieselben, hauptsächlich im östlichen Teile des Staatsgebietes, noch zu ergänzen. Das Lotabweichungssystem, das den astronomischen Beobachtungen am besten entspricht, ist in guter Uebereinstimmung mit dem europäischen System Dr. Lederstegers. Die Undulation des mittleren Geoids, das auf Grund der mittleren Werte der Lotabweichungen bestimmt wurde, ist systematisch gedämpft im Vergleich mit der Undulation eines Geoids, das unter Benützung von nichtgemittelten Werten abgeleitet wurde. Der mittlere Fehler des astronomischen Nivellements, der einer 100 km langen Strecke entspricht, ist im ersten Falle ± 41 cm und im zweiten Falle ± 51 cm. Es scheint also, dass der Einfluss von verschiedenen Fehlern beim ersten System vermindert wurde. Freilich ist es zu erwarten, dass das astronomische Nivellement in einem dichteren Profilnetz zu einem realeren Bild des Geoids führen würde. Die Benützung einer gravimetrischen Interpolation wäre dabei wünschenswert.

L i t e r a t u r

- /1/ E. Buchar: Mesures de l'équation personnelle dans la méthode des hauteurs égales (Bulletin géodésique 1939)
- /2/ E. Buchar: Novyj bezlišnyj mikrometer dl ja cirkumzenitala (Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia, 1954)
- /3/ E. Buchar: Měření azimutu na území Československa v letech 1924 až 1938 (Massarykova akademie práce, Praha 1941)
- /4/ E. Buchar: Tížnicové odchylky a geoid v ČSR (Praha, 1951)
- /5/ K. Ledersteger: Das Lotabweichungssystem der österreichisch-ungarischen Militärtriangulierung (Berlin 1943)
- /6/ K. Ledersteger: Die absolute Lage des österreichischen Fundamentalnetzes und der Längenunterschied Ferro - Greenwich, Festschrift Doležal, Sonderheft 14 der Öst. ZfV., Wien 1952
- /7/ K. Ledersteger: Der schrittweise Aufbau des europäischen Lotabweichungssystems und sein bestanschliessendes Ellipsoid (Wien 1948)
- /8/ Ing. M. Cimbálník: Příspěvek ke studiu geoidu na území ČSR (Zeměměřičtvi 1953)
- /9/ Ing. M. Pick: Vorläufige Karte des Geoids auf dem Gebiet der tschechoslovakischen Republik (Geofysikální sborník, 1954)
- /10/ Wolf: Beiträge zur Lotabweichungsausgleichung und Geoidbestimmung (Bamberg, 1949)

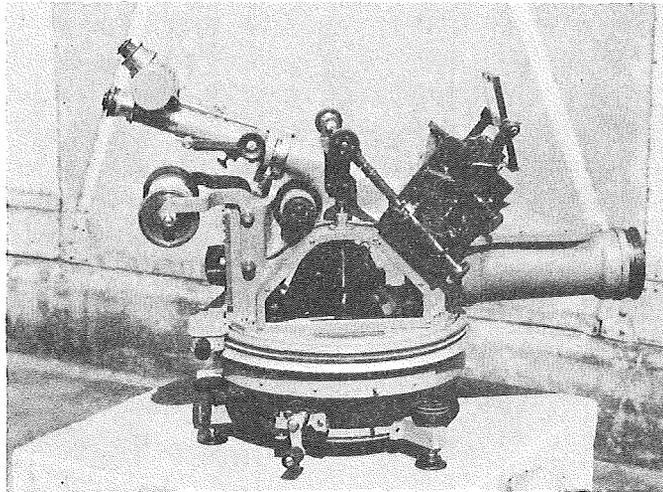


Bild 1

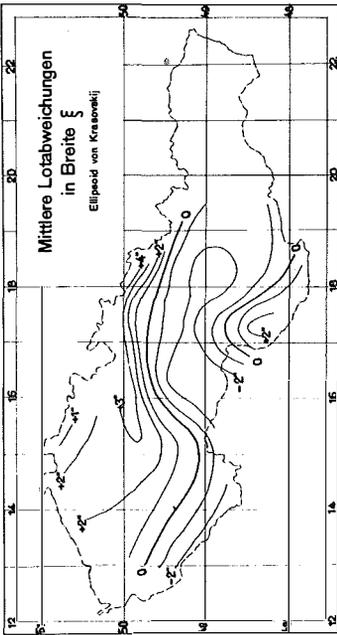


Bild 2

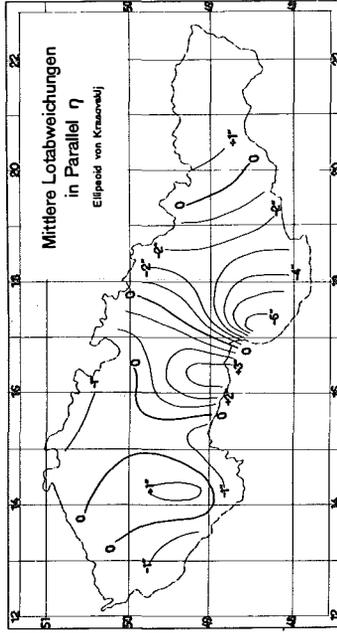


Bild 3

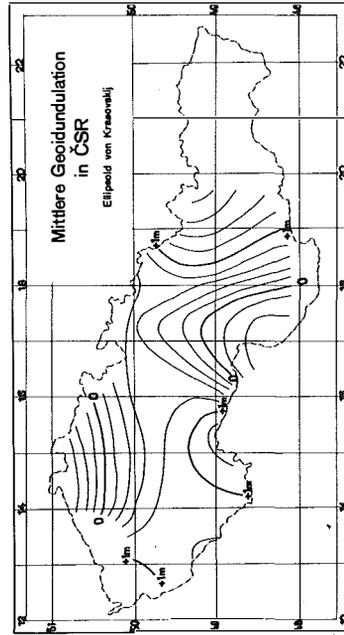


Bild 4

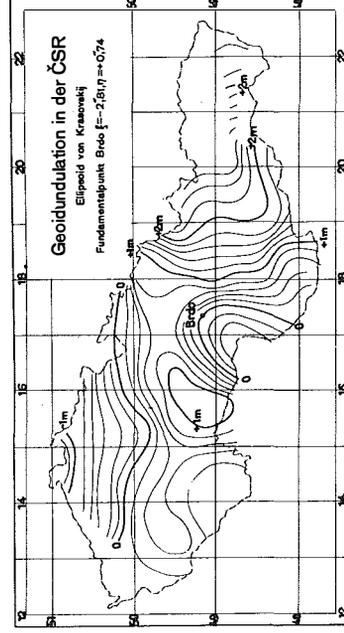


Bild 5

Die theoretischen Grundlagen der Großraumtriangulation

Von K. Ledersteger *

Wenn ich heute über die theoretischen Grundlagen der Grossraumtriangulation sprechen will, so ist dies ein Wagnis, und zwar ein Wagnis in zweierlei Hinsicht. Fürs erste nämlich wird sich aus meinen Ausführungen herausstellen, dass diese theoretischen Grundlagen genau genommen einen Querschnitt durch die gesamte astronomische und physikalische Geodäsie erfordern. Zum anderen aber ist es schwierig, eine derart umfassende Materie kurz, prägnant und mit der nötigen Klarheit darzustellen, besonders dann, wenn man fast vollständig auf den mathematischen Formelapparat verzichten will. Vielfach wird behauptet, man müsste auch sprachlich klar ausdrücken können, was man mathematisch entwickeln kann. So einfach ist die Sache aber nicht; denn hätten wir nicht die Mathematik, so würde die Naturwissenschaft wohl in den Kinderschuhen stecken geblieben sein. Die symbolische Logik der Mathematik ist ja viel umfassender als die Logik einer naturgewachsenen Sprache.

Bei der rechnerischen Verarbeitung jeglicher Triangulierung handelt es sich im Grunde um eine Abbildung der Punktconfiguration der Erdoberfläche auf eine bestimmte Bezugsfläche. Wir haben also die beiden Fragen zu untersuchen, wie wir überhaupt eine exakte und eindeutige Abbildung gewinnen können und welche Bezugsfläche nach Gestalt und Lage wir am besten verwenden. Bei der Abbildung selbst können wir mehr analytisch oder streng geometrisch vorgehen. Mehr analytischer Natur ist die früher allgemein üblich gewesene Methode, die der berühmte russische Geodät Krassowski treffend als "Netzausbreitung" bezeichnet hat. Hierbei wird bekanntlich die astronomisch gemessene Breite und Länge des sogenannten Fundamentalpunktes unverändert auf die Referenzfläche übernommen, als welche ein annähernd den Erddimensionen entsprechendes Rotationsellipsoid verwendet wird. Um sodann das Dreiecksnetz auf dem Ellipsoid auch orientieren zu können, muss überdies das Azimut einer Ausgangsseite astronomisch gemessen und unverändert übernommen werden. Für die rechnerische Verarbeitung müssen aber alle Beobachtungen entsprechend reduziert werden. Diese Reduktionen erfordern natürlich, dass wir das Referenzellipsoid in eine ganz bestimmte Lage zum Erdkörper, resp. zur mathematischen Erdfigur oder zum Geoid bringen. Um das zu erreichen, brauchen wir nur den Fundamentalpunkt mit seinem Bildpunkt, seine Lotrich-

* Vortrag, gehalten auf der Wiener Geodätischen Woche am 9. Juni 1956 und auf dem 41. Deutschen Geodätentag in Essen am 28. September 1956. Bereits veröffentlicht in der Zeitschrift für Vermessungswesen, Jahrgang 1956, Heft 12, Seite 429.

tung mit der zugehörigen Ellipsoidnormalen und überdies die astronomische oder geoidische und die ellipsoidische Meridianebene zur Deckung bringen. Dann aber folgt aus der Gleichheit der astronomischen und geodätischen Breite oder des Winkels zwischen der Lotrichtung oder der Ellipsoidnormalen einerseits und der Rotationsachse der Erde oder der Figurenachse des Rotationsellipsoides andererseits wegen des Zusammenfallens des einen Schenkels dieses Winkels die Parallelität zwischen Rotationsachse und ellipsoidischer Figurenachse. Dies ist nun von fundamentaler Bedeutung, da sonst die ganze Lotabweichungsdefinition ihren Sinn verlieren würde. Wohl lassen sich natürlich auch bei allgemeinerer Lage der beiden Achsen Lotabweichungen definieren, ihr Ausdruck aber und besonders der Ausdruck für die zugehörige Laplacesche Gleichung würde sich dadurch jedoch unnötig komplizieren. Gleicht man dann das Netz nach seinen rein geometrischen Bedingungen aus, so kann es, ausgehend von den astronomischen Daten im Fundamentalpunkt, durch die übliche geodätische Uebertragung auf dem gegebenen Referenzellipsoid ausgebreitet werden.

Die damit kurz umschriebene Netzausbreitung liefert also ein geometrisch mögliches, nicht aber ein "geodätisch fehlerfreies" Netz. Unter einem geodätisch fehlerfreien Netz wollen wir ein Netz verstehen, das frei ist von tatsächlichen Laplaceschen Widersprüchen. Mit dieser Formulierung ist aber bereits ein weiteres wichtiges Problem angeschnitten. Die Laplacesche Gleichung stellt nämlich eine Beziehung zwischen Länge und Azimut dar und zwar einen Ausdruck für die azimutale Lotabweichungskomponente, der aber nur unter bestimmten Voraussetzungen theoretisch verschwindet. Setzt man also das bekannte Laplacesche Binom $(\alpha' - \alpha) - (\lambda' - \lambda) \sin \varphi = 0$, so weist diese Gleichung im allgemeinen einen "Theoretischen Widerspruch" auf, der aus azimutalen Zusatzgliedern 2. O. besteht und nur im Falle einer Projektion mit der für die Grossraumtriangulierung notwendigen Genauigkeit verschwindet. Man hat seit Helmert die Ordnungsfunktion der Laplaceschen Gleichung in einer Kontrolle der Orientierung erblickt; in Wahrheit ist diese Ordnungsfunktion aber umfassender, denn die Mitnahme der Laplaceschen Bedingungsgleichung bei der Netzausgleichung erzwingt gewissermaßen die Projektion, die rein geometrisch gar nicht zu erzielen wäre. Freilich ist dazu überdies erforderlich, dass alle geodätischen und astronomischen Messungen ganz im Sinne der gewünschten Projektion auf das Referenzellipsoid reduziert werden, was in ganz besonderem Masse für die Grundlinien gilt.

Selbstverständlich denkt man im Zuge der Netzausbreitung bei der Reduktion der geodätischen Messungen gleichfalls an eine Projektion. Aber dies wird gleichsam vergessen, sobald die Ausgleichsmaschinerie einsetzt, und daher ist das Resultat ein bloss geometrisch mögliches Netz. Wir haben gerade die "geodätische Fehlerfreiheit" des Netzes aus dem Verschwinden der tatsächlichen, also über die theoretischen hinausgehenden Laplaceschen Widersprüche definiert. Da aber die Laplacesche Bedingung aus der Nullsetzung des Laplaceschen Binoms hervorgeht, heisst dies, dass sowohl die theoretischen wie auch die tatsächlichen Widersprüche verschwinden müssen, und die geodätische Fehlerfreiheit ist identisch mit der vollständigen Uebereinstimmung des ausgeglichenen Netzes mit einer Projektion. Somit sehen wir, dass die Laplacesche Bedingung die wichtigste Bedingung der Netzausgleichung ist; an Stelle der rein geometrischen Ausgleichung, die bereits endgültig der Vergangenheit angehört, tritt die astronomisch-geodätische Netzausgleichung.

Aber für die Projektion gibt es noch zwei Möglichkeiten, nämlich eine rein geometri-

sche und eine streng physikalische. Erstere ist die Helmert-Projektion der Oberflächenpunkte, die bisher bei Grossnetzen genähert immer angewendet wurde, und wahrscheinlich auch bei der zweiten Ausgleichung des Europanetzes noch Verwendung finden wird. Bei dieser Projektionsart denkt man sich die Punkte der Erdoberfläche mittels der durch sie hindurchgehenden Ellipsoidnormalen auf die Referenzfläche projiziert. Damit sind alle Schwierigkeiten, die aus dem Nichtparallelismus der Niveaulächen oder aus der Krümmung der Lotlinien folgen, sehr geschickt umgangen. Das Geoid spielt dabei nur eine sekundäre Rolle, nämlich insoferne, als es die Fixierung der Lage des Referenzellipsoides nach dem schon bei der Netzausbreitung kurz geschilderten Verfahren ermöglicht. Doch hat dieses Verfahren natürlich auch Nachteile:

1. In jedem Punkte schliesst die Lotrichtung, nach der der Theodolit orientiert ist, mit der zugehörigen Normalen des innerhalb gewisser Grenzen willkürlich gelagerten Ellipsoides den Winkel der "relativen Lotabweichung" ein, und die Richtungsbeobachtungen müssten zuerst vom astronomischen auf das geodätische Zenit reduziert werden, was in sämtlichen Punkten i. O. die Beobachtung der astronomischen Breite und Länge zur Voraussetzung hat.

2. Die Reduktion wegen der Meereshöhe des Zielpunktes gilt in der bekannten ellipsoidischen Form Helmersts korrekt bis auf die Vernachlässigung des relativ kleinen Höhenunterschiedes zwischen Geoid und Referenzellipsoid.

3. Die astronomischen Messungen erfahren überhaupt keine Korrektion. Dies bedingt eine verminderte physikalische Bedeutung der relativen Lotabweichungen; denn die Beobachtungsstationen liegen ja in verschiedenen Niveaulächen.

Die zweite Möglichkeit besteht in der Doppelprojektion nach Pizzetti. Im ersten Schritt müssen alle Punkte der Erdoberfläche mittels ihrer gekrümmten Lotlinie auf das Geoid projiziert werden. Die praktische Durchführung dieser ersten Projektionsstufe läuft auf eine Reduktion aller Beobachtungen, der geodätischen und astronomischen, auf das Geoid und zwar unter strenger Berücksichtigung der Lotkrümmung hinaus. Die zweite Stufe der Pizzettischen Doppelprojektion besteht dann in der Projektion der Geoidpunkte auf das Referenzellipsoid. Der Vorgang wäre dabei genau derselbe wie bei der Helmertprojektion. Wählt man aber das Referenzellipsoid nach Form und Lage so, dass es sich dem Geoid bereits gut anschmiegt, so können die Abstände zwischen Geoid und Ellipsoid so klein gehalten werden, dass man die weiteren ellipsoidischen Reduktionen völlig unterdrücken darf. Die Pizzettiprojektion hat also zwei wesentliche Vorzüge vor der Helmertprojektion:

1. Die Lotabweichungsreduktion oder die Reduktion vom astronomischen auf das ellipsoidische Zenit entfällt theoretisch.

2. Die resultierenden relativen Lotabweichungen beruhen auf einer exakten Gegenüberstellung geoidischer und ellipsoidischer Elemente; es kommt ihnen eine klare physikalische Bedeutung zu.

Hingegen war zu Pizzettis Zeiten weder theoretisch noch praktisch an eine Durchführung der Lotkrümmungsreduktionen zu denken; er operierte daher selbst gedanklich mit geraden Lotlinien. Da aber Baeschlin¹⁾ nachgewiesen hat, dass die Unterschiede der Lotrichtungen in den Oberflächen- und Geoidpunkten im Gebirge mehrere Bogensekunden betragen

¹⁾ C. F. Baeschlin: "Ueber die Lotkrümmung", Mitteilung an die Studienkommission 1 der IAG. Rom 1954.

können, scheint daran die Pizzetti-Projektion zunächst zu scheitern. Persönlich halte ich aber das Problem der Lotkrümmungsreduktionen für theoretisch befriedigend gelöst.²⁾ Die Grundgedanken der theoretischen Lösung sind folgende. Für je zwei Punkte derselben Niveaufläche kann die Differenz der Meereshöhen auf die Differenz der Durchschnittswerte der Schwere in den Lotlinien zurückgeführt werden. Die möglichst exakte Berechnung dieser Durchschnittswerte hat bekanntlich bereits Niethammer³⁾ gelehrt. Andererseits aber ist die Meereshöhendifferenz auch ein Mass für die Konvergenz der Niveauflächen oder für den Unterschied der Lotrichtungen im Oberflächen- und Geoidpunkt. Mithin ist in jedem beliebigen Azimut die Komponente dieses Richtungsunterschiedes eine Funktion des horizontalen Gradienten des Durchschnittswertes der Schwere, der aus der Schweredifferenz in benachbarten Punkten nach entsprechender Korrektur wegen des Höhenunterschiedes abgeleitet werden kann. Man braucht also bloss die einfache Grundformel des astronomischen Nivellements statt auf Lotabweichungen auf diese Richtungsunterschiede anzuwenden, um aus Messungen in äquidistanten Azimuten die Reduktionen der beobachteten astronomischen Breite und Länge auf das Geoid im Ausgleichswege zu erhalten, und zwar wohlgemerkt ohne jegliche Voraussetzung über den Verlauf der Lotlinie zwischen Oberfläche und Geoid! Die Lotkrümmungsreduktion der astronomisch beobachteten Azimute und der Richtungen der Triangulierung sowie der Grundlinien erfordert allerdings die zusätzliche hypothetische Annahme, dass die Projektion der Lotlinie auf jede Vertikalschnittsebene mit einem schwach gekrümmten Kreisbogen vertauscht werden darf; doch kann man leicht erkennen, dass der Fehler dieser Hypothese nur sehr geringen Einfluss auf das gesuchte Resultat hat. Von besonderer Wichtigkeit wird die Lotkrümmungsreduktion einmal werden, wenn an Stelle der üblichen Grundlinien direkte Messungen von Dreiecksseiten, z. B. mit dem Bergstrandschen Geodimeter, vorliegen werden, die unter Umständen sogar in 3000 m Meereshöhe verlaufen können. Es ist klar, dass dann besondere Sorgfalt bei der Reduktion solcher Seiten erforderlich ist, damit überhaupt die Genauigkeit der Messung erhalten bleibt.

Nicht unerwähnt soll schliesslich bleiben, dass die hier skizzierte Lösung des Problems der Lotkrümmungsreduktionen im wesentlichen auf der Tatsache fusst, dass sich die Schwerkraft nach Grösse und Richtung stetig ändert und somit die Lotlinien stetig gebogen sind, wobei sich nur die Krümmung an den Unstetigkeitsstellen der Dichte, also vor allem beim Eintritt in die Erdmasse, unstetig ändert. Die praktische Durchführung aber erfordert eine Genauigkeit der Gravimetermessungen von 0,01 mgal, die wohl erst in absehbarer Zeit zu erreichen sein wird. So verstehen wir auch, dass man nach dem Vorschlag Baeschlins für die Zweitausgleichung des europäischen Dreiecksnetzes an der Helmert-Projektion festhalten will.

Wir wollen jedoch für unsere theoretischen Betrachtungen die Möglichkeit einer exakten Lotkrümmungsreduktion voraussetzen. Dann gebührt der Pizzetti-Projektion der Geoidpunkte entschieden der Vorzug vor der Helmert-Projektion der Oberflächenpunkte. Die Projektion der Geoidpunkte hängt aber von den Parametern des Referenzellipsoides und von seiner Lage zum Geoid ab; die Punktconfiguration der Projektion und deren Masstab ist verän-

²⁾ K. Ledersteger: "Die Reduktion der astronomischen Beobachtungen wegen Lotkrümmung", Schweiz ZfV, 1955.

³⁾ Th. Niethammer: "Das astronomische Nivellement im Meridian des St. Gotthard", 2. Teil, Astr.-geod. Arbeiten in der Schweiz, Bd. 20, Bern 1939.

derlich! Dies besagt, dass sich zwei gleich lange Linien auf dem Geoid je nach der gegenseitigen Neigung und nach dem lokalen Abstand der beiden Flächen ungleich lang abbilden. Weil nun das Ellipsoid durch zwei Parameter, nämlich Achse und Abplattung, und seine Lage zum Geoid durch drei weitere Parameter, nämlich die beiden Lotabweichungskomponenten ξ_0 und η_0 im Fundamentalpunkt und die Geoidhöhe z_0 daselbst bestimmt ist, haben wir es mit einer fünffach unendlichen Schar von Pizzetti-Projektionen zu tun. Damit aber erhebt sich die Frage, welche dieser Projektionen als das natürlichste Abbild des Geoides anzusprechen ist. Zunächst wird man die Lage des, wie wir bereits wissen, stets achsenparallelen Ellipsoides derart fixieren, dass sein Figurenmittelpunkt mit dem Erdschwerpunkt und seine Figurenachse mit der Rotationsachse der Erde zusammenfällt. Sodann wird man nicht ein beliebiges Referenzellipsoid zugrundelegen, sondern das sogenannte mittlere Erdellipsoid, das wir erst später exakt definieren wollen und vorerst kurz als Repräsentanten der Normalfigur der Erde bezeichnen. Damit ist über alle fünf Parameter eindeutig verfügt und wir erhalten die Definition des sogenannten "naturtreuen Netzes". Das naturtreue Netz ist die Pizzettische Projektion der Geoidpunkte auf das eindeutig gelagerte mittlere Erdellipsoid. Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass die Gewinnung des naturtreuen Netzes das Endziel der kontinentalen Grossraumvermessung ist. Somit steht das naturtreue Netz im Mittelpunkt der modernen astronomischen Geodäsie.

Man kann in der astronomischen Geodäsie scharf zwischen einer translativen und einer projektiven Methode unterscheiden. Die erste beruht auf der Vorstellung einer Parallelverschiebung des Netzes auf der Referenzfläche unter Beibehaltung der linearen Längen der geodätischen Linien, die zweite auf der Vorstellung einer Parallelverschiebung des Ellipsoides im Erdkörper und einer neuerlichen Projektion der Geoidpunkte. Dementsprechend führen beide Vorstellungen auf verschiedene Lotabweichungsgleichungen; wir haben zwischen den translativen Lotabweichungsgleichungen *Helmerts* und den projektiven Lotabweichungsgleichungen von *Vening Meinesz* zu unterscheiden. Weil aber die Einbeziehung der Laplace-Bedingungen in die Netzausgleichung stets auf eine Projektion abzielt, beruht bereits die ursprüngliche astronomisch-geodätische Netzausgleichung *Helmerts* auf einer eigenartigen Durchdringung translativer und projektiver Gesichtspunkte; sie liefert unter gewissen Voraussetzungen eigentlich die Gesamtheit aller Pizzetti-Projektionen. Demgegenüber vermag die projektive Methode unmittelbar das naturtreue Netz zu liefern. Etwaige Fehler in den Ausgangselementen können nachträglich ohne Neuausgleichung mit Hilfe der projektiven Lotabweichungsgleichungen getilgt werden.

Da wir uns aber nicht mit der astronomisch-geodätischen Netzausgleichung, sondern nur mit den theoretischen Grundlagen zu befassen haben, müssen diese kurzen Andeutungen genügen und wir wenden uns dem zweiten Problem zu, der Bezugsfläche. Hier erhebt sich zuerst die Frage nach einer für die tatsächliche Bestimmung geeigneten Definition des mittleren Erdellipsoides. Bis in die jüngste Zeit hat man gedacht, dass hierfür eine rein geometrische Vorstellung ausreicht. Bekanntlich versteht man unter einem bestanschliessenden Ellipsoid ein Ellipsoid, das sich einem Geoidausschnitt möglichst enge anschmiegt. Wir denken uns in einem Dreiecksnetz, das auf einem vorgegebenen Referenzellipsoid ausgebreitet ist, die relativen Lotabweichungen bestimmt. Verschiebt und verdreht man dieses Netz auf dem Ellipsoid derart, dass sich die geodätischen geographischen Koordinaten nachher mög-

lichst enge an die astronomisch beobachteten Werte anschliessen, dass also die Quadratsumme der restlichen Lotabweichungen ein Minimum wird, so erhält man auf diesem Wege die sogenannte "Minimallage" des Netzes. Lässt man bei diesem Vorgang auch einen "Ellipsoidübergang" zu, d. h. eine Änderung der beiden Ellipsoidparameter, so resultiert die Minimal-lage auf dem bestanschliessenden Ellipsoid. Wäre die Erde nicht zu fast $3/4$ mit Wasser be-deckt, so könnte man sich ein über die ganze Erde ausgedehntes zusammenhängendes Drei-ecksnetz vorstellen und würde dann auf Grund derselben Minimumforderung für die restlichen Lotabweichungen mit grosser Wahrscheinlichkeit die absolute Lage des Netzes auf dem mitt-leren Erdellipsoid in seiner oben definierten eindeutigen Lage erhalten. Damit aber haben wir ganz im Sinne Helmerts das mittlere Erdellipsoid als bestanschliessendes Ellipsoid für das gesamte Geoid definiert. Bei der tatsächlichen ungünstigen Verteilung von Wasser und Land ist es fast müssig zu untersuchen, wie weit diese Vorstellung zutreffend ist. Noch besser als aus dem Minimalsystem der Lotabweichungen könnte man aber ein bestanschlies-sendes Ellipsoid durch die Minimumforderung für die Quadratsumme der restlichen Geoidhö-hen definieren. Bei Ausdehnung über das ganze Geoid ergibt sich hieraus die Minimumfor-derung für die auf das mittlere Erdellipsoid bezogenen absoluten Geoidhöhen, die wir kurz als Undulationen des Geoides bezeichnen wollen.

Zur Kritik der Helmerischen Definition sei noch kurz folgendes angedeutet:

1. Wegen der aus potentialtheoretischen Gründen leicht ersichtlichen stärkeren Krümmung des Geoides unter den Kontinenten, haben alle bestanschliessenden Ellipsoide verfälschte Pa-rameter. In mittleren Breiten wirkt sich diese stärkere Krümmung ausschliesslich in einer Verkürzung der resultierenden Achse aus, während sich in niederen und hohen Breiten die Abplattung zu gross, resp. zu klein ergibt. Als Beispiel sei erwähnt, dass die Achse des Besselschen Ellipsoides um rund 800 m zu klein ist, während sich beim Clarkeschen Ellip-soid wegen der stärkeren Heranziehung der in niederen Breiten gelegenen indischen Grad-messungen die Achse annähernd richtig, dafür die Abplattung zu gross ergab. Dies ist der Grund dafür, dass man auch aus einer Kombination verschiedener Gradmessungen oder Lot-abweichungssysteme nicht die Achse und Abplattung des mittleren Erdellipsoides mit hinrei-chender Sicherheit ableiten kann. Denn das Mittel aus systematisch verfälschten Einzelwer-ten ist ebenfalls verfälscht, was in erster Linie für die systematisch verkürzten Achsen gilt.

2. Auch hinsichtlich der Lage der Netze erweist sich das Minimumprinzip für die Quadrat-summe der restlichen Lotabweichungen als unzulänglich. In der Minimal-lage wird ja die mitt-lere Lotabweichung und damit die mittlere Neigung zwischen Geoid und Ellipsoid getilgt und zwar durch eine Parallelverschiebung des Ellipsoides. Die relativen Lotabweichungen ent-halten aber neben der durch die mehr lokalen sichtbaren und unterirdischen Massenunregel-mässigkeiten bedingten zufälligen Komponente (Lotstörung) eine starke systematische Kompo-nente, in der sich ein physikalischer und ein geometrischer Anteil überdecken. Der erste ist durch die grossen kontinentalen Wellen des Geoides verursacht und daher auch in den absolu-ten, auf das mittlere Erdellipsoid bezogenen Lotabweichungen enthalten. Der zweite ist in den Abweichungen des Referenzellipsoides vom Erdellipsoid begründet und kommt in einem all-mählichen Anwachsen der relativen Lotabweichungen mit zunehmendem Abstand vom Funda-mentalpunkt zum Ausdruck. Diese beiden systematischen Anteile können natürlich beim An-satz der Minimumbedingung für die restlichen Lotabweichungen nicht getrennt werden und

daher kann im allgemeinen die Minimallage auf dem bestanschliessenden Ellipsoid nicht mit der absoluten Lage auf dem mittleren Erdellipsoid übereinstimmen, wie sie dem naturtreuen Netze zukommt.

3. Auch die zweite Minimumforderung, die Minimumbedingung für die Quadratsumme der restlichen Geoidhöhen, gestattet nicht eine rein geometrische Bestimmung der Parameter des mittleren Erdellipsoides. Dazu müsste man nämlich rein geometrisch die Geoidhöhen gegenüber einem bestimmten Ellipsoid in eindeutiger Lage ableiten können, was unmöglich ist. Relative Geoidhöhen lassen sich wohl durch astronomische Nivellements gewinnen, sind dann aber ebenso wie die Lotabweichungen ans Festland gebunden.

Wir sehen also, dass Helmerts reingeometrische Definition nicht ausreicht. Andererseits aber kann man zur Bestimmung der linearen Dimensionen des Erdellipsoides die geometrische Methode nicht entbehren. Mithin kann eine wirklich brauchbare Definition nur aus einer Synthese physikalischer und astronomisch-geodätischer Gesichtspunkte hervorgehen, wobei wir sofort darauf zu achten haben, dass die moderne Geodäsie eine einheitliche Bezugsfläche sowohl für die Triangulierungen wie auch für das Schwerfeld anstrebt, was bedeutet, dass sich die Formel für die theoretische Schwere auf das mittlere Erdellipsoid beziehen muss. Daher haben wir früher das Erdellipsoid etwas vage als Repräsentanten der Normalfigur der Erde bezeichnet. Somit müssen wir uns vorerst mit dem Begriff der Normalfigur des hydrostatischen Gleichgewichtes, des sogenannten "Normalsphäroides" befassen. Bekanntlich lässt sich die Kräftefunktion der Erde im Aussenraum der kleinsten, die ganze Erdmasse gerade einschliessenden Kugel nach Kugelfunktionen entwickeln. Diese Entwicklung kann formal in $W = U_n + T_n = W_0$ zerlegt werden und man bezeichnet U_n als "Niveausphäroid n-ten Ranges" und T_n als die zugehörige "Restfunktion". So erhält man z. B. das Brunsche Niveausphäroid vom 2. Range oder das Helmerzsche Niveausphäroid 4. Ranges von Rotationsform, welche letzte Vereinfachung sehr berechtigt ist, weil die Normalfigur der Erde a priori eine Rotationsfigur sein muss. Ein dreiaxsiges Ellipsoid kann höchstens als bestanschliessendes Ellipsoid für das Gesamtgeoid in Frage kommen, woraus man sofort umgekehrt erkennt, dass Helmerts rein geometrische Definition des Erdellipsoides nichts mit dem physikalischen Begriff der Normalfigur zu tun hat und daher auch in diesem Sinne unzureichend ist. Die Restfunktion ist nun sicherlich eine Folge der Massenunregelmässigkeiten in der Erdkruste, jedoch nicht deren vollständiger Ausdruck, da ja das Niveausphäroid von den Hauptträgheitsmomenten der Erdmasse abhängt und in diese auch die Massenunregelmässigkeiten eingehen. Mithin ist das Verschwinden der Restfunktion T eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für die Normalfigur der Erde. Dies erkennt man am deutlichsten daraus, dass im Helmeraschen Niveausphäroid U_4 die zonale Kugelfunktion 4. O. auftritt, deren Koeffizient entsprechend der Normalfigur erst festgelegt werden muss.

Die grundlegende Situation ist damit folgende:

1. Die Massen in der Erdkruste müssen gedanklich irgendwie so umgruppiert werden, dass das Geoid Rand der Erdmasse wird. Dies ist notwendig, um die Anwendbarkeit der Kugelfunktionsentwicklung auf das Geoid zu gewährleisten. Es geschieht dies mit Hilfe von irgendwelchen bestimmten massenverschiebenden Schwerereduktionen. Die Massenverschiebungen ändern aber die Niveaulächen und es tritt an Stelle des tatsächlichen Geoides ein "künstliches Geoid" desselben Potentialwertes.

2. Würde man das "Regularisierungsgesetz" kennen, d.h. wissen, durch welche Massenverschiebungen man die Erde in hydrostatisches Gleichgewicht bringen könnte, so wäre das künstliche Geoid mit dem Normalsphäroid identisch. Wegen des Verschwindens der Restfunktion gehört das Normalsphäroid zu jenen künstlichen Geoiden, die mit ihrem eigenen Niveausphäroid zusammenfallen. Das aber heisst, dass das Normalsphäroid denselben Potentialausdruck wie das Helmertsche Rotations-Niveausphäroid U_4 besitzt:

$$U_4 = \frac{k^3 E}{l} \left\{ 1 + \frac{K}{2l^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi') + \frac{\omega^2 l^3}{2 k^2 E} \cos^2 \varphi' + \right. \\ \left. + \frac{D}{l^4} \left(\sin^4 \varphi' - \frac{6}{7} \sin^2 \varphi' + \frac{3}{35} \right) \right\}$$

mit
$$K = \frac{C - A}{E} \quad \text{und} \quad \delta = \frac{D}{a^4} .$$

Hierin sind E und ω die Masse und Rotationsgeschwindigkeit der tatsächlichen Erde. Das Verhältnis K der Differenz der Hauptträgheitsmomente C und A zur Erdmasse sowie der Parameter δ müssen erst dem Regularisierungsgesetz entsprechend bestimmt werden.

Zur Lösung des Problem es könnten wir zunächst versuchen, das unbekannte Regularisierungsgesetz durch eine hypothetische Annahme zu erfassen, wofür sich in erster Linie die Isostasie zu eignen scheint. Um ferner auch die linearen Dimensionen der Normalfigur zu gewinnen, haben wir die rein physikalische Betrachtungsweise irgendwie mit der älteren Helmertschen Definition des bestanschliessenden Ellipsoides für das Gesamtgeoid zu koppeln. Dementsprechend haben wir bei unserem Problem insgesamt vier Figuren zu unterscheiden: das aktuelle Geoid, das künstliche Geoid, das zugehörige Niveausphäroid und das mit diesem achsengleiche Rotationsellipsoid. Die beiden letzten Flächen weichen nur geringfügig voneinander ab, wobei das Ellipsoid entweder gänzlich vom Niveausphäroid umschlossen wird oder umgekehrt dieses gänzlich umschliesst.

Vernachlässigt man diesen kleinen Unterschied von wenigen Metern, so kann man das Normalsphäroid, von dem wir bereits wissen, dass es mit seinem Niveausphäroid zusammenfällt, überhaupt durch das achsengleiche Rotationsellipsoid ersetzen und dieses als mittleres Erdellipsoid bezeichnen. Hinsichtlich der Dimensionen wird man dann noch mit gutem Rechte fordern, dass sich die Normalfigur möglichst gut dem Geoid anschliesst, dass also die Abstände zwischen Geoid und mittlerem Erdellipsoid in ihrer Summe über die ganze Erde verschwinden. Dennoch ist damit das mittlere Erdellipsoid nicht einfach bestanschliessendes Ellipsoid für das Gesamtgeoid. Es müsste vielmehr vorerst die Abplattung physikalisch bestimmt werden und die Anpassung an das Geoid kann dann nur durch eine Variation der Achse und nicht wie bei dem bestanschliessenden Ellipsoid durch Variation von Achse und Abplattung erfolgen.

Würde aber, wie oben angenommen, die Isostasie das Regularisierungsgesetz vermitteln, so könnte man die auf ein beliebiges Referenzellipsoid bezogenen relativen Lotabweichungen isostatisch reduzieren. Sie würden dann den Neigungsunterschied zwischen dem Referenzellipsoid und dem künstlichen Geoid der regularisierten Erdmasse, also dem Normalsphäroid repräsentieren und die gewöhnliche Flächenmethode würde mit einem Schlage Achse und Abplattung des mittleren Erdellipsoides liefern. Dies ist, von einer höheren Warte

aus schärfer gesehen, natürlich nur ungefähr der Gedankengang Hayfords, der 1910 bekanntlich aus dem isostatisch reduzierten Lotabweichungsmaterial der USA das Ellipsoid

$$\alpha = 6\ 378\ 388\ \text{m} ; \alpha = 1:297,0 = 33670 \cdot 10^{-7}$$

abgeleitet hat, das 1924 zum Internationalen Ellipsoid erhoben wurde. Damit dürfen wir uns aber nicht begnügen. Denn das mittlere Erdellipsoid soll ja auch Bezugsfläche für das Schwerfeld der Erde sein und es muss daher noch eingehend untersucht werden, inwieweit die Isostasie die in sie gesetzten Erwartungen befriedigt.

Man wird also die beobachteten Schwerewerte isostatisch auf das Geoid reduzieren und die mit der isostatischen Massenverschiebung verbundenen Potentialänderungen berechnen. Damit aber findet man den sogenannten indirekten Effekt, d.h. den Höhenunterschied zwischen dem Geoid und dem künstlichen Geoid der Isostasie, dem isostatischen "Cogeoid", und kann die Schwerewerte weiter auf das Cogeoid reduzieren. Aus den so reduzierten Schwerewerten wären durch eine Kugelfunktionsentwicklung oder im Ausgleichswege die Konstanten der Formel für die theoretische Schwere zu bestimmen, die auf dem zum Cogeoid gehörenden Niveausphäroid U_4 gilt:

$$\gamma = \gamma_0 \left(1 + \beta \sin^2 \varphi - \frac{\beta_4}{4} \sin^2 2\varphi \right)$$

Diese Formel dürfte dann überhaupt keine Reste hinterlassen, wenn anders die beiden Flächen zusammenfallen sollen. Es dürften also keine isostatischen Schwerestörungen auftreten und das Stokes'sche Integral, das bekanntlich die Berechnung der Geoidundulationen aus den Schwerestörungen gestattet, wäre überflüssig. Weil aber Tannis⁴⁾ Berechnungen auf kontinentale Abweichungen des Cogeoides vom Internationalen Ellipsoid führen, die eine Amplitude von 35 m aufweisen, folgt, dass die Hypothese der Isostasie nicht das unbekannte Regularisationsgesetz zu ersetzen vermag und daher das Hayfordsche Ellipsoid nicht der Repräsentant der Normalfigur sein kann. Wir müssen uns also nach einer besseren Lösung umsehen.

Das Problem enthält genau genommen noch vier Parameter, nämlich die beiden Koeffizienten β und β_4 der theoretischen Schwereformel, die Abplattung α des Niveausphäroides und den Parameter δ , der dem Koeffizienten der zonalen Kugelfunktion 4.O. entstammt. Die geometrische Abplattung α und die "Schwereabplattung" β sind Größen 2.O., β_4 und δ Größen 4.O.. Zwischen diesen vier Größen bestehen die zwei Gleichungen

$$\alpha + \beta - \frac{2}{7} \delta = 86\ 523 \cdot 10^{-7}$$

$$3\delta - \beta_4 = + 81 \cdot 10^{-7}$$

Die erste Gleichung stellt das erweiterte Clairaut'sche Theorem dar. Am korrektesten wäre die Lösung, wenn ein Parameter 2.O. und ein Parameter 4.O. aus den Beobachtungen abgeleitet werden könnte. Am nächsten würde die empirische Bestimmung von β und β_4 liegen; es ist aber zumindest derzeit noch ganz unmöglich, aus dem lückenhaften Schwerematerial β_4 mit der nötigen Sicherheit abzuleiten.

⁴⁾ L. Tanni: On the Continental Undulations of the Geoid as Determined from the Present Gravity Material, Veröff. d. Finnischen Geodät. Institutes, Nr.18, Helsinki 1948.

Der Parameter δ bestimmt den Abstand zwischen dem Niveausphäroid U_4 (Radiusvektor l) und dem achsengleichen Ellipsoid (Radiusvektor s) vermöge:

$$(l - s) = \frac{a}{4} (105 \cdot 10^{-7} - \delta) \sin^2 2 \varphi .$$

Für $\delta = + 105 \cdot 10^{-7}$ fällt also das Niveausphäroid bis auf Grössen 6. O. mit dem achsengleichen Ellipsoid zusammen und wird dann "Niveuellipsoid" genannt. Weil nun das Ellipsoid Gleichgewichtsfigur einer homogenen rotierenden Flüssigkeitsmasse sein kann und weil verschiedene theoretische Annahmen über die Dichteverteilung im Erdinnern auf δ -Werte zwischen 123 und 132 Einheiten der 7. Dezimale führen, liegt es nahe zu fordern, dass das Normalsphäroid ein Niveuellipsoid ist. Es soll also per definitionem das künstliche Geoid der regularisierten Erde oder das Normalsphäroid nicht nur mit seinem Niveausphäroid zusammenfallen ($T = 0$), sondern überdies das Niveausphäroid mit seinem achsengleichen Rotationsellipsoid ($\delta = + 105 \cdot 10^{-7}$). Damit aber gewinnen wir folgende Definition des mittleren Erdellipsoides⁵⁾:

"Das Normalsphäroid der Erde ist das mit dem künstlichen Geoid der regularisierten Erdmasse zusammenfallende Niveuellipsoid ($T = 0$; $\delta = + 105 \cdot 10^{-7}$). Das davon nur um Grössen 6. O. abweichende achsengleiche Rotationsellipsoid werde als das mittlere Erdellipsoid bezeichnet, bezüglich dessen bei vorausgesetzter eindeutiger Lage die Undulationen des aktuellen Geoides in ihrer Summe verschwinden."

Es ist nicht leicht, die physikalische Brauchbarkeit dieser Definition schrittweise zu erweisen. Wir wollen es aber dennoch in ganz grossen Zügen versuchen.

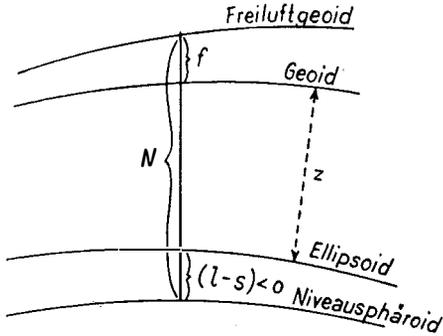
Die Regularisierung der Erdmasse erfordert jedenfalls eine massenverschiebende Schwerereduktion. Legt man aber diesen Massenverschiebungen eine bestimmte Vorstellung zugrunde, so ergeben sich daraus mehrere Schwierigkeiten. Man muss die Verschiebung des Geoides, d. h. den indirekten Effekt mühselig aus den mit den Massenverschiebungen verbundenen Potentialänderungen berechnen, was kaum mit der nötigen Sicherheit möglich ist. Ausserdem bewirken die Massenverschiebungen fast unweigerlich eine Verschiebung des Erd-schwerpunktes und Verlagerungen der Hauptträgheitsachsen. Schliesslich verändern sie auch das Potential im ganzen Aussenraum. Auf Grund des berühmten Stokes'schen Satzes über die Vieldeutigkeit des Umkehrproblemles der Potentialtheorie muss es aber eine Schwerereduktion geben, die ohne Voraussetzung einer bestimmten Massenverschiebung den Höhenunterschied zwischen dem aktuellen und dem künstlichen Geoid exakt und bequem zu berechnen gestattet und überdies weder eine Schwerpunktsverschiebung noch eine Änderung des Aussenraumpotentials bewirkt. Diese Reduktion, die eigentlich erst die exakte Anwendung des Stokes'schen Integrals ermöglicht, wollen wir die wahre Freiluftreduktion⁶⁾ und ihr künstliches Geoid das "Freiluftgeoid" nennen, das auf dem Meere mit dem aktuellen Geoid zusammenfällt und auf dem Festland nur bis maximal 9 m ansteigt, mithin niemals unter dem tatsächlichen Geoid liegt.

Angenommen, wir hätten ein über die ganze Erde gleichmässig verteiltes Schwerematerial, das mit Hilfe der wahren Freiluftreduktion auf das Freiluftgeoid reduziert ist. Dann

⁵⁾ K. Ledersteger: Die Definition des Normalsphäroides der Erde, erscheint demnächst.

⁶⁾ K. Ledersteger: Eine Modifikation der Freiluftreduktion, erscheint in der Festschrift f. Prof. C. F. Baeschlin, Zürich 1956.

findet man durch Ausgleichung die Konstanten γ_0 , β und β_4 der theoretischen Schwere und in weiterer Folge die Parameter α und δ des dem Freiluftgeoid entsprechenden Niveausphäroides.



Das Stokessche Integral gestattet dann die Berechnung der Erhebungen N des Freiluftgeoides über sein Niveausphäroid auf Grund der Freiluft-Schwerestörungen. Mit δ kennt man die Abweichungen $(l - s)$ des Niveausphäroides vom ächsenparallelen Ellipsoid. Da überdies die Erhebungen f des Freiluftgeoides über das aktuelle Geoid bekannt sind, findet man die Geoidhöhen z gegenüber dem Ellipsoid vermöge

$$z = N + (l - s) - f.$$

Diese Geoidhöhen beziehen sich auf ein Ellipsoid, dessen Abplattung streng be-

kannt ist, während die angenommene Achse noch mit einer Unsicherheit der Grössenordnung 100 m behaftet sein kann. Es ist nun von fundamentaler Bedeutung, dass alle drei Komponenten der Geoidhöhen z von einem Fehler in der Achse weitgehend unabhängig sind. Derartige Höhen wollen wir kurz als "gravimetrische Höhen" bezeichnen. Während die Erhebungen N in ihrer Summe über die Erde verschwinden, könnte dies für die Geoidhöhen z nur zufällig gelten. Im allgemeinen ist sogar zu erwarten, dass $\delta > 105 \cdot 10^{-7}$ und daher $(l - s) < 0$ ist, so dass stets $z < N$ ausfällt. Die Geoidhöhen z werden also dann einen negativen Mittelwert z_m besitzen.

Damit aber sind wir bereits beim Kern des Problem, der gravimetrischen Bestimmung der Abplattung des Normalsphäroides, angelangt. Wir wissen, dass wegen des Zusammenfallens des Normalsphäroides mit dem Niveauellipsoid diese Abplattung mit der des mittleren Erdellipsoides identisch ist. Andererseits wissen wir, dass wir jedes Ellipsoid beliebiger Abplattung durch eine Änderung der Achse dem Geoid derart anpassen können, dass die definitiven Geoidhöhen in ihrer Summe verschwinden. Schliesslich wissen wir, dass die gravimetrisch bestimmten Geoidhöhen von einer Verbesserung der Achse unabhängig sind. Daher erhalten wir die wahre Abplattung der Normalfigur, indem wir die gegebene Abplattung so abändern, dass der Mittelwert z_m der gravimetrischen Geoidhöhen verschwindet. Der Vorgang ist nur scheinbar ein geometrischer; in Wirklichkeit handelt es sich um eine streng physikalische Lösung, da ja die absoluten gravimetrischen Geoidhöhen die Grundlage bilden. Man findet die Abplattung des Normalsphäroides $(\alpha + d\alpha)$ mit

$$d\alpha = - \frac{\partial z_m}{\alpha}$$

und mit $dz = \alpha d\alpha \sin^2 \varphi$ die absoluten Geoidhöhen oder die Undulationen des tatsächlichen Geoides in bezug auf das mittlere Erdellipsoid⁷⁾.

Mit dieser gravimetrischen Bestimmung der Abplattung liegt aber auch bereits die

⁷⁾ K. Ledersteger: Die theoretischen Grundlagen der Grossraumtriangulation, vorgelegt auf der Tagung der Intern. Kommission für das Europäische Dreiecksnetz, München, Mai 1956.

streng für das Erdellipsoid gültige Formel für die theoretische Schwere vor:

$$\gamma = \gamma_0 \left[1 + (0,0086\ 553 - \alpha) \sin^2 \varphi - 0,0000\ 059 \sin^2 2 \varphi \right].$$

Denn mit $\delta = + 105 \cdot 10^{-7}$ gilt sofort:

$$\alpha + \beta = 86\ 553 \cdot 10^{-7}; \quad \frac{\beta_4}{4} = + 59 \cdot 10^{-7}.$$

Damit aber ist die Internationale Schwereformel, in der die Schwereabplattung aus der Abplattung des Hayfordschen Ellipsoides bestimmt ist, genau so ad absurdum geführt wie das Internationale Ellipsoid. Insbesondere ist es als gänzlich unbegründet erwiesen, dass man diese Formel einfach auf das Hayfordsche Ellipsoid bezieht. Die Folge ist, dass die auf dieser Grundlage abgeleiteten Geoidundulationen nur bis auf eine Konstante gelten, die gar nicht bestimmt werden kann.

Jetzt bleibt nur noch die Verbesserung der angenommenen Achse des Ellipsoides zu bestimmen. Die kontinentalen Undulationen ζ des Geoides liefern mit Hilfe der Grundformel des astronomischen Nivellements die Neigungsunterschiede zwischen dem aktuellen Geoid und dem Erdellipsoid oder repräsentative absolute Lotabweichungen. Stellt man diesen irgendwie durch Mittelbildung gewonnene repräsentative relative Lotabweichungen eines kontinentalen Netzes gegenüber, das auf einem Ellipsoid von der bereits bestimmten Abplattung des Erdellipsoides, jedoch von beliebiger Achse berechnet vorliegt, so kann durch eine Änderung der Achse, verbunden mit einer Verschiebung des Netzes, erreicht werden, dass die relativen Lotabweichungen möglichst gut in die absoluten Lotabweichungen übergeführt werden. Mit anderen Worten: wir haben es mit einer Lotabweichungsausgleichung zu tun, deren Minimumprinzip aber nicht für restliche Lotabweichungen, also für physikalische Größen, sondern für reine Fehler gilt. Das Resultat ist die absolute Lage des Netzes auf dem mittleren Erdellipsoid. Diese aus dem Jahre 1950 stammende Methode wird daher am besten als "absolute Lotabweichungsausgleichung" bezeichnet ⁸⁾.

Der damit skizzierte und meiner Meinung nach einzig korrekte Lösungsweg, der vom unbekanntem Regularisierungsgesetz unabhängig ist und daher als hypothesenfrei gelten darf, ist seltsam genug. Es zeigt sich nämlich, dass die beiden grossen Aufgaben des Problems der Erdfigur, nämlich die Bestimmung der Normalfigur oder des mittleren Erdellipsoides und die Bestimmung der Undulationen des aktuellen Geoides gegenüber dem mittleren Erdellipsoid nicht voneinander getrennt werden können. Es ist nicht so, dass zuerst das Erdellipsoid bekannt sein muss, ehe man an die Lösung des Undulationsproblems mit Hilfe des Stokesschen Integrals schreiten kann. Vielmehr müssen zur gravimetrischen Bestimmung der Abplattung der Normalfigur die Geoidhöhen bezüglich eines Ellipsoides bekannter Abplattung gegeben sein, und es müssen überhaupt die Undulationen des Geoides gegenüber dem mittleren Erdellipsoid vorliegen, ehe dessen Achse bestimmt werden kann!

Damit ist auch das Problem der Bezugsfläche geklärt und die zweite wesentliche Grundlage der Grossraumvermessung geschaffen. Zur Lösung der gestellten Aufgabe war tatsächlich ein Querschnitt durch die gesamte astronomische und physikalische Geodäsie erforderlich. Steht doch das Problem des naturtreuen Netzes im Mittelpunkt der astronomischen Geodäsie und das zweiteilige Problem der Erdfigur im Mittelpunkt der physikalischen Geodäsie.

⁸⁾ K. Ledersteger: Die Achse des Normalsphäroides der Erde, Öst. ZfV. 1950, Seite 113-129; K. Ledersteger: Die Bestimmung des mittleren Erdellipsoides und der absoluten Lage der Landestriangulationen, Sonderheft 12 der Öst. ZfV. Wien 1951.

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen

6 Hefte, je 32 Seiten. Jahresabonnement S 72'—.

Sonderhefte zur Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen

- Sonderheft 1: Festschrift Eduard Doležal. Zum 70. Geburtstag. 198 Seiten, Neuauflage, 1948. Preis S 18'—.
- Sonderheft 2: Lego (Herausgeber), Die Zentralisierung des Vermessungswesens in ihrer Bedeutung für die topographische Landesaufnahme. 40 Seiten, 1935. Preis S 24'—.
- Sonderheft 3: Ledersteger, Der schrittweise Aufbau des europäischen Lotabweichungssystems und sein bestanschließendes Ellipsoid. 140 Seiten, 1948. Preis S 25'—.
- Sonderheft 4: Zaar, Zweimedienphotogrammetrie. 40 Seiten, 1948. Preis S 18'—.
- Sonderheft 5: Rinner, Abbildungsgesetz und Orientierungsaufgaben in der Zweimedienphotogrammetrie. 45 Seiten, 1948. Preis S 18'—.
- Sonderheft 6: Hauer, Entwicklung von Formeln zur praktischen Anwendung der flächentreuen Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene. 31 Seiten, 1949. (Vergriffen.)
- Sonderheft 7/8: Ledersteger, Numerische Untersuchungen über die Perioden der Polbewegung. Zur Analyse der Laplace'schen Widersprüche. 59 + 22 Seiten, 1949. Preis S 25'—.
- Sonderheft 9: Die Entwicklung und Organisation des Vermessungswesens in Österreich. 56 Seiten, 1949. Preis S 22'—.
- Sonderheft 11: Mader, Das Newton'sche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung. 74 Seiten, 1951. Preis S 25'—.
- Sonderheft 12: Ledersteger, Die Bestimmung des mittleren Erdellipsoides und der absoluten Lage der Landstriangulationen. 140 Seiten, 1951. Preis S 35'—.
- Sonderheft 13: Hubeny, Isotherme Koordinatensysteme und konforme Abbildungen des Rotationsellipsoides. 208 Seiten, 1953. Preis S 60'—.
- Sonderheft 14: Festschrift Eduard Doležal. Zum 90. Geburtstag. 764 Seiten und viele Abbildungen. 1952. Preis S 120'—.
- Sonderheft 15: Mader, Die orthometrische Schwerekorrektion des Präzisions-Nivellements in den Hohen Tauern. 26 Seiten und 12 Tabellen. 1954. Preis S 28'—.
- Sonderheft 16: Theodor Scheimpflug — Festschrift. Zum 150 jährigen Bestand des staatlichen Vermessungswesens in Österreich. 90 Seiten mit 46 Abbildungen und XIV Tafeln, 1956. Preis S 60'—.
- Sonderheft 17: Ulbrich, Geodätische Deformationsmessungen an österreichischen Stauwerken und Großbauwerken. 72 Seiten mit 40 Abbildungen und einer Luftbildkarten-Beilage, 1956. Preis S 48'—.
- Sonderheft 18: Brandstätter, Exakte Schichtlinien und topographische Geländedarstellung. 94 Seiten mit 49 Abb. und Karten und 2 Kartenbeilagen 1957. Preis S 60'— (DM 14'—).
- Sonderheft 19: Vorträge aus Anlaß der 150-Jahr-Feier des staatlichen Vermessungswesens in Österreich, 4.—9. Juni 1956
- Teil 1: Über das staatliche Vermessungswesen, 24 Seiten, 1957. Preis S 28'—.
 - Teil 2: Über Höhere Geodäsie, 28 Seiten, 1957. Preis S 34'—.
 - Teil 3: Vermessungsarbeiten anderer Behörden. (In Vorbereitung.)
 - Teil 4: Deformationsmessungen - Sachverständiger - K. u. k. Militärgeographisches Institut. (In Vorbereitung.)
 - Teil 5: Über besondere photogrammetrische Arbeiten. (In Vorbereitung.)
 - Teil 6: Markscheidewesen und Probleme der Angewandten Geodäsie. (In Vorbereitung.)

Sämtliche Publikationen zu beziehen durch den
Österreichischen Verein für Vermessungswesen

Wien VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3

