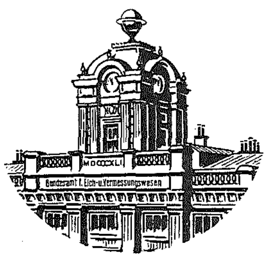
Sonderheft 11
der Österreichischen Zeitschrift
für Vermessungswesen

Das Newtonsche Raumpotential prismatischer Körper u. seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung

von

Karl Mader, Wien



Herausgegeben von der Österreichischen Kommission für Internationale Erdmessung

Eigentümer und Verleger:
Österreichischer Verein für Vermessungswesen
Wien, VIII., Friedrich-Schmidt-Platz 3

WIEN 1951

Bisher sind folgende Sonderhefte erschienen:

Sonderheft 1: Festschrift Eduard Dolezal, 198 Seiten, Neuauflage 1948
Preis S 18·—

Sonderheft 2: Die Zentralisierung des Vermessungswesens in ihrer Bedeutung für die topographische Landesaufnahme, 40 Seiten, 1935
wird neu aufgelegt

Sonderheft 3: Ledersteger, Der schrittweise Aufbau des europäischen Lotabweichungssystems und sein bestanschließendes Ellipsoid 140 Seiten, 1948 Preis S 25·—

Sonderheft 4: Zaar, Zweimedienphotogrammetrie, 40 Seiten, 1948
Preis S 18·—

Sonderheft 5: Rinner, Abbildungsgesetz und Orientierungsaufgaben in der Zweimedienphotogrammetrie, 45 Seiten, 1948 Preis S 18·—

Sonderheft 6: Hauer, Entwicklung von Formeln zur praktischen Anwendung der flächentreuen Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene, 32 Seiten, 1949 Preis S 15.—

Sonderheft 7 u. 8: Ledersteger: Numerische Untersuchungen über die Perioden der Polbewegung, 59 Seiten,
Zur Analyse der Laplaceschen Widersprüche, 22 Seiten, 1949
Preis S 25.—

Sonderheft 9: Die Entwicklung und Organisation des Vermessungswesens in Österreich, I. Teil, Die Entwicklung bis zum ersten Weltkrieg, 56 Seiten, 1949 Preis S 22.—

Sonderheft 11: Mader, Das Newtonsche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung, 74 Seiten, 1951 Preis S 25.—

Weitere Publikationen:

Tachymetrische Hilfstafel für sexagesimale Kreisteilung, 20 Seiten
Normformat A 5 (148×210 mm) Preis S 10.—

Tabuliert sind die Werte für $\cos^2\alpha$ und $^1/_2 \sin^2\alpha$ auf vier Dezimalstellen von 0° bis 45° von Minute zu Minute. Daher keine Interpolation erforderlich. Infolge des praktischen Taschenformates und der besonders widerstandsfähigen Ausstattung ist die Tafel auch im Gelände verwendbar.

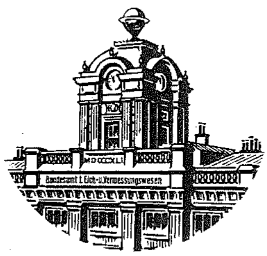
Sämtlich zu beziehen beim
Österr. Verein für Vermessungswesen, Wien, VIII., Friedrich-Schmidtplatz 3

Sonderheft 11
der Österreichischen Zeitschrift
für Vermessungswesen

Das Newtonsche Raumpotential prismatischer Körper u. seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung

von

Karl Mader, Wien



Herausgegeben von der Österreichischen Kommission für Internationale Erdmessung

Eigentümer und Verleger:
Österreichischer Verein für Vermessungswesen
Wien, VIII., Friedrich-Schmidt-Platz 3

WIEN 1951

Druck: Bundesamt für Eich- u. Vermessungswesen (Landesaufnahme), Wien

INHALTSVERZEICHNIS

DAS NEWTONSCHE RAUMPOTENTIAL

PRISMATISCHER KÖRPER UND SEINE ABLEITUNGEN

BIS ZUR DRITTEN ORDNUNG.

von Karl MADER, Wien.

Zusammenfassung: Das Newtonsche Raum-Potential und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung werden für vier-und dreiseitige Prismen von endlicher und unendlicher Ausdehnung berechnet.

Résumé: Le potential newtonien et ses dérivées jusqu'au troisième ordre inclus sont calculés pour des prismes à quatre et à trois faces d'extension finie et infinie.

Summary: The Potential Newtonian and its derivates including the 3.order are computed for four-and threeflanked prismas with finit and infinit extension.

Formeln zur Berechnung drei-und vierseitiger prismatischer Körper habe ich in einer Arbeit „Berechnung von Geoidhebungen in den Alpen" [1]) veröffentlicht. Hiebei war noch ein Teil in nicht geschlossener Form gebracht und mußte durch numerische Integration berechnet werden. Die Formeln habe ich auch in einer Publikation Berechnung der „Hebung des Geoids im Harz und in Mitteleuropa" [2]) benützt.

In der vorliegenden Arbeit wird das Potential in geschlossener Form dargestellt, auch für die ersten Ableitungen werden einfachere Ausdrücke als in der eingangs zitierten Veröffentlichung gebracht.

Zweite Ableitungen des Potentials endlich und unendlich ausgedehnter vierkantiger Prismen habe ich in einer anderen Arbeit [3]) veröffentlicht, Formeln für dreikantige Prismen findet man ebendort und in einer weiteren Publikation. [4])

Im Folgenden werden sie systematisch und vollständig entwickelt.

Dritte Ableitungen sind schon gelegentlich benötigt worden, um festzustellen, ob ihre Wirkung an die der zweiten Derivierten heranreicht,

---

[1]) K. Mader. Gerlands Beiträge zur Geophysik. Bd.41. S.156. 1934.

[2]) Gerl.Beitr.z.Geophys. Bd.43. S.134. 1934.

[3]) Die Tiefenbestimmung plattenförmiger horizontal liegender Einschlüsse aus Ergebnissen von Drehwaagenmessungen. Gerl.Beitr.z.Geophys. Bd.43. S.156. 1934.

[4]) Gradient und Krümmungsgröße des Segments eines unendlichen horizontalen Kreiszylinders. Gerl.Beitr.z.Geophys. Bd.48. S.417. 1936.

einmal bei Messungen mit der Drehwaage von Eötvös [5] [6]) dann bei anderen geophysikalischen Untersuchungen. [7]) Daher werden hier alle 10 Ableitungen dritter Ordnung berechnet.

Sämtliche Formeln des Potentials und seiner drei ersten Ableitungen werden in dieser Arbeit in geschlossener Form durch elementare Funktionen dargestellt.

Zuerst wird das Potential eines viereckigen rechtwinkligen Prismas von endlicher Ausdehnung berechnet und anschließend seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung, weiter für ein unendlich ausgedehntes Prisma. Dann folgt die analoge Berechnung für ein dreiseitiges Prisma in einer speziellen Lage zum Koordinatensystem, entsprechend dem Abhang eines Berges, bei endlicher und unendlicher Ausdehnung, schließlich sind die Formeln für ein dreiseitiges Prisma in einer zur vorigen symmetrischen Lage zum Koordinatensystem zusammen gestellt.

---

[5]) K. Mader. Zur Verwendung der Drehwaage von Eötvös bei nahen großen Massen. Sitz.Ber.der Akad.d.Wiss.in Wien.Bd.133.S.127.1924.

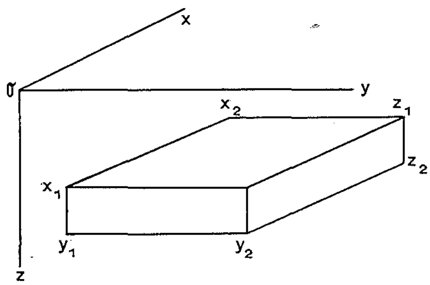
[6]) K. Mader. Die Bestimmung einer Geoidhebung aus Messungen mit der Drehwaage von Eötvös. Geofisica pura e applicata. Milano.Vol.XIII. S.53. 1948.

[7]) B. Kunz. Die Bestimmung des vertikalen Schweregradienten. Österreichisches Ingenieur-Archiv. Bd.II.1947.
H. Haalek. Die örtliche Verteilung der ersten drei vertikalen Differenzialquotienten. Beitr.angew.Geophys.Bd.10. S.121. 1943.

I. DAS VIERSEITIGE RECHTWINKLIGE PRISMA VON ENDLICHER AUSDEHNUNG.

1.) Das Newton'sche Potential.

Die Achsen des Koordinatensystems seien parallel den Kanten des Prismas wie in der Figur 1 orientiert, speziell x und y horizontal, z nach abwärts positiv, entsprechend dem von R. v. EÖTVÖS gebrauchten System.



Figur 1

Das Potential ist

(1) $$V = k^2 \delta \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} \frac{d\,z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

worin δ die Dichte und k^2 die Gravitationskonstante

$$k^2 = 66{\cdot}8.\ 10^{-9}\ \mathrm{cm}^3\ \mathrm{g}^{-1}\ \mathrm{sec}^{-2}$$

bezeichnen. Statt V behandeln wir das unbestimmte Integral

(2) $$W = \int dx \int dy \int \frac{d\,z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

und setzen später die Grenzen ein. Bei der Integration treten Formen auf, die auch für das Spätere typisch sind. Sie sollen zuerst gebracht werden.

Die zwei elementaren Formeln

(3) $$\int \frac{du\ u^2}{u^2+w^2} = u - w \arctan \frac{u}{w}$$

$$(4)\qquad \int \frac{du}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = \log\left(u+\sqrt{u^2+v^2+w^2}\right)$$

seien nur der Vollständigkeit halber angeführt.

In

$$T_1 = \int \frac{du}{(u^2+w^2)\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$$

führen wir eine neue Veränderliche φ ein mittels

$$u = \sqrt{v^2+w^2}\quad \tan\varphi$$

$$(5)\qquad du = \frac{\sqrt{v^2+w^2}}{\cos^2\varphi}\,d\varphi,\quad u^2+v^2+w^2 = (v^2+w^2)(1+\tan^2\varphi) = \frac{v^2+w^2}{\cos^2\varphi}$$

damit wird

$$T_1 = \int \frac{d\varphi\ \cos\varphi}{w^2+v^2\ \sin^2\varphi}$$

Mittels

$$(5')\qquad \sin\varphi = t$$

wird daraus

$$T_1 = \frac{1}{v\ w}\arctan\frac{v\ t}{w}$$

und durch Rückführung von t in u gemäß

$$(5'')\qquad t = \sin\varphi = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$$

schließlich

$$(6)\qquad T_1 = \int \frac{du}{(u^2+w^2)\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = \frac{1}{v\ w}\ \arctan\ \frac{u\ v}{w\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$$

Im Integral

$$T_2 = \int \frac{du}{\left(v+\sqrt{u^2+v^2+w^2}\right)\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$$

multipliziert man Zähler und Nenner mit

$$-v+\sqrt{u^2+v^2+w^2}$$

wodurch es sich verwandelt in

$$T_2 = -v\int \frac{du}{(u^2+w^2)\sqrt{u^2+v^2+w^2}} + \int \frac{du}{u^2+w^2}$$

und mittels (6) in

$$\text{(7)} \qquad T_2 = \int \frac{du}{(v + \sqrt{u^2+v^2+w^2})\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = -\frac{1}{w}\arctan\frac{u\,v}{w\sqrt{u^2+v^2+w^2}} + $$

$$+ \frac{1}{w}\arctan\frac{u}{w}$$

In der gleichen Weise wird

$$T_3 = \int \frac{du\,u^2}{(v + \sqrt{u^2+v^2+w^2})\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$$

behandelt. Es zerfällt nach kurzer Umformung in

$$T_3 = -v\int\frac{du}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} + v\,w^2\int\frac{du}{(u^2+w^2)\sqrt{u^2+v^2+w^2}} + \int\frac{du\,u^2}{u^2+w^2}$$

was nach (4),(6) und (3) ergibt:

$$\text{(8)} \qquad T_3 = \int \frac{du\,u^2}{(v + \sqrt{u^2+v^2+w^2})\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = -v\log(u + \sqrt{u^2+v^2+w^2}) + $$

$$+ w\arctan\frac{u\,v}{w\sqrt{u^2+v^2+w^2}} + u - w\arctan\frac{u}{w}$$

Die zwei letzten Terme in (8) und der letzte in (7) sind frei von v, sie werden bei vorausgehender bestimmter Integration nach v wegfallen. Das unbestimmte Integral (2) gibt nach x integriert

$$W = \int dy \int dz\,\log(x + \sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

und weiter partiell nach y :

$$\text{(9)} \qquad W = y\int dz\,\log(x + \sqrt{x^2+y^2+z^2}) - \int dy\,y^2\int\frac{dz}{(x + \sqrt{x^2+y^2+z^2})\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$$

$$= A + B$$

Die zur Abkürzung mit A und B bezeichneten Terme werden nun einzeln behandelt. A, partiell nach z integriert, gibt:

$$A = y\,z\log(x + \sqrt{x^2+y^2+z^2}) - y\int\frac{dz\,z^2}{(x + \sqrt{x^2+y^2+z^2})\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

und mit Hilfe von (8)

$$\text{(10)} \qquad A = y\,z\log(x + \sqrt{x^2+y^2+z^2}) + x\,y\log(z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}) -$$

$$- y^2\arctan\frac{x\,z}{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Die zwei letzten Terme von (8), die hier

$$- y z + y^2 \quad \arctan \frac{z}{y}$$

lauten, sind weggelassen worden, da sie bei der bestimmten Integration nach x von x_1 bis x_2 einmal positiv und einmal negativ auftreten, sich also wegheben.

Die Anwendung von (7) auf B hinsichtlich z liefert mit Weglassung des zweiten Terms von (7):

$$B = \int dy\ y \arctan \frac{x\,z}{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

und nach partieller Integration und geringfügiger Umformung

$$B = \frac{y^2}{2} \arctan \frac{x\,z}{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + x\,z \int \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} -$$

$$- \frac{x^3 z}{2} \int \frac{dy}{(y^2+x^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x\,z^3}{2} \int \frac{dy}{(y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

das mit (4) und (6) wird:

$$B = \frac{y^2}{2} \arctan \frac{x\,z}{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + x\,z \log(y + \sqrt{x^2+y^2+z^2}) - \tag{11}$$

$$- \frac{x^2}{2} \arctan \frac{y\,z}{x\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{z^2}{2} \arctan \frac{x\,y}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Die Berechnung der natürlichen Logarithmen wird durch Verwendung von Tafeln der Hyperbelfunktionen erleichtert gemäß

$$\log \frac{x_2 + \sqrt{x_2^2+y^2+z^2}}{x_1 + \sqrt{x_1^2+y^2+z^2}} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin} \frac{x_2}{\sqrt{y^2+z^2}} - \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin} \frac{x_1}{\sqrt{y^2+z^2}} \tag{12}$$

Durch Addition von (10) und (11) und Einführung der Integrationsgrenzen von (1) und Benützung der Schreibweise von (12) erhält man für das Potential V einen in x, y und z symmetrischen Ausdruck:

$$\frac{1}{k^2\delta} V = y_2 z_2 \,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin} \frac{x_2}{\sqrt{y_2^2+z_2^2}} + x_2 y_2 \,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin} \frac{z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}} +$$

$$+ x_2 z_2 \,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin} \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+z_2^2}} - \frac{x_2^2}{2} \arctan \frac{y_2 z_2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} -$$

$$- \frac{y_2^2}{2} \arctan \frac{x_2 z_2}{y_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \frac{z_2^2}{2} \arctan \frac{x_2 y_2}{z_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - (x_1 y_2 z_2) -$$

$$-(x_2 y_2 z_1) + (x_1 y_2 z_1) - (x_2 y_1 z_2) + (x_1 y_1 z_2) + (x_2 y_1 z_1) - (x_1 y_1 z_1)$$

Die Klammernsymbole sollen bedeuten, daß der vorausgehende explizite Ausdruck mit den jeweils in den Klammern eingeschriebenen Koordinaten der Eckpunkte zu wiederholen ist.

2.) Die ersten Ableitungen des Potentials eines endlichen vierseitigen rechtwinkligen Prismas.

An Stelle von

(14) $$V_x = -k^2\delta \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz\ x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$$

berechnen wir den Ausdruck mit unbestimmten Grenzen:

$$W_x = -\int dy \int dz \int \frac{dx\ x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$$

der, nach x integriert, ergibt:

$$W_x = \int dy \int \frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

weiter nach y:

$$W_x = \int dz \log(y + \sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

und durch partielle Integration nach z:

$$W_x = z \log(y + \sqrt{x^2+y^2=z^2}) - \int \frac{dz\ z^2}{(y + \sqrt{x^2+y^2+z^2})\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

woraus mit (8) wird

$$W_x = z \log(y + \sqrt{x^2+y^2+z^2}) + y \log(z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}) -$$
$$- x \arctan \frac{y\ z}{x\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Daraus erhält man durch Einführung der bestimmten Grenzen und Benützung von (12)

(15) $$\frac{1}{k^2\delta} V_x = y_2 \operatorname{Ar\,Sin} \frac{z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}} + z_2 \operatorname{Ar\,Sin} \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+z_2^2}} -$$
$$- x_2 \arctan \frac{y_2 z_2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - (x_2 y_2 z_1) - (x_2 y_1 z_2) + (x_2 y_1 z_1) -$$
$$- (x_1 y_2 z_2) + (x_1 y_2 z_1) + (x_1 y_1 z_2) - (x_1 y_1 z_1)$$

Durch zyklische Vertauschung gewinnt man daraus:

(16) $$\frac{1}{k^2\delta}\, V_y = x_2\, \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin} \frac{z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}} + z_2\, \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin} \frac{x_2}{\sqrt{y_2^2+z_2^2}} - y_2 \arctan \frac{x_2 z_2}{y_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} -$$

$- (x_2 y_2 z_1) -$ ....und die weiteren Permutationen wie in (15),

(17) $$\frac{1}{k^2\delta}\, V_z = x_2\, \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin} \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+z_2^2}} + y_2\, \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin} \frac{x_2}{\sqrt{y_2^2+z_2^2}} - z_2 \arctan \frac{x_2 \cancel{z_2}\, y_2}{z_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} -$$

$- (x_2 y_2 z_1) -$ .... die sechs weiteren Permutationen.

Bei horizontaler Lage der x y - Ebene bestimmen (15) und (16) die Lotabweichung, ~~(16)~~ 17 ist die Schwerewirkung der Masse des Prismas.

3.) Die zweiten Ableitungen des Potentials eines endlichen vierseitigen rechtwinkligen Prismas.

Das für V_{xx} maßgebende unbestimmte Integral

$$W_{xx} = -\iiint \frac{dx\, dy\, dz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} + 3 \iiint \frac{dx\, dy\, dz\, x^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5}$$

gibt nach x integriert

$$W_{xx} = - x \iint \frac{dy\, dz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$$

In den zugrunde liegenden Typus

$$T_4 = \int \frac{du}{(\sqrt{u^2+m^2})^3}$$

substituiert man analog (5)

(18) $$u = m \tan \varphi$$

und erhält

$$T_4 = \frac{1}{m^2} \int d\varphi \cos \varphi = \frac{1}{m^2} \sin \varphi$$

und durch Rücksubstitution mittels

(18') $$\sin \varphi = \frac{u}{\sqrt{u^2+m^2}}$$

(19) $$T_4 = \int \frac{du}{(\sqrt{u^2+m^2})^3} = \frac{1}{m^2} \frac{u}{\sqrt{u^2+m^2}}$$

Damit wird durch Integration nach z:

$$W_{xx} = -x\,z \int \frac{dy}{(y^2+x^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Berechnung dieses Integrals nach (6) und Einführung der bestimmten Grenzen gibt V_{xx} und durch zyklische Vertauschung V_{yy} und V_{zz}

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{xx} = -\arctan \frac{y_2\ z_2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + (x_2y_2z_1) + (x_2y_1z_2) - (x_2y_1z_1) +$$
$$+ (x_1y_2z_2) - (x_1y_2z_1) - (x_1y_1z_2) + (x_1y_1z_1)$$

(20)
$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yy} = -\arctan \frac{x_2\ z_2}{y_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + (x_2y_2z_1) + \ldots.$$
$$\frac{1}{k^2\delta} V_{zz} = -\arctan \frac{x_2\ y_2}{z_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + (x_2y_2z_1) + \ldots.$$

Man überzeugt sich leicht, daß diese drei zweiten Ableitungen im Außenraum die Laplace'sche und im Innenraum die Poisson'sche Gleichung erfüllen.

Zum Nachweis der Laplace'schen Gleichung bilden wir die Summe der drei ersten Terme, die mit x_2, y_2, z_2 beschrieben sind und lassen der Einfachheit halber die Indizes weg.

Mit Hilfe des Additionstheorems der arctan-Funktion

(21) $$\arctan u + \arctan v = \arctan \frac{u+v}{1-u\,v}$$

bilden wir die Summe der ersten zwei Terme

$$-\arctan \frac{y\ z}{x\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad -\arctan \frac{x\ z}{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

und erhalten hiefür nach kurzer Umformung

$$= \ -\arctan \frac{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x\ y} = -\operatorname{arccot} \frac{x\ y}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$$
$$= -\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x\ y}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Die Summe der drei mit x_2, y_2, z_2 beschriebenen Terme in (20) ist daher

$$-\frac{\pi}{2}$$

Jede weitere Summe von drei zusammen gehörigen Termen gleicher Indizes ist daher $-\frac{\pi}{2}$ oder $+\frac{\pi}{2}$; da vier Gruppen mit negativen und vier mit positiven Vorzeichen vorliegen, ergibt sich im Außenraum

$$\Delta V = 0$$

Zum Beweis der Erfüllung der Poisson'schen Gleichung im Innenraum genügt der Nachweis für einen Innenpunkt, als den wir am einfachsten den Mittelpunkt der Masse wählen, in den wir als Aufpunkt den Ursprung des Koordinatensystems verlegen, also einführen:

$$-x_1 = x_2 , \quad -y_1 = y_2 , \quad -z_1 = z_2$$

Hier hat jede der 8 Dreiergruppen mit gleichen Indices als Summe $-\frac{\pi}{2}$, daher :

$$\Delta V = -4\pi k^2 \delta$$

Die Funktionen (20) werden einzeln an den Randebenen der Masse unstetig mit endlicher Sprungweite. [8)]

Die Integration der drei gemischten zweiten Ableitungen gelingt unmittelbar nach dem Prototyp des zu V_{xy} gehörenden unbestimmten Integrals

$$3\iiint \frac{dx\,dy\,dz\,x\,y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} = -\iint \frac{dx\,dz\,y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} = \int \frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$$

$$= \log(z + \sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

Mit Einsetzen der Grenzen ist daher in der Schreibweise von (12)

$$(22) \quad \frac{1}{k^2\delta} V_{xy} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin} \frac{z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}} - (x_2 y_2 z_1) - (x_2 y_1 z_2) + (x_2 y_1 z_1) -$$

$$- (x_1 y_2 z_2) + (x_1 y_2 z_1) + (x_1 y_1 z_2) - (x_1 y_1 z_1)$$

---

8) K. Mader. Die Anwendung der Schwerkraftmessungen auf Geologie und Bergbau in Österreich. Berg-u. Hüttenmännische Monatshefte Bd. 86. 1938. S. 72.

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{xz} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+z_2^2}} - (x_2 y_2 z_1) - \ldots.$$

(22)
$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yz} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{x_2}{\sqrt{y_2^2+z_2^2}} - (x_2 y_2 z_1) - \ldots.$$

Diese Funktionen nehmen einzeln an bestimmten Kanten unendliche Werte an. [8])

4.) Die dritten Ableitungen des Potentials eines endlichen vierseitigen rechtwinkligen Prismas.

Die 10 dritten Ableitungen zerfallen in drei Gruppen, je nachdem nach einer Veränderlichen nur einmal, oder zweimal, oder dreimal differenziert ist. Die erste Gruppe besteht aus V_{xyz} allein. Das zugehörige unbestimmte Integral löst sich unmittelbar, es ist

$$W_{xyz} = -15 \iiint \frac{dx\,dy\,dz\,x\,y\,z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^7} = 3 \iint \frac{dx\,dy\,x\,y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} =$$

$$= - \int \frac{dx\,x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Daher ist

(23)
$$\frac{1}{k^2\delta} V_{xyz} = \frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - (x_2 y_2 z_1) - (x_2 y_1 z_2) + (x_2 y_1 z_1) - (x_1 y_2 z_2) +$$
$$+ (x_1 y_2 z_1) + (x_1 y_1 z_2) - (x_1 y_1 z_1)$$

Als Typus der zweiten Gruppe diene V_{xxy}, oder unbestimmt

$$W_{xxy} = 3 \iiint \frac{dx\,dy\,dz\,y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} - 15 \iiint \frac{dx\,dy\,dz\,x^2\,y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^7}$$

das nach y integriert zu

$$= - \iint \frac{dx\,dz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} + 3 \iint \frac{dx\,dz\,x^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5}$$

wird, weiter nach x

$$= - x \int \frac{dz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$$

schließlich nach (19) seine Lösung findet, nämlich

$$- \frac{x\ z}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Damit sind V_{xxy} bestim t und die weiteren fünf Gebilde durch zyklische Vertauschung

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{xxy} = - \frac{x_2\ z_2}{(x_2^2+y_2^2)\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + (x_2 y_2 z_1) + (x_2 y_1 z_2) - (x_2 y_1 z_1) +$$

$$+ (x_1 y_2 z_2) - (x_1 y_2 z_1) - (x_1 y_1 z_2) + (x_1 y_1 z_1)$$

(24)

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{xxz} = - \frac{x_2\ y_2}{(x_2^2+z_2^2)\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + \dots\dots$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{xyy} = - \frac{y_2\ z_2}{(x_2^2+y_2^2)\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + \dots\dots$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{xzz} = - \frac{y_2\ z_2}{(x_2^2+z_2^2)\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + \dots\dots$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yyz} = - \frac{x_2\ y_2}{(y_2^2+z_2^2)\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + \dots\dots$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yzz} = - \frac{x_2\ z_2}{(y_2^2+z_2^2)\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + \dots\dots$$

Für die drei Ableitungen der dritten Gruppe greifen wir V_{xxx} heraus und integrieren das entsprechende unbestimmte Integral sofort nach x:

$$W_{xxx} = 9 \iiint \frac{dx\ dy\ dz\ x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} - 15 \iiint \frac{dx\ dy\ dz\ x^3}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^7} =$$

$$= - \iint \frac{dy\ dz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} + 3\,x^2 \iint \frac{dy\ dz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} = C + D$$

Der erste Term C ist mit (19) zu lösen und führt nach Integration bezüglich z auf die Type T_1 :

(25) $$C = - z \int \frac{dy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = - \frac{1}{x} \arctan \frac{y\ z}{x\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

In die für D typische Form

$$T_5 = \int \frac{du}{(\sqrt{u^2+m})^5}$$

führen wir wieder die Substitution (18)

$$u = \sqrt{m}\tan\varphi$$

ein und erhalten

$$T_5 = \frac{1}{m^2}\int d\varphi \cos^3\varphi = \frac{1}{m^2}\int d\varphi \cos\varphi\,(1 - \sin^2\varphi) = \frac{1}{m^2}\ (\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi)$$

und nach Rückkehr zu u

(26) $$T_5 = \int \frac{du}{(\sqrt{u^2+m})^5} = \frac{1}{m^2}\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+m}} - \frac{1}{3}\frac{u^3}{(\sqrt{u^2+m})^3}\right)$$

Damit wird

$$D = 3\,x^2\int \frac{dy\ z}{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - x^2\int \frac{dy\ z^3}{(x^2+y^2)^2\,(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} = D_1 + D_2$$

Beide Typen werden durch die Substitution $y = \sqrt{x^2+z^2}\ \tan\varphi$ gelöst. Da sie im Späteren wiederholt auftreten werden, sollen sie in allgemeiner Form behandelt werden.

Durch die Substitution

(5) $$u = \sqrt{v^2+w^2}\tan\varphi$$

verwandelt sich

$$T_6 = \int \frac{du}{(u^2+v^2)^2\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$$

in

$$T_6 = \int \frac{d\varphi\ \cos^3\varphi}{(v^2+w^2\sin^2\varphi\ )^2}$$

(5') Mit $$\sin\varphi = t$$

wird es

$$T_6 = \int \frac{dt\ (1 - t^2)}{(v^2+w^2t^2)^2}$$

das durch Partialbruchzerlegung gelöst wird:

$$T_6 = \frac{w^2 - v^2}{2\ v^3w^3}\arctan\frac{w\ t}{v} + \frac{v^2+w^2}{2\ v^2w^2}\ \frac{t}{v^2+w^2t^2}$$

und schließlich durch Rückverwandlung von t in u

(5") $$t = \sin\varphi = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$$

ergibt sich

$$(27)\qquad T_6 = \int \frac{du}{(u^2+v^2)^2\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = \frac{w^2-v^2}{2\,v^3w^3}\arctan\frac{u\,w}{v\sqrt{u^2+v^2+w^2}} + \frac{1}{2\,v^2w^2}\,\frac{u\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{u^2+v^2}$$

Damit wird

$$(28)\qquad D_1 = \frac{3\,(z^2-x^2)}{2\,x\,z^2}\arctan\frac{y\,z}{x\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{3\,y}{2\,z}\,\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2}$$

Das gleiche Verfahren löst die zu D_2 gehörige Type

$$T_7 = \int \frac{du}{(u^2+v^2)^2\left(\sqrt{u^2+v^2+w^2}\right)^3} =$$

$$(29)\qquad = \frac{1}{w^4}\left\{\frac{u}{(v^2+w^2)\sqrt{u^2+v^2+w^2}} + \frac{u\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{2\,v^2(u^2+v^2)} + \frac{w^2-3\,v^2}{2\,v^3w}\arctan\frac{u\,w}{v\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\right\}$$

und liefert

$$(30)\qquad D_2 = -\frac{x^2}{z}\left\{\frac{y}{(x^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2\,x^2\,(x^2+y^2)} + \frac{z^2-3\,x^2}{2\,x^3\,z}\arctan\frac{y\,z}{x\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}$$

Durch Addition von (25), (28) und (30) erhält man V_{xxx} und daraus durch zyklische Vertauschung V_{yyy} und V_{zzz} Charakteristisch ist das Herausfallen der Arcustangenten.

$$\frac{1}{k^2\delta}V_{xxx} = \frac{y_2\;z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\left(\frac{1}{x_2^2+y_2^2}+\frac{1}{x_2^2+z_2^2}\right) - (x_2y_2z_1) -$$

$$-(x_2y_1z_2) + (x_2y_1z_1) - (x_1y_2z_2) + (x_1y_2z_1) + (x_1y_1z_2) - (x_1y_1z_1)$$

$$(31)\qquad \frac{1}{k^2\delta}V_{yyy} = \frac{x_2\;z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\left(\frac{1}{x_2^2+y_2^2}+\frac{1}{y_2^2+z_2^2}\right) - (x_2y_2z_1) - \ldots.$$

$$\frac{1}{k^2\delta}V_{zzz} = \frac{x_2\;y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\left(\frac{1}{x_2^2+z_2^2}+\frac{1}{y_2^2+z_2^2}\right) - (x_2y_2z_1) - \ldots.$$

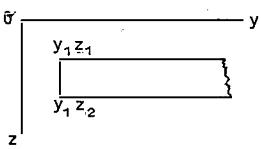
9 der 10 Ableitungen dritter Ordnung sind zu dritt in drei Gleichungen verbunden, welche die Ableitungen der Laplace'schen Gleichung nach x, beziehungsweise y und z sind. Im Außen-und Innenraum der Masse gilt:

$$(32)\qquad \begin{aligned} V_{xxx} + V_{xyy} + V_{xzz} &= \theta \\ V_{xxy} + V_{yyy} + V_{yzz} &= \theta \\ V_{xxz} + V_{yyz} + V_{zzz} &= \theta \end{aligned}$$

Alle zehn Ableitungen werden in den Kanten des Prismas unendlich. Doch sind auch in ihnen die Gleichungen (32) erfüllt.

II. DAS UNENDLICH AUSGEDEHNTE VIERSEITIGE RECHTWINKLIGE PRISMA.

1.) Es soll sich in der x-Richtung von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken, in der y-Richtung von y_1 bis ∞, in der z-Richtung von z_1 bis z_2; den Querschnitt in der yz-Ebene zeigt Figur 2. Die Integration ist zu erstrecken über



$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{y_1}^{\infty} dy \int_{z_1}^{z_2} dz$$

Figur 2

Man findet

$$V = \infty \qquad V_x = 0$$

(33)
$$\frac{1}{k^2\delta} V_y = z_2 \log(y_1^2+z_2^2) - z_1 \log(y_1^2+z_1^2) + 2\, y_1 \left(\arctan\frac{z_2}{y_1} - \arctan\frac{z_1}{y_1}\right)$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_z = y_1 \log\frac{y_1^2+z_2^2}{y_1^2+z_1^2} + 2\, z_2 \arctan\frac{y_1}{z_2} - 2\, z_1 \arctan\frac{y_1}{z_1} - \pi(z_2 - z_1)$$

Die zweiten Ableitungen sind

$$V_{xx} = V_{xy} = V_{xz} = 0$$

(34)
$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yz} = \log\frac{y_1^2+z_2^2}{y_1^2+z_1^2}$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yy} = 2 \left(\arctan\frac{z_2}{y_1} - \arctan\frac{z_1}{y_1}\right)$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{zz} = 2 \left(\arctan\frac{y_1}{z_2} - \arctan\frac{y_1}{z_1}\right)$$

V_{yz} nimmt auf den Kanten $y_1 = 0$, $z_1 = 0$ und $y_1 = 0$, $z_2 = 0$ unendliche Werte an, V_{yy} ist an der vertikalen Begrenzungsebene unstetig mit der endlichen Sprungweite $-4\pi k^2\delta$, V_{zz} ist analog längs der horizontalen begrenzenden Ebenen unstetig. Diese Unstetigkeiten von V_{yz} und V_{yy} am Rande einer plattenförmigen Einlagerung in der Erdkruste werden an der Erdoberfläche durch eine Extremstelle von V_{yz}, beziehungsweise zwei nahe benachbarte Extreme von V_{yy} entgegengesetzten Vorzeichens durch die Drehwaage von Eötvös sichtbar gemacht.[8]

Im Außenraum ist

$$V_{yy} + V_{zz} = 0$$

im Innenraum $- 4\pi k^2 \delta$.

Von den dritten Ableitungen verschwinden sechs:

$$V_{xyz} = V_{xxy} = V_{xxz} = V_{xyy} = V_{xzz} = V_{xxx} = 0$$

die übrigen vier:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k^2\delta} V_{yyz} &= 2\, y_1 \left(\frac{1}{y_1^2+z_2^2} - \frac{1}{y_1^2+z_1^2} \right) \\
\frac{1}{k^2\delta} V_{yzz} &= 2 \left(\frac{z_2}{y_1^2+z_2^2} - \frac{z_1}{y_1^2+z_1^2} \right) \\
\frac{1}{k^2\delta} V_{yyy} &= -2 \left(\frac{z_2}{y_1^2+z_2^2} - \frac{z_1}{y_1^2+z_1^2} \right) \\
\frac{1}{k^2\delta} V_{zzz} &= -2\, y_1 \left(\frac{1}{y_1^2+z_2^2} - \frac{1}{y_1^2+z_1^2} \right)
\end{aligned}
\tag{35}
$$

erfüllen ersichtlich die Ableitungen der Laplace'schen Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial y} \Delta V = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z} \Delta V = 0$$

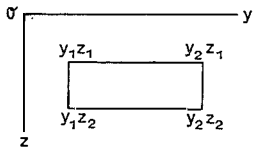
An den Kanten $y_1 = 0$, $z_1 = 0$ und $y_1 = 0$, $z_2 = 0$ werden die vier Ableitungen (35) unendlich.

2.) Das in der X-Richtung von $-\infty$ bis $+\infty$ ausgedehnte Prisma sei in der Y-Richtung von endlicher Ausdehnung und erstrecke sich von y_1 bis y_2, der Querschnitt ist in der Figur 3 dargestellt.

---

[8]) K. Mader. Berg-u. Hüttenm. Monatshefte. Bd. 86. S. 72. 1938.

Wenn unter F (y_1) eine der Formeln (33), (34) und (35) verstanden wird, dann ist die entsprechende bei endlicher y-Ausdehnung gegeben durch

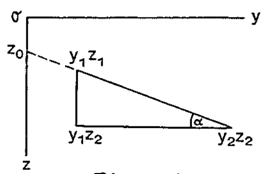


$$F(y_1) - F(y_2)$$

Figur 3

III. DAS DREISEITIGE PRISMA VON ENDLICHER AUSDEHNUNG.

1.) Das Potential.



Figur 4

Die Figur 4 zeigt den Querschnitt des behandelten Prismas und seine Lage zum Koordinatensystem. Die x-Richtung, in der sich das Prisma von x_1 bis x_2 erstreckt, ist senkrecht zur Bildebene vorzustellen. Eine Seite des Prismas ist parallel der x y-Ebene, eine zweite parallel der x z-Ebene, so daß ein Kantenwinkel ein rechter ist.

Die Gleichung der schiefen Begrenzungsebene ist

(36) $$z = z_0 + a\,y$$

wo $$a = \tan\alpha$$

der Steigungswinkel ($\alpha < 90$) ist.

In den Kanten der schiefen Ebene bestehen die Beziehungen

(37) $$z_2 = z_0 + a\,y_2 \quad \text{und} \quad z_1 = z_0 + a\,y_1$$

Das Potential ist

$$\frac{1}{k^2\delta}\,V = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_0+ay}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Integration nach x gibt

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_0+ay}^{z_2} dz \log(x_2 + \sqrt{x_2^2+y^2+z^2}) - (x_1)$$

worin das abkürzende Symbol (x_1) die Wiederholung des vorausgehenden Ausdrucks, aber geschrieben mit x_1 statt x_2 bedeutet.

Partielle Integration nach z führt zu

$$\frac{1}{k^2\delta} V = z_2 \int_{y_1}^{y_2} dy \log(x_2 + \sqrt{x_2^2+y^2+z_2^2}) - (x_1) -$$

(38)
$$- \int_{y_1}^{y_2} dy\, (z_0 + a y) \log\left(x_2 + \sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a y)^2}\right) + (x_1) -$$

$$- \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_0+ay}^{z_2} \frac{dz\, z^2}{(x_2+\sqrt{x_2^2+y^2+z^2})\sqrt{x_2^2+y^2+z^2}} + (x_1) = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}$$

wobei die drei Integrale im Folgenden durch die römischen Ziffern bezeichnet sein sollen.

Der Typus von I ist im Integral A der Formel (9) schon behandelt worden, man erhält analog (1o) direkt:

$$\mathrm{I} = y_2 z_2 \log(x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}) + x_2 z_2 \log(y_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}) -$$

(39)
$$- (x_2 y_1 z_2) - (x_1 y_2 z_2) + (x_1 y_1 z_2) -$$

$$- z_2^2 \left(\arctan \frac{x_2 y_2}{z_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - (x_2 y_1) - (x_1 y_2) + (x_1 y_1) \right)$$

II wird partiell integriert:

$$\mathrm{II} = - \frac{(z_0 + a y_2)^2}{2a} \log\left(x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+(z_0+a y_2)^2}\right) + (x_2 y_1) + (x_1 y_2) -$$

$$- (x_1 y_1) + \frac{1}{2a} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\, (z_0+a y)^2}{x_2+\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a y)^2}} \frac{y + a(z_0+a y)}{\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a y)^2}} -$$

$$- (x_1) = A + B$$

Im ersten Teil ist nach (37)

$$z_0 + a y_2 = z_2 \qquad z_0 + a y_1 = z_1 \quad .$$

daher

(40)
$$A = - \frac{z_2^2}{2a} \log(x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}) + (x_1 y_2 z_2) + (x_2 y_1 z_1) - (x_1 y_1 z_1)$$

Multiplikation von Zähler und Nenner in B mit

$$- x_2 + \sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a y)^2}$$

gibt

$$B = - \frac{x_2}{2a} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\, (z_0+a y)^2 \, [y+a(z_0+a y)]}{[y^2+(z_0+a y)^2] \sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a y)^2}} + \frac{1}{2a} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy (z_0+a y)^2 [y+a(z_0+a y)]}{y^2+(z_0+a y)^2} - (x_1)$$

Das zweite Integral ist von x unabhängig, es hebt sich mit einem genau gleichen, das von der unteren Grenze x_1 herrührt, kann also weggelassen werden.

Durch Addition und Subtraktion von y^2 im Zähler wird das allein verbleibende erste Integral zu

$$B = -\frac{x_2}{2a}\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy\,[\,y(1+a^2)+z_0]}{\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\,y)^2}}+\frac{x_2}{2a}\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy\,y^2\,[y+a(z_0+a\,y)]}{[y^2+(z_0+a\,y)^2]\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\,y)^2}} -$$

$$-(x_1) = B_1 + B_2$$

In B_1 liegen die zwei auch später oft auftretenden Typen

$$T_8 = \int_{y_1}^{y_2}\frac{dy}{\sqrt{y^2(1+a^2)+2\,a\,y\,z_0+z_0^2+x_2^2}}$$

und

$$T_9 = \int_{y_1}^{y_2}\frac{dy\,y}{\sqrt{y^2(1+a^2)+2\,a\,y\,z_0+z_0^2+x_2^2}}$$

vor. Durch Einführung von

(41) $$y+\frac{a\,z_0}{1+a^2}=\eta \qquad \frac{x_2}{\sqrt{1+a^2}}=\xi \qquad \frac{z_0}{1+a^2}=\zeta$$

verwandelt sich T_8 in

$$T_8 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\int\frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\log\frac{\eta_2+\sqrt{\eta_2^2+\xi^2+\zeta^2}}{\eta_1+\sqrt{\eta_1^2+\xi^2+\zeta^2}}$$

Durch Rückkehr auf die ursprünglichen Veränderlichen und unter Verwendung von (37) wird schließlich

(42) $$T_8 = \int_{y_1}^{y_2}\frac{dy}{\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\,y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\log\frac{y_2+a\,z_2+\sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{y_1+a\,z_1+\sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\left(\mathfrak{Ar\,Sin}\,\frac{y_2+a\,z_2}{\sqrt{x_2^2(1+a^2)+z_0^2}} - \mathfrak{Ar\,Sin}\,\frac{y_1+a\,z_1}{\sqrt{x_2^2(1+a^2)+z_0^2}}\right)$$

Diese Substitution (41) löst auch T_9 :

$$T_9 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\int\frac{d\eta\left(\eta-\frac{a\,z_0}{1+a^2}\right)}{\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2}} = \frac{\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2}}{\sqrt{1+a^2}} - \frac{a\,z_0}{(\sqrt{1+a^2})^3}\log(\eta+\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2})$$

und nach Rückverwandlung von (41)

(43) $$T_9 = \int_{y_1}^{y_2}\frac{dy\,y}{\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\,y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2} -$$

$$-\frac{a\,z_0}{(\sqrt{1+a^2})^3}\log\left(y_2+a\,z_2+\sqrt{1+a^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\right) - (x_2 y_1 z_1)$$

Damit wird

$$(44)\qquad B_1 = -\frac{x_2}{2a}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2} + (x_2y_1z_1) + (x_1y_2z_2) - (x_1y_1z_1)$$

In B_2 wird der Nenner in den Zähler dividiert, wodurch es in vier Teile zerfällt:

$$B_2 = -\frac{x_2 z_0}{2\,(1+a^2)}\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy}{\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\,y)^2}} + \frac{x_2}{2a}\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy\ y}{\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\,y)^2}} +$$

$$+\frac{x_2 z_0^3}{2\,(1+a^2)}\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy}{[y^2+(z_0+a\,y)^2]\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\,y)^2}} -$$

$$-\frac{x_2 z_0^2(1-a^2)}{2\,a\,(1+a^2)}\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy\ y}{[y^2+(z_0+a\,y)^2]\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\,y)^2}}$$

Die zwei ersten Integrale liegen unter (42) und (43) schon berechnet vor, die zwei letzten werden wieder mit der Substitution (41) gelöst. Man findet für das dritte Integral:

$$T_{10} = \int_{y_1}^{y_2}\frac{dy}{[y^2+(z_0+a\,y)^2]\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\,y)^2}} = \frac{1}{(\sqrt{1+a^2})^3}\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{d\eta}{(\eta^2+\zeta^2)\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2}}$$

das schon als T_1 in der Formel (6) vorliegt und daher ist

$$T_{10} = \frac{1}{(\sqrt{1+a^2})^3}\,\frac{1}{\xi\,\zeta}\arctan\frac{\eta_2\,\zeta}{\xi\sqrt{\eta_2^2+\xi^2+\zeta^2}} - (\eta_1)$$

schließlich rückverwandelt mit (41), ist

$$(45)\qquad T_{10} = \frac{1}{x_2\ z_0}\arctan\frac{x_2(y_2+a\ z_2)}{z_0\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - (x_2y_1z_1)\ .$$

Der vierte Teil von B_2 wird mittels (41) zu

$$T_{11} = \int_{y_1}^{y_2}\frac{dy\ y}{[y^2+(z_0+a\,y)^2]\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\,y)^2}} = \frac{1}{(\sqrt{1+a^2})^3}\int\frac{d\eta\,\eta}{(\eta^2+\zeta^2)\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2}}$$

$$-\frac{a\ z_0}{(\sqrt{1+a^2})^5}\int\frac{d\eta}{(\eta^2+\zeta^2)\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2}}$$

Der zweite Teil hievon ist als T_{10} beziehungsweise T_1 schon bekannt, der erste aber stellt einen neuen Typus dar. Mittels

$$\eta = \sqrt{\xi^2+\zeta^2}\tan\varphi$$

wird das Integral

$$T_{12} = \sqrt{\xi^2+\zeta^2}\int\frac{d\varphi\sin\varphi}{\zeta^2+\xi^2\ \sin^2\varphi}$$

Man substituiert

$$\cos\varphi = t$$

und erhält

$$T_{12} = -\sqrt{\xi^2+\zeta^2}\int\frac{dt}{\xi^2+\zeta^2-\xi^2 t^2}$$

das durch

$$\frac{\xi t}{\sqrt{\xi^2+\zeta^2}} = s$$

zu

$$-\frac{1}{\xi}\int\frac{ds}{1-s^2} = -\frac{1}{2\xi}\log\frac{1+s}{1-s}$$

wird. Nach Rückführung der Substitutionen ist

$$\text{(46)}\qquad T_{12} = \int\frac{d\eta\,\eta}{(\eta^2+\zeta^2)\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2}} = -\frac{1}{2\xi}\log\frac{\xi+\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}{-\xi+\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\xi}\log\frac{\xi+\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}{\sqrt{\eta^2+\zeta^2}} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{x_2}\log\frac{x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{\sqrt{y_2^2+z_2^2}}$$

Daher wird das vierte Integral von B_2 schließlich

$$\text{(47)}\qquad T_{11} = \int_{y_1}^{y_2}\frac{dy\;y}{[y^2+(z_0+a\,y)^2]\;\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\,y)^2}} =$$

$$= \frac{1}{x_2(1+a^2)}\log\frac{(x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2})\sqrt{y_1^2+z_1^2}}{(x_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2})\sqrt{y_2^2+z_2^2}} -$$

$$-\frac{a}{x_2(1+a^2)}\left(\arctan\frac{x_2(y_2+a\,z_2)}{z_0\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - (y_1\,z_1)\right)$$

Zusammen gezogen wird B_2 zu

$$B_2 = \frac{x_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{2\,a\,(1+a^2)} - \frac{x_2 z_0}{(\sqrt{1+a^2})^3}\log\left(y_2+a\,z_2+\sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\right) +$$

$$\text{(48)}\qquad +\frac{z_0^2\,(1-a^2)}{2\,a\,(1+a^2)^2}\log(x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}) + \frac{z_0^2}{2\,(1+a^2)^2}\arctan\frac{x_2(y_2+a\,z_2)}{z_0\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} -$$

$$-(x_2 y_1 z_1) - (x_1 y_2 z_2) + (x_1 y_1 z_1)$$

Damit ist II von (38) berechnet, das sich aus (40), (44) und (48) zusammensetzt.

Zur Berechnung des Integrals III von (38) multipliziert man Zähler und Nenner des Integranden mit

$$-x_2+\sqrt{x_2^2+y^2+z^2}$$

und erhält

$$\mathrm{III} = x_2 \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_0+ay}^{z_2} \frac{dz\ z^2}{(y^2+z^2)\sqrt{x_2^2+y^2+z^2}} - \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_0+ay}^{z_2} \frac{dz\ z^2}{y^2+z^2} - (x_1)$$

Das zweite Integral hievon hebt sich gegen das entsprechende in dem mit x_1 geschriebenen Teil weg.

Nach kurzer Umformung bleibt

(49) $$\mathrm{III} = x_2 \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_0+ay}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{x_2^2+y^2+z^2}} - x_2 \int_{y_1}^{y_2} dy\ y^2 \int_{z_0+ay}^{z_2} \frac{dz}{(y^2+z^2)\sqrt{x_2^2+y^2+z^2}} - (x_1) = \mathrm{III}_1 + \mathrm{III}_2$$

Beide Terme gestatten direkte Integration nach z gemäß (4) und (6). Es ist

(49a) $$\mathrm{III}_1 = x_2 \int_{y_1}^{y_2} dy \log(z_2 + \sqrt{x_2^2+y^2+z^2}) - x_2 \int_{y_1}^{y_2} dy \log(z_0 + a\,y + \sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\,y)^2}) - (x_1) = C + D$$

Partielle Integration verwandelt C in

$$C = x_2 y_2 \log(z_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}) - x_2 \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\ y^2}{(z_2+\sqrt{x_2^2+y^2+z_2^2})\sqrt{x_2^2+y^2+z_2^2}} - (x_1)$$

Der zweite Teil von C ist als Type T_3 in Formel (8) berechnet. Damit wird

(50) $$\begin{aligned} C = {} & x_2 y_2 \log(z_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}) + x_2 z_2 \log(y_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}) - \\ & - x_2^2 \arctan \frac{y_2 z_2}{x_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - (x_2 y_1 z_2) - (x_1 y_2 z_2) + (x_1 y_1 z_2) \\ & + x_2^2 \arctan \frac{y_2}{x_2} - (x_2 y_1) - (x_1 y_2) + (x_1 y_1) - (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

Die gleiche Methode der Integratio per partes liefert auf D angewendet die zwei Terme D_1 und D_2. Unter Berücksichtigung von (37) ist

(51) $$D_1 = -x_2 y_2 \log(z_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}) + (x_2 y_1 z_1) + (x_1 y_2 z_2) - (x_1 y_1 z_1)$$

Weiter ist

$$D_2 = x_2 \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\ y}{z_0 + a\,y + \sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\,y)^2}} \left[a + \frac{y + a\,(z_0 + ay)}{\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\,y)^2}} \right]$$

Nach Multiplikation des Zählers und Nenners mit

$$-(z_0+a\ y) + \sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\ y)^2}$$

und einigen Zusammenziehungen bleibt

(52) $$D_2 = -x_2 z_0 \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\ y)^2}} + x_2 \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\ y^2}{x_2^2+y^2} + x_2^3 \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\ (z_0+a\ y)}{(x_2^2+y^2)\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\ y)^2}} - (x_1) = E + F + G$$

E liegt als Typus T_8 in Formel (42) berechnet vor, F in Formel (3), daher sind die zwei ersten Integrale

(53) $$E + F = -\frac{x_2\ z_0}{\sqrt{1+a^2}} \log(y_2+a\ z_2+\sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}) + (x_2 y_1 z_1) + (x_1 y_2 z_2) - (x_1 y_1 z_1) - x_2^2 \arctan\frac{y_2}{x_2} + (x_2 y_1) + (x_1 y_2) - (x_1 y_1) + (x_2-x_1)(y_2-y_1)$$

Das dritte Integral G von (52) bedarf einer besonderen Behandlung, die ich schon bei einer früheren Gelegenheit ausführlich entwickelt habe. [9]) Eine erweiterte Form von G wird bei den dritten Ableitungen auftreten, daher soll die Methode der Berechnung von G hier kurz dargestellt werden. In den zwei Integralen

$$G_1 = \int \frac{dy}{R_1\sqrt{R}} \qquad \text{und} \qquad G_2 = \int \frac{dy\ y}{R_1\sqrt{R}}$$

sollen R und R_1 die quadratischen Formen

$$R = A\ y^2 + 2\ B\ y + C \qquad \text{und} \qquad R_1 = A'\ y^2 + 2B'\ y + C'$$

bedeuten. R und R_1 sollen verschiedene Wurzeln haben, R_1 konjugiert komplexe. Durch eine simultane Transformation

(54) $$u = \alpha\ y + \beta \qquad v = \gamma\ y + \delta$$

sollen R und R_1 in

(55) $$R_1 = u^2+v^2 \quad \text{und} \quad R = g\ u^2 + h\ v^2$$

---

[9]) Gerl. Beitr.z.Geophys.Bd.41.1934.S.70-73.

verwandelt werden, worin g und h zu bestimmende Konstante sind. Sei s eine Unbestimmte, dann wird der Ausdruck

(56) $$s R_1 - R = y^2(s A' - A) + 2y (s B'-B) +s C'-C$$

nach den Gleichungen (55)

(57) und $$\begin{aligned} &\text{für } s = g \quad \text{in } gR_1 - R = (g - h) v^2 \\ &\text{für } s = h \quad \text{in } hR_1 - R = (h - g) u^2 \end{aligned}$$

also in <u>reine</u> Quadrate umgewandelt.

Mit den Abkürzungen

(58) $$A' C' - B'^2 = D' \quad A' C + AC' - 2 BB' = E \quad AC - B^2 = D$$

nimmt die Diskriminante der quadratischen Form (56) die Gestalt

$$D' s^2 - Es + D$$

an. Wenn eine Form zweiten Grades ein reines Quadrat ist, dann verschwindet ihre Diskriminante. Dieses Verschwinden muß nach (57) für $s = g$ und $s = h$ eintreten, oder g und h sind die Wurzeln der Gleichung

(59) $$D' s^2 - E s + D = 0$$

also

(60) $$g = \frac{E + \sqrt{E^2-4 DD'}}{2 D'}, \qquad h = \frac{E - \sqrt{E^2-4 DD'}}{2 D'}$$

Wenn die zwei Wurzeln w_1 und w_2 von R_1 konjugiert komplex sind, läßt sich zeigen, daß g und h reell sind, daß also

(61) $$E^2 - 4 DD' > 0$$

ist. Man bildet $R(w_1)\ R(w_2)$. Beide Faktoren müssen von 0 verschieden sein. Wäre nämlich $R(w_1) = 0$, dann müßte auch, weil w_1 und w_2 konjugiert sind, auch $R(w_2) = 0$ sein; dann wäre aber $R_1 = R$. Das Integral G_1 wäre vom Typus (19) und G_2 ließe unmittelbare elementare Integration zu. Es sei also

$$R(w_1)\ R(w_2) \neq 0$$

vorausgesetzt. In dem Produkt

$$(62)\qquad R(w_1)\,R(w_2) = (Aw_1^2 + 2\,w_1B + C)\,(Aw_2 + 2\,w_2B + C) =$$

$$= A^2(w_1w_2)^2 + 2\,AB\,(w_1 + w_2)\,w_1w_2 + AC\,(w_1^2 + w_2^2) +$$

$$+ 4\,B^2w_1w_2 + 2\,BC\,(w_1 + w_2) + C^2$$

ersetzen wir die symmetrischen Grundfunktionen der Wurzeln w_1 und w_2 durch die Koeffizienten von R_1

$$w_1 + w_2 = -\frac{2\,B'}{A'} \qquad w_1w_2 = \frac{C'}{A'}$$

$$w_1^2 + w_2^2 = (w_1 + w_2)^2 - 2\,w_1w_2 = \frac{4\,B'^2}{A'^2} - \frac{2\,C'}{A'}$$

Nach kurzer Umformung und Multiplikation mit dem Nenner A'^2 wird (62)

$$A'^2\,R(w_1)\,R(w_2) = E^2 - 4\,DD'$$

Wenn wir das Produkt in den reellen und imaginären Teil spalten

$$A'\,R(w_1) = p + i\,q \qquad A'\,R(w_2) = p - i\,q$$

so ist deren Produkt

$$E^2 - 4\,DD' = p^2 + q^2$$

wesentlich positiv, also ist (61) erfüllt.

Dann sind g und h nach (60) reelle Konstante. u und v ergeben sich nach (57) und damit die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in (54).

Doch sind in (57) noch die Vorzeichen zu bestimmen, die dort nicht angesetzt waren.

η und η' sollen Vorzeichen +1 oder −1 bedeuten, sie sind zu bestimmen in (57):

$$(57')\qquad \frac{g\,R_1 - R}{g - h} = \eta\,v^2 \qquad \frac{h\,R_1 - R}{h - g} = -\eta'\,u^2$$

Hiemit und mit (55) und (54) wird

$$(63)\qquad R_1 = A'y^2 + 2\,B'y + C' = (\eta\gamma^2 - \eta'\alpha^2)\,y^2 + 2\,y\,(\eta\gamma\delta - \eta'\alpha\beta) + \eta\delta^2 - \eta'\beta^2$$

und weiter

$$(63')\qquad D' = A'C' - B'^2 = -\eta\eta'(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

D' ist aber nach (58) die negative Diskriminante von R_1. Da R_1 na-h Voraussetzung nur komplexe Wurzeln hat, ist seine Diskriminante negativ, daher ist der Ausdruck (63') durchaus positiv und folglich

$$-\eta\eta' = +1 \quad \text{oder} \quad \eta = -\eta$$

Welches hievon das Positive ist, wird durch A' entschieden, denn nach (63) ist

$$A' = \eta\,(\gamma^2 + \alpha^2)$$

Je nachdem A' positiv oder negativ ist, hat man

$$\eta = +1 \quad \text{oder} \quad \eta = -1$$

Damit sind die Vorzeichen in (57') bestimmt.
Es läßt sich in

$$D' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

immer so einrichten, daß $\sqrt{D'}$ positiv ist, also

$$+\sqrt{D'} = \alpha\delta - \beta\gamma \qquad \text{oder} \qquad +\sqrt{D'} = \beta\gamma - \alpha\delta$$

Es sei

$$+\sqrt{D'} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

dann gewinnt man aus (54)

$$\alpha v - \gamma u = \alpha\delta - \beta\gamma = \sqrt{D'}$$

$$\delta u' - \beta v = (\alpha\delta - \beta\gamma)\, y = y\sqrt{D'}$$

oder

(64) $$1 = \frac{-\gamma u + \alpha v}{\sqrt{D'}} \qquad y = \frac{\delta u - \beta v}{\sqrt{D'}}$$

Zur Ausführung der Integrationen G_1 und G_2 benötigt man noch

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = d\left(\frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}\right) = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma y + \delta)^2}\, d y = \frac{\sqrt{D'}\; d y}{v^2}$$

oder

$$dy = \frac{v^2\, d\left(\frac{u}{v}\right)}{\sqrt{D'}}$$

und

$$\frac{dy}{R_1\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{D'}} \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{1+\frac{u^2}{v^2}} \frac{1}{\sqrt{g\,u^2 + h\,v^2}} \tag{65}$$

Zur Homogenisierung ersetzen wir in G_1 den Zähler 1 durch die erste Gleichung von (64), ebenso y in G_2 durch die zweite Gleichung (64), wodurch die zwei Integrale nach Division mit v werden:

$$G_1 = \frac{1}{D'} \int \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{1+\frac{u^2}{v^2}} \frac{-\gamma\frac{u}{v}+\alpha}{\sqrt{g\frac{u^2}{v^2}+h}}, \quad G_2 = \frac{1}{D'} \int \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{1+\frac{u^2}{v^2}} \frac{\delta\frac{u}{v}-\beta}{\sqrt{g\frac{u^2}{v^2}+h}}$$

Durch die Substitution

$$\frac{u}{v} = \tan\varphi \text{ oder } \varphi = \arctan\frac{u}{v} \quad \text{und } d\varphi = \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{1+\frac{u^2}{v^2}} \tag{66}$$

gehen schließlich die zwei Integrale über in eine Summe der elementaren Typen:

$$\int \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{g\sin^2\varphi + h\cos^2\varphi}} \quad \text{und} \quad \int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{g\sin^2\varphi + h\cos^2\varphi}}$$

Unter der Voraussetzung, daß $g - h > 0$, führt die erste mittels der Substitution $\cos\varphi = \tau$ auf

$$-\int \frac{d\tau}{\sqrt{g-(g-h)\tau^2}}$$

also auf einen Arcussinus, den man besser in einen Arcustangens transformiert gemäß

$$\arcsin w = \arctan\frac{w}{\sqrt{1-w^2}} \tag{67}$$

Die zweite Type wird mit $\sin\varphi = t$ zu

$$\int \frac{dt}{\sqrt{h+(g-h)\,t^2}}$$

also zu einem Logarithmus oder Areasinus.

Das Vorausgehende wenden wir auf

$$G = x_2^3 \int \frac{dy\,(z_0 + a\,y)}{(y^2+x_2^2)\sqrt{y^2(1+a^2) + 2\,a\,y\,z_0 + z_0^2 + x_2^2}} \tag{68}$$

aus (52) an. Mit

$$A = 1 + a^2, \quad B = az_0, \quad C = z_0^2 + x_2^2, \quad A' = 1, \quad B' = 0, \quad C' = x_2^2$$

wird nach (58)

$$D' = x_2^2, \quad E = x_2^2 (2 + a^2), \quad D = (1 + a^2)\, x_2^2 + z_0^2$$

und hiemit nach (60)

$$g = 1 + a^2 + \frac{z_0^2}{x_2^2}, \quad h = 1, \quad g - h = \frac{a^2 x_2^2 + z_0^2}{x_2^2}$$

Weiter wird (57) zu

$$\frac{y\, z_0 - a\, x_2^2}{x_2^2} = \frac{a^2 x_2^2 + z_0^2}{x_2^2}\, v^2$$

$$(a\, y + z_0)^2 = \frac{a^2 x_2^2 + z_0^2}{x_2^2}\, u^2$$

Damit sind schließlich

(69) $$u = \frac{x_2 (a\, y + z_0)}{\sqrt{a^2 x_2^2 + z_0^2}} \qquad v = \frac{-y\, z_0 + a\, x_2^2}{\sqrt{a^2 x_2^2 + z_0^2}}$$

und darin die Koeffizienten α, β, γ, δ von (54) bestimmt. Das Vorzeichen in v ist hier so festgelegt, daß $\sqrt{D'}$ mit positivem Vorzeichen erscheint, denn es ist

$$\sqrt{D'} = \alpha\delta - \beta\gamma = x_2$$

Mit (64, (65) und (66) wird

$$G = x_2^2 \int \frac{d\varphi \tan\varphi \sqrt{a^2 x_2^2 + z_2^2}}{\sqrt{[(1+a^2) x_2^2 + z_0^2] \tan^2\varphi + x_2^2}} - (x_1)$$

das mit $\cos\varphi = \tau$ sich verwandelt in

$$G = -x_2^2 \int \frac{d\tau \sqrt{a^2 x_2^2 + z_0^2}}{\sqrt{(1+a^2)\, x_2^2 + z_0^2 - (a^2 x_2^2 + z_0^2)\tau^2}}$$

und direkt ergibt

$$G = -x_2^2 \arcsin \frac{\sqrt{a^2 x_2^2 + z_0^2}}{\sqrt{(1+a^2) x_2^2 + z_0^2}} \cos\varphi_2 + (x_2\varphi_1) + (x_1\varphi_2) - (x_1\varphi_1)$$

Aus

$$\tan\varphi_2 = \frac{u_2}{v_2} = \frac{x_2 (a\, y_2 + z_0)}{-y_2 z_0 + a\, x_2^2}$$

folgt

$$\cos\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi_2}} = \frac{-y_2 z_0 + a\,x_2^2}{\sqrt{a^2x_2^2+z_0^2}\,\sqrt{y_2^2+x_2^2}}$$

weiter

$$G = x_2^2 \arcsin \frac{y_2 z_0 - a\,x_2^2}{\sqrt{y_2^2+x_2^2}\,\sqrt{(1+a^2)x_2^2+z_0^2}} - (y_1)$$

Mit Berücksichtigung von (37) und mittels Ersatzes des arcsin durch den entsprechenden arctan nach (67) gelangt man zum Endresultat

(70) $$G = x_2^2 \arctan \frac{y_2 z_0 - a\,x_2^2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - (x_2 y_1 z_1) - (x_1 y_2 z_2) + (x_1 y_1 z_1)$$

Die Addition dieser Formel (70) zu (50), (51) und (53) ergibt den Term III_1 von (49).
In III_2 von (49)

$$III_2 = -\,x_2 \int_{y_1}^{y_2} dy\, y^2 \int_{z_0+ay}^{z_2} \frac{dz}{(y^2+z^2)\sqrt{x_2^2+y^2+z^2}} + (x_1)$$

führen wir mittels (6) die Integration nach (z) aus:

(71) $$III_2 = -\int_{y_1}^{y_2} dy\; y \arctan \frac{x_2\; z_2}{y\sqrt{x_2^2+y^2+z_2^2}} + \int_{y_1}^{y_2} dy\; y \arctan \frac{x_2(z_0 + a\,y)}{y\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\,y)^2}}$$
$$+ (x_1) = H + J$$

Durch Integratio per partes zerspaltet sich H in einen fertig integrierten Term H_1 und in ein Integral H_2.
Es ist

$$H_1 = -\frac{y_2^2}{2} \arctan \frac{x_2 z_2}{y_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + (x_2 y_1 z_2) + (x_1 y_2 z_2) - (x_1 y_1 z_2)$$

Das Integral H_2 zerfällt nach geringer Umformung in drei Integrale der einfachen Typen (4) und (6):

$$H_2 = -\,x_2 z_2 \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{x_2^2+y^2+z_2^2}} + \frac{x_2^3 z_2}{2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(y^2+x_2^2)\sqrt{x_2^2+y^2+z_2^2}} +$$
$$+ \frac{x_2 z_2^3}{2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(y^2+z_2^2)\sqrt{x_2^2+y^2+z_2^2}} + (x_1)$$

und ist schließlich

$$H_2 = -x_2 z_2 \log(y_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}) + \frac{x_2^2}{2} \arctan \frac{y_2 z_2}{x_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} +$$

$$+(x_2 y_1 z_2) + (x_1 y_2 z_2) - (x_1 y_1 z_2) + \frac{z_2^2}{2} \left(\arctan \frac{x_2 y_2}{z_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \right. \tag{73}$$

$$\left. - (x_2 y_1) - (x_1 y_2) + (x_1 y_1) \right)$$

Die partielle Integration des Integrals J in (71) ergibt einen fertigen Term J_1 und ein Integral J_2 , das in mehrere schon berechnete Normaltypen zerfällt.

Unter Beachtung von (37) ist

$$J_1 = \frac{y_2^2}{2} \arctan \frac{x_2 z_2}{y_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - (x_1 y_2 z_2) - (x_2 y_1 z_1) + (x_1 y_1 z_1) \tag{74}$$

Mit den in den Formeln (42), (43), (45), (47) und (68), beziehungsweise (70) eingeführten abkürzenden Bezeichnungsweisen T_8, T_9 , T_{10} , T_{11} und G für die betreffenden Normaltypen wird

$$J_2 = \frac{x_2 z_0 (2+a^2)}{2\ (1+a^2)} T_8 + \frac{a\ x_2}{2} T_9 - \frac{x_2 z_0^3}{2\ (1+a^2)} T_{10} - \frac{a\ x_2 z_0^2}{1+a^2} T_{11} - \frac{1}{2} G$$

oder explizit angeschrieben

$$J_2 = \frac{x_2 z_0}{(\sqrt{1+a^2})^3} \log (y_2 + a\ z_2 + \sqrt{1+a^2} \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2})$$

$$+ \frac{a\ z_0^2}{(1+a^2)^2} \log (x_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}) - \frac{(1-a^2)\ z_0^2}{2\ (1+a^2)^2} \arctan \frac{x_2 (y_2 + a\ z_2)}{z_0 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \tag{75}$$

$$+ \frac{a\ x_2^2}{2\ (1+a^2)} \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2} - \frac{x_2^2}{2} \arctan \frac{y_2 z_0 - a\ x_2^2}{x_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} -$$

$$- (x_2 y_1 z_1) - (x_1 y_2 z_2) + (x_1 y_1 z_1)$$

Die Zusammenziehung von (72), (73), (74) und (75) liefert den Teil III_2 von (49). Damit ist die Integration des Potentials V des dreikantigen Prismas beendet. Wenn man die Teilergebnisse (39), (40), (44), (48), (50), (51), (53), (70), (72), (73), (74), und (75) zusammenfaßt, erhält man für das Potential V den geschlossenen Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k^2\delta}\,V = {} & y_2 z_2 \log(x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}) - y_1 z_2 \log(x_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}) + \\
& + x_2 z_2 \log\frac{y_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{y_1+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - x_2 y_1 \log\frac{z_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}{z_1+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} + \\
& + \frac{z_0^2}{2a\,(1+a^2)} \log\frac{x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{x_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} - \frac{z_2^2}{2a}\log(x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}) + \\
& + \frac{z_1^2}{2a}\log(x_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}) - \frac{x_2 z_0}{\sqrt{1+a^2}}\log\frac{y_2+a\,z_2+\sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{y_1+a\,z_1+\sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} - \\
& - \frac{z_2^2}{2}\left(\arctan\frac{x_2 y_2}{z_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \arctan\frac{x_2 y_1}{z_2\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}\right) \\
& - \frac{x_2^2}{2}\left(\arctan\frac{y_2 z_2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \arctan\frac{y_1 z_2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}\right) + \\
& + \frac{y_1^2}{2}\left(\arctan\frac{x_2 z_2}{y_1\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - \arctan\frac{x_2 z_1}{y_1\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}\right) + \\
& + \frac{z_0^2}{2\,(1+a^2)}\left(\arctan\frac{x_2(y_2+a\,z_2)}{z_0\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \arctan\frac{x_2(y_1+a\,z_1)}{z_0\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}\right) + \\
& + \frac{x_2^2}{2}\left(\arctan\frac{y_2 z_0 - a\,x_2^2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \arctan\frac{y_1 z_0 - a\,x_2^2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}\right) - (x_1)
\end{aligned}
\tag{76}
$$

Das Symbol $-(x_1)$ bedeutet, wie schon gesagt, daß von der gesamten, vorausgehenden und mit x_2 geschriebenen Form eine gleiche, aber in x_1 geschriebene, abzuziehen ist.

Bezüglich des Ersatzes der natürlichen Logarithmen durch

AREA SINUS

sei auf (12 und (42) verwiesen.

2.) Die ersten Ableitungen des Potentials eines endlichen dreiseitigen Prismas.

$$\frac{1}{k^2\delta} V_x = -\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_0+ay}^{z_2} dz \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx\, x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$$

gibt nach x integriert

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_0+ay}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{x_2^2+y^2+z^2}} - (x_1)$$

und weiter nach z

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \log(z_2+\sqrt{x_2^2+y^2+z_2^2}) - \int_{y_1}^{y_2} dy \log(z_0+a\,y+\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\,y)^2}) - (x_1)$$

Dieser Ausdruck ist von der gleichen Form wie (49a) des vorigen Abschnittes. Daher ist

(77)
$$\begin{aligned}\frac{1}{k^2\delta} V_x = &- y_1 \log \frac{z_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}{z_1+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} + z_2 \log \frac{y_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{y_1+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - \\ &- \frac{z_0}{\sqrt{1+a^2}} \log \frac{y_2+a\,z_2+\sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{y_1+a\,z_1+\sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} \\ &- x_2\left(\arctan \frac{y_2\,z_2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \arctan \frac{y_1\,z_2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}\right) \\ &+ x_2\left(\arctan \frac{y_2\,z_0 - a\,x_2^2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \arctan \frac{y_1\,z_0 - a\,x_2^2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}\right) + (x_1)\end{aligned}$$

Bei der Berechnung von V_y sind die Beziehungen (36) und (37):

(78)
$$\frac{z-z_0}{a} = y, \quad \frac{z_2-z_0}{a} = y_2, \quad \frac{z_1-z_0}{a} = y_1$$

zu beachten.

$$\frac{1}{k^2\delta} V_y = -\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{y_1}^{\frac{z-z_0}{a}} \frac{dy\, y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$$

gibt nach y integriert

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} dz \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2+\left(\frac{z-z_0}{a}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y_1^2+z^2}} \right)$$

und nach x

(79) $$= \int_{z_1}^{z_2} dz\ \log\left(x_2+\sqrt{x_2^2+z^2+\left(\frac{z-z_0}{a}\right)^2}\right) - \int_{z_1}^{z_2} dz\ \log(x_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z^2}) -$$

$$- (x_1) = \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

Partielle Integration verwandelt I in einen Term A und ein Integral B. Unter Beachtung von (78) ist

(80) $$A = z_2 \log(x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}) - z_1 \log(x_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}) - (x_1)$$

Das Integral B besteht aus zwei Teilen

$$B = -\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz\ z\left[z+\frac{z-z_0}{a}\right]}{z^2+\left(\frac{z-z_0}{a}\right)^2} + x_2\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz\ z\left[z+\frac{z-z_0}{a}\right]}{\left[z^2+\left(\frac{z-z_0}{a}\right)^2\right]\sqrt{x_2^2+z^2+\left(\frac{z-z_0}{a}\right)^2}} + (x_1)$$

Der erste Teil ist von x_2 unabhängig und hebt sich gegen einen gleichartigen mit entgegengesetztem Zeichen weg.

In das zweite Integral führen wir ein

(81) $$u = z - \frac{z_0}{1+a^2} \qquad \xi = \frac{a\ x_2}{\sqrt{1+a^2}} \qquad \zeta = \frac{a\ z_0}{1+a^2}$$

wodurch es in drei Summanden C + D + E zerfällt, die ähnlich T_8 (42), T_{12} (46) und T_{10} (45) gebaut sind. Es sind unter Rückbildung von (81)

(82) $$C = \frac{a\ x_2}{\sqrt{1+a^2}}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+\xi^2+\zeta^2}} - (x_1) = \frac{a\ x_2}{\sqrt{1+a^2}} \log\frac{y_2+a\ z_2+\sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{y_1+a\ z_1+\sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}$$

$$- (x_1)$$

(83) $$D = \frac{a\ x_2 z_0}{(\sqrt{1+a^2})^3}\int \frac{du\ u}{(u^2+\zeta^2)\sqrt{u^2+\xi^2+\zeta^2}} - (x_1) =$$

$$= -\frac{z_0}{1+a^2} \log\frac{x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{x_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} + (x_1)$$

$$E = -\frac{a^3 x_2 z_0}{(\sqrt{1+a^2})^5}\int \frac{du}{(u^2+\zeta^2)\sqrt{u^2+\xi^2+\zeta^2}} + (x_1) =$$

$$= \frac{a\ z_0}{1+a^2}\left\{\arctan\frac{x_2(y_2+a\ z_2)}{z_0\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - (x_2 y_1 z_1) - (x_1 y_2 z_2) + (x_1 y_1 z_1)\right\}$$

Damit ist das Integral I von (79) ausgewertet.

Der Teil II von (79) gibt partiell integriert einen fertig integrierten Term F und ein Integral G. Es ist

$$(85)\qquad F = -z_2\log(x_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}) + (x_2y_1z_1) + (x_1y_1z_2) - (x_1y_1z_1)$$

Das Integral

$$G = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz\; z^2}{(x_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z^2})\sqrt{x_2^2+y_1^2+z^2}} - (x_1)$$

ist als Type T_3 in (8) berechnet, daher ist

$$(86)\qquad G = -x_2\log(z_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}) + y_1\arctan\frac{x_2z_2}{y_1\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} +$$

$$+ (x_2z_1) + (x_1z_2) - (x_1z_1)$$

Die Addition von (80), (82), (83), (84), (85) und (86) gibt

$$\frac{1}{k^2\delta}V_y = z_2\log\frac{x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{x_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - x_2\log\frac{z_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}{z_1+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} +$$

$$(87)\qquad + \frac{a\,x_2}{\sqrt{1+a^2}}\log\frac{y_2+a\,z_2+\sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{y_1+a\,z_1+\sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - \frac{z_0}{1+a^2}\log\frac{x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{x_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} +$$

$$+ y_1\left(\arctan\frac{x_2z_2}{y_1\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - \arctan\frac{x_2z_1}{y_1\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}\right) -$$

$$- \frac{a\,z_0}{1+a^2}\left(\arctan\frac{x_2(y_2+a\,z_2)}{z_0\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \arctan\frac{x_2(y_1+a\,z_1)}{z_0\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}\right) - (x_1)$$

Durch aufeinander folgende Integrationen nach z und x wird

$$\frac{1}{k^2\delta}V_z = -\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1}^{y_2}dy\int_{z_0+ay}^{z_2}\frac{dz\;z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$$

zu

$$\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1}^{y_2}dy\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z_0+a\,y)^2}}\right) =$$

$$= \int_{y_1}^{y_2}dy\,\log(x_2+\sqrt{x_2^2+y^2+z_2^2}) - \int dy\,\log\left(x_2+\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\,y)^2}\right) -$$

$$- (x_1) = I + II$$

Diese zwei Integrale werden wie im Vorigen durch partielle Integration gelöst.

Es ist

$$I = H + J$$

worin

$$(88)\qquad H = y_2\log(x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}) - (x_2y_1z_2) - (x_1y_2z_2) + (x_1y_1z_2)$$

und

$$J = -\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\ y^2}{(x_2+\sqrt{x_2^2+y^2+z_2^2})\sqrt{x_2^2+y^2+z_2^2}} + (x_1)$$

das nach (8) berechnet wird als

(89) $$J = x_2\log(y_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}) - z_2\arctan\frac{x_2 y_2}{z_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} -$$

$$-(x_2y_1) - (x_1y_2) + (x_1y_1)$$

Damit ist I berechnet.

II zerfällt durch Integratio per partes in die zwei Teile K und L.

Sie sind

(90) $$K = -y_2\log(x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}) + (x_2y_1) + (x_1y_2) - (x_1y_1)$$

und

$$L = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\ y\ [y+a(z_0+a\ y)]}{[x_2+\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\ y)^2}]\ \sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\ y)^2}} - (x_1)$$

Durch Einführung der Substitution (41) wird

$$L = -\xi\int\frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2}} + \xi\zeta\int\frac{d\eta\ \eta}{(\eta^2+\zeta^2)\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2}} + \xi\zeta^2\int\frac{d\eta}{(\eta^2+\zeta^2)\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2}} +$$

$$+ (x_1)$$

Diese drei Integrale sind unter (42), (46) und (45) berechnet. Mit Rücksicht auf (37), das die Grenzen von y und z auf der schrägen Fläche des Prismas verbindet, wird

$$L = -\frac{x_2}{\sqrt{1+a^2}}\log(y_2+a\ z_2+\sqrt{1+a^2}\ \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2})$$

(91) $$-\frac{a\ z_0}{1+a^2}\log(x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}) + \frac{z_0}{1+a^2}\arctan\frac{x_2(y_2+a\ z_2)}{z_0\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} +$$

$$+(x_2y_1z_1) + (x_1y_2z_2) - (x_1y_1z_1)$$

Die Summe von (88), (89), (90) und (91) gibt

$$\frac{1}{k^2\delta} V_z = -y_1 \log \frac{x_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}{x_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} + x_2 \log \frac{y_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{y_1+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} -$$

$$-\frac{x_2}{\sqrt{1+a^2}} \log \frac{y_2+a\ z_2+\sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{y_1+a\ z_1+\sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} - \frac{a\ z_0}{1+a^2} \log \frac{x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{x_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} -$$

$$-z_2\left(\arctan \frac{x_2 y_2}{z_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \arctan \frac{x_2 y_1}{z_2\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}\right) +$$

$$+\frac{z_0}{1+a^2}\left(\arctan \frac{x_2(y_2+a\ z_2)}{z_0\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \arctan \frac{x_2(y_1+a\ z_1)}{z_0\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}\right) + (x_1)$$

3.) Die zweiten Ableitungen des Potentials eines endlichen dreiseitigen Prismas.

In

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{xy} = 3\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{y_1}^{\frac{z-z_0}{a}} \frac{dy\ x\ y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} = -\int_{z_1}^{z_2} dz \int_{y_1}^{\frac{z-z_0}{a}} \frac{dy\ y}{(\sqrt{x_2^2+y^2+z^2})^3} +$$

$$+ (x_1) = \int_{z_1}^{z_2} \cdot \frac{dz}{\sqrt{x_2^2+z^2+\left(\frac{z-z_0}{a}\right)^2}} - \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z^2}} - (x_1) = I + II$$

verwandelt sich I mit Hilfe der Substitutionen (81) in die Type (82)

$$I = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \int \frac{du}{\sqrt{u^2+\xi^2+\zeta^2}} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \log(y_2+a\ z_2+\sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}) -$$

$$-(x_2 y_1 z_1) - (x_1 y_2 z_2) + (x_1 y_1 z_1)$$

und II ist ein Logarithmus, sodaß man erhält

(92) $$\frac{1}{k^2\delta} V_{xy} = -\log \frac{z_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}{z_1+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} + \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \log \frac{y_2+a\ z_2+\sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{y_1+a\ z_1+\sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} + (x_1)$$

Ebenso berechnet sich

$$\frac{1}{k^2\delta}\,V_{xz} = 3\int_{x_1}^{x_2} dx\int_{y_1}^{y_2} dy\int_{z_0+ay}^{z_2}\frac{dz\;x\;z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} = -\int_{y_1}^{y_2} dy\int_{z_0+ay}^{z_2}\frac{dz\;z}{(\sqrt{x_2^2+y^2+z^2})^3} +$$

$$+(x_1) = \int_{z_1}^{z_2}\frac{dy}{\sqrt{x_2^2+y^2+z_2^2}} - \int_{z_1}^{z_2}\frac{dy}{\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\;y)^2}} - (x_1)$$

Das erste Integral ist ein Logarithmus, das zweite ist die Type T_8 (42), daher ist

$$(93)\qquad \frac{1}{k^2\delta}\,V_{xz} = \log\frac{y_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{y_1+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\log\frac{y_2+a\;z_2+\sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{y_1+a\;z_1+\sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} -$$

$$- (x_1)$$

In

$$\frac{1}{k^2\delta}\,V_{yz} = 3\int_{x_1}^{x_2} dx\int_{y_1}^{y_2} dy\int_{z_0+ay}^{z_2}\frac{d\;z\;\;y\;z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} = -\int_{x_1}^{x_2} dx\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy\;y}{(\sqrt{x^2+y^2+z_2^2})^3} +$$

$$+\int_{x_1}^{x_2} dx\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy\;y}{\left(\sqrt{x^2+y^2+(z_0+ay)^2}\right)^3} = I + II$$

integriert man I zuerst nach y und erhält

$$I = \int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2}} - (y_1) = \log\frac{x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{x_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - (x_1)$$

II gibt nach x integriert zufolge T_4 (19)

$$II = x_2\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy\;\;y}{[y^2+(z_0+a\;y)^2]\;\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\;y)^2}}$$

das bereits als T_{11} (47) bekannte Resultat, daher ist

$$(94)\qquad \frac{1}{k^2\delta}\,V_{yz} = \log\frac{x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{x_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - \frac{1}{1+a^2}\log\frac{x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{x_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} -$$

$$-\frac{a}{1+a^2}\left(\arctan\frac{x_2(y_2+a\;z_2)}{z_0\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \arctan\frac{x_2(y_1+a\;z_1)}{z_0\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}\right) - (x_1)$$

Durch Integration nach x und z wird

$$\frac{1}{k^2\delta}\,V_{xx} = -\int_{x_1}^{x_2} dx\int_{y_1}^{y_2} dy\int_{z_0+ay}^{z_2}\frac{dz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} + 3\int_{x_1}^{x_2} dx\int_{y_1}^{y_2} dy\int_{z_0+ay}^{z_2}\frac{dz\;x^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} =$$

$$= -x_2\int_{y_1}^{y_2} dy\int_{z_0+ay}^{z_2}\frac{dz}{(\sqrt{x_2^2+y^2+z^2})^3} + (x_1) = -x_2 z_2\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy}{(x_2^2+y^2)\sqrt{x_2^2+y^2+z_2^2}} +$$

$$+x_2\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy\;(z_0+a\;y)}{(x_2^2+y^2)\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\;y)^2}} + (x_1)$$

Der erste Teil ist durch T_1 (6), der zweite durch G (68) und (70) schon berechnet, man hat daher

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{xx} = -\arctan\frac{y_2 z_2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + \arctan\frac{y_1 z_2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} + \tag{95}$$

$$+\arctan\frac{x_2 z_0 - a x_2^2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \arctan\frac{y_1 z_0 - a x_2^2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} + (x_1)$$

Integration in der Reihenfolge y und x wird angewendet auf

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yy} = -\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{y}^{\frac{z-z_0}{a}} \frac{d\,y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} + 3\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{y_1}^{\frac{z-z_0}{a}} \frac{dy\; y^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} =$$

$$= -\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{dz\,\frac{z-z_0}{a}}{\left(\sqrt{x^2+z^2+\left(\frac{z-z_0}{a}\right)^2}\right)^3} + y_1\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{d\,z}{(\sqrt{x^2+y_1^2+z^2})^3} =$$

$$= -x_2\int_{z_1}^{z_2} \frac{d\,z\;\frac{z-z_0}{a}}{\left[z^2+\left(\frac{z-z_0}{a}\right)^2\right]\sqrt{x_2^2+z^2+\left(\frac{z-z_0}{a}\right)^2}} + x_2 y_1 \int_{z_1}^{z_2} \frac{d\,z}{(y_1^2+z^2)\sqrt{x_2^2+y_1^2+z^2}} +$$

$$+ (x_1) = I + II$$

Die Substitution (81) verwandelt I in

$$I = \frac{-a\,\xi}{1+a^2}\int \frac{du\,u}{(u^2+\zeta^2)\sqrt{u^2+\xi^2+\zeta^2}} - \frac{a^2\xi\,\zeta}{1+a^2}\int \frac{du}{(u^2+\zeta^2)\sqrt{u^2+\xi^2+\zeta^2}} +$$

$$+ (x_1)$$

deren Lösungen schon in (83) und (84) vorliegen.

II ist durch T_1 (6) bekannt. Also ist

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yy} = \frac{a}{1+a^2}\log\frac{x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{x_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} + \arctan\frac{x_2 z_2}{y_1\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} -$$

$$-\arctan\frac{x_2 z_1}{y_1\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} + \frac{a^2}{1+a^2}\left(\arctan\frac{x_2(y_2+a\,z_2)}{z_0\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \arctan\frac{x_2(y_1+a\,z_1)}{z_0\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}\right) - \tag{96}$$

$$- (x_1)$$

Schließlich erhält man durch Integration nach z und x:

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{zz} = -\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_0+ay}^{z_2} \frac{dz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} + 3\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_0+ay}^{z_2} \frac{dz\; z^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} =$$

$$= -z_2\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(\sqrt{x^2+y^2+z_2^2})^3} + \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\,(z_0+a\,y)}{(\sqrt{x^2+y^2+(z_0+a\,y)^2})^3} =$$

$$= -x_2 z_2 \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(y^2+z_2^2)\sqrt{x_2^2+y^2+z_2^2}} + x_z \int_{y_1}^{y_2} \frac{d\,y\,(z_0+a\,y)}{\left[y^2+(z_0+a\,y)^2\right]\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\,y)^2}} +$$

$$+ (x_1)$$

Der erste Teil wird durch (6) gelöst, der zweite durch (45) und (47), womit folgt

$$(97) \qquad \frac{1}{k^2\delta} V_{zz} = -\frac{a}{1+a^2} \log \frac{x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{x_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} -$$

$$-\left(\arctan \frac{x_2 y_2}{z_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \arctan \frac{x_2 y_1}{z_2\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{1+a^2}\left(\arctan \frac{x_2(y_2+a\,z_2)}{z_0\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \arctan \frac{x_2(y_1+a\,z_1)}{z_0\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}\right) + (x_1)$$

Die Laplace'sche Gleichung.

Zum Beweis, daß die Formeln im Außenraum die Laplace'sche Gleichung

$$\Delta V = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$$

erfüllen, brauchen wir nur in den vorausgehenden Ausdrücken (95), (96) und (97) die Arcustangenten mittels ihres Additionstheorems

$$(98) \qquad \arctan u \pm \arctan v = \arctan \frac{u \pm v}{1 \mp uv}$$

zusammen zu ziehen, da die logarithmischen Terme sich wegheben. Es ist

$$\frac{1}{k^2\delta} \Delta V = -\arctan \frac{y_2 z_2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + \arctan \frac{y_1 z_2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} -$$

$$-\arctan \frac{x_2 y_2}{z_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + \arctan \frac{x_2 y_1}{z_2\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} +$$

$$+\arctan \frac{x_2 z_2}{y_1\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - \arctan \frac{x_2 z_1}{y_1\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} +$$

$$+\arctan \frac{x_2(y_2+a\,z_2)}{z_0\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \arctan \frac{x_2(y_1+a\,z_1)}{z_0\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} +$$

$$+ \arctan \frac{y_2 z_0 - a x_2^2}{x_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \arctan \frac{y_1 z_0 - a x_2^2}{x_2 \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} + (x_1)$$

Der erste und dritte Term ergeben nach (98) zusammen

$$- \arctan \frac{y_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{x_2 z_2}$$

welcher Ausdruck mit der siebenten Arcustangente verbunden unter Benützung von

$$z_0 = z_2 - a y_2$$

die Summe

$$- \arctan \frac{y_2 z_0 - a x_2^2}{x_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

liefert, die sich mit der neunten Arcustangente aufhebt. Die Addition der 2., 4., 5., 8. und 10. Terme führt durch sukzessive Anwendung von (98) auf

$$- \arctan \frac{y_1 \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}{x_2 z_1} = - \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x_2 z_1}{y_1 \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}$$

Wird dieser Ausdruck mit dem 6. Term zusammengefügt, so bleibt $-\frac{\pi}{2}$. Wenn wir den zweiten mit x_1 beschriebenen Teil auf dieselbe Weise zusammenziehen, resultiert $+\frac{\pi}{2}$, so daß also im Außenraum die Laplace'sche Gleichung erfüllt ist.

Durch eine ähnliche Überlegung läßt sich zeigen, daß die Formeln bezüglich eines ganz im Innern des Prismas gelegenen Punktes der Poisson'schen Gleichung

$$\Delta V = - 4 \pi k^2 \delta$$

genügen.

4.) Die dritten Ableitungen des Potentials eines endlichen dreiseitigen Prismas.

In

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{xyz} = -15 \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_0+ay}^{z_2} \frac{dz\ x\ y\ z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^7} = 3 \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_0+ay}^{z_2} \frac{dz\ y\ z}{(\sqrt{x_2^2+y^2+z^2})^5} -$$

$$-(x_1) = -\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\ y}{(\sqrt{x_2^2+y^2+z_2^2})^3} + \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\ y}{(\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\ y)^2})^3} + (x_1) = I + II$$

ist das erste Integral unmittelbar:

$$I = \frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - (x_2y_1) - (x_1y_2) + (x_1y_1)$$

Das zweite wird mit der Substitution (41) verwandelt:

$$II = \frac{1}{(\sqrt{1+a^2})^3} \int \frac{d\eta\,\eta}{(\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2})^3} - \frac{a\ z_0}{(\sqrt{1+a^2})^5} \int \frac{d\eta}{(\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2})^3} =$$

$$= -\frac{1}{(\sqrt{1+a^2})^3} \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}} - \frac{a\ z_0}{(\sqrt{1+a^2})^5} \frac{1}{\xi^2+\zeta^2} \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}$$

wobei der zweite Teil nach (19) berechnet ist. Durch Rückführung von (41) wird

(99')
$$II = -\frac{1}{1+a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}\right) -$$

$$-\frac{a\ z_0}{1+a^2} \frac{1}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2} \left(\frac{y_2+a\ z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \frac{y_1+a\ z_1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} \right) + (x_1)$$

Zusammengefaßt ist.

(100)
$$\frac{1}{k^2\delta} V_{xyz} = \frac{a^2}{1+a^2} \frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} + \frac{1}{1+a^2} \frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} -$$

$$-\frac{a\ z_0}{1+a^2} \frac{1}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2} \left(\frac{y_2+a\ z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \frac{y_1+a\ z_1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} \right) - (x_1)$$

Die folgende dritte Ableitung wird zuerst nach y integriert:

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{xxy} = 3 \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{y_1}^{\frac{z-z_0}{a}} \frac{dy\ y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} - 15 \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{y_1}^{\frac{z-z_0}{a}} \frac{dy\ y\ x^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^7} =$$

$$= - \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\left(\sqrt{x_2^2+z^2+\left(\frac{z-z_0}{a}\right)^2}\right)^3} + 3 \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz\ x^2}{\left(\sqrt{x^2+z^2+\left(\frac{z-z_0}{a}\right)^2}\right)^5} +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(\sqrt{x^2+y_1^2+z_2^2})^3} - 3 \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz\ x^2}{(\sqrt{x^2+y_1^2+z^2})^5} = \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

Das Paar I ergibt bezüglich x integriert und hierauf mittels der Substitutionen (81) in die Normaltype (19) überführt

$$\text{(101)} \qquad \mathrm{I} = - x_2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\left(\sqrt{x^2+z^2+\left(\frac{z-z_0}{a}\right)^2}\right)^3} + (x_1) = - \frac{a^3 x_2}{(\sqrt{1+a^2})^3} \int \frac{du}{(\sqrt{u^2+\xi^2+\zeta^2})^3} +$$

$$+(x_1) = - \frac{a\ x_2}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2} \frac{y_2 + a\ z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + (x_2 y_1 z_1) + (x_1 y_2 z_2) -$$

$$- (x_1 y_1 z_1)$$

Die Berechnung von II erfolgt unmittelbar

$$\mathrm{II} = x_2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(\sqrt{x_2^2+y_1^2+z^2})^3} - (x_1) = \frac{x_2}{x_2^2+y_1^2} \frac{z_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - (x_2 y_1 z_1) -$$

$$- (x_1 y_1 z_2) + (x_1 y_1 z_1)$$

Daher ist

$$\text{(102)} \qquad \frac{1}{k^2\delta} V_{xxy} = \frac{x_2}{x_2^2+y_1^2} \left(\frac{z_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} \right) -$$

$$- \frac{a\ x_2}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2} \left(\frac{y_2 + a\ z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \frac{y_1 + a\ z_1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} \right) - (x_1)$$

In gleicher Weise geht die folgende Rechnung mit Hilfe der Substitutionen (41) vor sich

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{xxz} = 3 \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_0+ay}^{z_2} \frac{dz\ z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} - 15 \int_{y_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_0+ay}^{z_2} \frac{dz\ x^2 z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^7} =$$

$$= - \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(\sqrt{x^2+y^2+z_2^2})^3} + 3 \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{x_1}^{y_2} \frac{dy\ x^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z_2^2})^5} +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{x_2} \frac{dy}{(\sqrt{x^2+y^2+(z_0+a\ y)^2})^3} - 3 \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\ x^2}{(\sqrt{x^2+y^2+(z_0+a\ y)^2})^5} =$$

$$= -x_2 \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(\sqrt{x_2^2+y^2+z_2^2})^3} + x_2 \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\ y)^2})^3} + (x_1) = \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

$$\mathrm{I} = - \frac{x_2}{x_2^2+z_2^2} \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + (x_2 y_1 z_2) + (x_1 y_2 z_2) - (x_1 y_1 z_2)$$

$$II = \frac{x_2}{(\sqrt{1+a^2})^3}\int\frac{d\eta}{(\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2})^3} = \frac{x_2}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2}\;\frac{y_2+a\,z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} -$$

$$-(x_2y_1z_1)-(x_1y_2z_2)+(x_1y_1z_1)$$

Damit wird

(103) $$\frac{1}{k^2\delta}\,V_{xxz} = -\frac{x_2}{x_2^2+z_2^2}\left(\frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}-\frac{y_1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}\right)+$$

$$+\frac{x_2}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2}\left(\frac{y_2+a\,z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}-\frac{y_1+a\,z_1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}\right)+(x_1)$$

In der Berechnung der folgenden Ableitung begegnet uns die neue Type

$$T_{13} = \int_{z_1}^{z_2}\frac{dz\;z}{\left(\sqrt{x_2^2+z^2+(\frac{z-z_0}{a})^2}\right)^3} - (x_1)$$

Mit der Substitution (81) wird sie transformiert in

$$-\frac{a^3}{(\sqrt{1+a^2})^3}\int\frac{du\;u}{(\sqrt{u^2+\xi^2+\zeta^2})^3} + \frac{a^3\;z_0}{(\sqrt{1+a^2})^5}\int\frac{du}{(\sqrt{u^2+\xi^2+\zeta^2})^3} + (x_1)$$

daher ist nach Rückkehr zu den ursprünglichen Veränderlichen

(104) $$T_{13} = -\frac{a^2}{1+a^2}\;\frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}+\frac{a\,z_0}{1+a^2}\;\frac{1}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2}\;\frac{y_2+a\,z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} -$$

$$-(x_2y_1z_1)-(x_1y_2z_2)+(x_1y_1z_1)$$

In

$$\frac{1}{k^2\delta}\,V_{xyy} = 3\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{z}^{z_2}dz\int_{y_1}^{\frac{z-z_0}{a}}\frac{dy\;x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} - 15\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{z_1}^{z_2}dz\int_{y_1}^{\frac{z-z_0}{a}}\frac{dy\;x\;y^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^7} =$$

$$= -\int_{z_1}^{z_2}dz\int_{y_1}^{\frac{z-z_0}{a}}\frac{dy}{(\sqrt{x_2^2+y^2+z^2})^3}+3\int_{z_1}^{z_2}dz\int_{y_1}^{\frac{z-z_0}{a}}\frac{dy\;y^2}{(\sqrt{x_2^2+y^2+z^2})^5}+(x_1) =$$

$$= -\int_{z_1}^{z_2}\frac{d\,z\,\frac{z-z_0}{a}}{\left(\sqrt{x_2^2+z^2+(\frac{z-z_0}{a})^2}\right)^3}+y_1\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{(\sqrt{x_2^2+y_1^2+z^2})^3}+(x_1) = I + II$$

ist I mittels (104) und (101) zu lösen, II durch (19), daher ist

(105) $$\frac{1}{k^2\delta}\,V_{xyy} = \frac{y_1}{x_2^2+y_1^2}\left(\frac{z_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}-\frac{z_1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}\right)+$$

$$+\frac{a}{1+a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}-\frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}\right)+\frac{a^2z_0}{1+a^2}\;\frac{1}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2}\left(\frac{y_2+a\,z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{y_1+a\,z_1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}\right)-(x_1)$$

Die Berechnung einer neuen Type verlangt auch

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{xzz} = 3\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_0+ay}^{z_2} \frac{dz\ x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} - 15\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_0+ay}^{z_2} \frac{dz\ x\ z^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^7} =$$

$$= -\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_0+ay}^{z_2} \frac{dz}{(\sqrt{x_2^2+y^2+z^2})^3} + 3\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_0+ay}^{z_2} \frac{dz\ z^2}{(\sqrt{x_2^2+y^2+z^2})^5} - (x_1) =$$

$$= -z_2 \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(\sqrt{x_2^2+y^2+z_2^2})^3} + 3\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\ (z_0+a\ y)}{(\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\ y)^2})^3} = I + II$$

Darin ist nach (19)

$$I = -\frac{z_2}{x_2^2+z_2^2}\ \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + (x_2 y_1 z_2) + (x_1 y_2 z_2) - (x_1 y_1 z_2)$$

und II wird gelöst durch (99), beziehungsweise (99') und die neue Type

$$T_{14} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(\sqrt{x_2^2+y^2+(z_0+a\ y)^2})^3} - (x_1)$$

Mittels der Substitutionen (41) wird

$$T_{14} = \frac{1}{(\sqrt{1+a^2})^3} \int \frac{d\eta}{(\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2})^3}$$

das nach (19) und Rückverwandlung gemäß (41) wird

(106) $$T_{14} = \frac{1}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2}\ \frac{y_2+a\ z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - (x_2 y_1 z_1) - (x_1 y_2 z_2) + (x_1 y_1 z_1)$$

womit folgt

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{xzz} = -\frac{z_2}{x_2^2+z_2^2}\left(\frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \frac{y_1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}\right) - \frac{a}{1+a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}\right) + \frac{z_0}{1+a^2}\ \frac{1}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2}\left(\frac{y_2+a\ z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \frac{y_1+a\ z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}\right) + (x_1)$$

Längere Behandlung erfordert die nächste dritte Ableitung

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yyz} = 3\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_0+ay}^{z_2} \frac{dz\ z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} - 15\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_0+ay}^{z_2} \frac{dz\ y^2 z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^7} =$$

$$= -\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(\sqrt{x^2+y^2+z_2^2})^3} + 3\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\ y^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z_2^2})^5} +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(\sqrt{x^2+y^2+(z_0+a\ y)^2})^3} - 3\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\ y^2}{(\sqrt{x^2+y^2+(z_0+a\ y)^2})^5}$$

$$= I + II$$

Das Paar I berechnet sich einfach als

$$I = -\,y_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2})^3} + (y_1\, z_2)$$

und nach (19)

(107) $$I = -\frac{y_2}{y_2^2+z_2^2}\;\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + \frac{y_1}{y_1^2+z_2^2}\;\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} + (x_1)$$

Auf das Paar II wendet man die Substitutionen (41) an und trennt darin den Teil der Form

$$-\int \frac{d\eta}{(\sqrt{\eta^2+k})^3} + 3\int \frac{d\eta.\eta^2}{(\sqrt{\eta^2+k})^5} = \frac{-\eta}{(\sqrt{\eta^2+k})^3}$$

ab und behandelt das Übrigbleibende für sich

$$II = \frac{1}{(\sqrt{1+a^2})^5}\left\{\int dx \int \frac{d\eta}{(\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2})^3} - 3\int dx \int \frac{d\eta\,\eta^2}{(\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2})^5}\right\} +$$

$$+ \frac{a^2}{(\sqrt{1+a^2})^5}\int dx \int \frac{d\eta}{(\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2})^3} + \frac{6\,a\,\zeta}{(\sqrt{1+a^2})^5}\int dx \int \frac{d\eta\,\eta}{(\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2})^5} -$$

$$- \frac{3\,a^2\zeta^2}{(\sqrt{1+a^2})^5}\int dx \int \frac{d\eta}{(\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2})^5} = A + B + C + D$$

Die zwei ersten unter A zusammengefaßten Integrale ergeben nach Integration hinsichtlich η und Rücksubstitution (41) und kurzer Zusammenfassung

$$A = \frac{y_2+a\;z_2}{(1+a^2)^2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2})^3} - (y_1\, z_1)$$

und weiter nach (19)

(108) $$A = \frac{x_2}{(1+a^2)^2}\left(\frac{1}{y_2^2+z_2^2}\;\frac{y_2+a\;z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \frac{1}{y_1^2+z_1^2}\;\frac{y_1+a\;z_1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}\right) - (x_1)$$

Anwendung von (19) auf das dritte Integral gibt mit Rückverwandlung von (41)

$$B = \frac{a^2\,(y_2+a\;z_2)}{(1+a^2)^2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\left(x^2+\frac{z_0^2}{1+a^2}\right)\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2}} - (y_1\, z_1)$$

Mittels der Substitution

(109) $$x = \sqrt{y_2^2+z_2^2}\,\tan\varphi$$

und kurzer Umformung mit Zuhilfenahme von (37) wird

$$B = \frac{a^2 (y_2+a\ z_2)}{1+a^2} \int \frac{d\varphi \cos\varphi}{(y_2+a\ z_2)^2 \sin^2\varphi + z_0^2} - (y_1 z_1)$$

und schließlich

(110) $$B = \frac{a^2}{(1+a^2)z_0} \arctan \frac{y_2+a\ z_2}{z_0} \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} -$$

$$- (x_2 y_1 z_1) - (x_1 y_2 z_2) + (x_1 y_1 z_1)$$

Das vierte Integral C ergibt nach η integriert

$$C = - \frac{2\ a\ z_0}{(1+a^2)^2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2})^3} + (y_1 z_1)$$

und nach (19)

(111) $$C = - \frac{2\ a\ z_0}{(1+a^2)^2} \frac{1}{y_2^2+z_2^2} \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \Bigg| + (x_2 y_1 z_1) + (x_1 y_2 z_2) -$$

$$- (x_1 y_1 z_1)$$

Das letzte Integral D gehört dem schon berechneten Typus T_5 (26) an, dem man hier eine andere Form gibt, die für spätere Rechnung geeigneter ist, nämlich

(112) $$T_5 = \int \frac{du}{(\sqrt{u^2+m})^5} = \frac{2}{3\ m^2} \frac{u}{\sqrt{u^2+m}} + \frac{1}{3\ m} \frac{u}{(\sqrt{u^2+m})^3}$$

Damit wird nach kurzer Rechnung mittels (41)

(113) $$D = - \frac{2\ a^2 z_0^2}{(1+a^2)^3} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx\ (y_2+a\ z_2)}{(x^2+\frac{z_0^2}{1+a^2})^2 \sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2}} - \frac{a^2 z_0^2}{(1+a^2)^3} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx\ (y_2+a\ z_2)}{(x^2+\frac{z_0^2}{1+a^2})(\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2})^3}$$

$$= E + F$$

E und F sind zwei neue Integrale. Mit der Substitution (109) und

(114) $\sin\varphi = t$

wird E zu

$$E = - \frac{2\ a^2 z_0^2}{1+a^2} (y_2+a\ z_2) \int \frac{dt\ (1-t^2)}{[(y_2+a\ z_2)^2 t^2 + z_0^2]^2}$$

Dies wird gelöst durch das elementare Integral

$$(115)\qquad p^2 q \int \frac{dt\ (1-t^2)}{(p^2+q^2t^2)^2} = \frac{q^2-p^2}{2\,p\,q^2} \arctan \frac{q\ t}{p} + \frac{p^2+q^2}{2\ q}\ \frac{t}{p^2+q^2t^2}$$

Damit und nach Rückführung der Substitutionen (114) und (109) wird

$$(116)\qquad E = -\frac{a^2}{1+a^2}\ \frac{(y_2+a\ z_2)^2 - z_0^2}{z_0\,(y_2+a\ z_2)^2} \arctan \frac{y_2+\ a\ z_2}{z_0}\ \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} -$$

$$- \frac{a^2}{y_2+a\,z_2}\ \frac{x_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2} + (x_2y_1\,z_1) + (x_1y_2z_2) - (x_1y_1\,z_1)$$

Mittels der Substitutionen (109) und (114) wird

$$F = -\frac{a^2z_0^2\ (y_2+a\ z_2)}{(1+a^2)^2\,(y_2^2+z_2^2)} \int \frac{dt\ (1-t^2)}{(y_2+\ a\ z_2)^2t^2+z_0^2} + (y_1z_1)$$

und weiter wegen

$$(117)\qquad T_{15} = \int \frac{dt\ (1-t^2)}{a^2+b^2t^2} = \frac{-t}{b^2} + \frac{a^2+b^2}{a\ b^3} \arctan \frac{b\ t}{a} \qquad \text{wird}$$

$$(118)\qquad F = -\frac{a^2z_0}{(1+a^2)^2\,(y_2^2+z_2^2)} \left[1 + \frac{z_0^2}{(y_2+\ a\ z_2)^2}\right] \arctan \frac{y_2+a\ z_2}{z_0}\ \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} +$$

$$+ \frac{a^2z_0^2}{(1+a^2)^2}\ \frac{1}{(y_2^2+z_2^2)(y_2+a\ z_2)}\ \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - (x_2y_1\,z_1) - (x_1y_2\,z_2) +$$

$$+ (x_1y_1\,z_1)$$

In der Zusammenfassung von (107), (108), (110), (111), (116) und (118) heben sich die Arcustangensterme weg und es bleibt

$$\frac{1}{k^2\delta}\ V_{yyz} = -\frac{y_2}{y_2^2+z_2^2}\ \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + \frac{y_1}{y_1^2+z_2^2}\ \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} +$$

$$(119)\qquad + \frac{y_2^2}{(y_2^2+z_2^2)(y_2+a\ z_2)}\ \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \frac{y_1^2}{(y_1^2+z_1^2)(y_1+a\ z_1)}\ \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} -$$

$$- \frac{a^2x_2}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2} \left(\frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{y_2+a\ z_2} - \frac{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}{y_1+a\ z_1} \right) + (x_1)$$

Ganz ähnlich der vorausgehenden 3. Ableitung berechnet man

$$\frac{1}{k^2\delta}\ V_{yzz} = 3 \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{y_1}^{\frac{z-z_0}{a}} \frac{dy\ y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} - 15 \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{y_1}^{\frac{z-z_0}{a}} \frac{dy\ y\ z^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^7} =$$

$$= -\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\left(\sqrt{x^2+z^2+(\frac{z-z_0}{a})^2}\right)^3} + 3 \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz\ z^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2+(\frac{z-z_0}{a})^2}\right)^5} +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(\sqrt{x^2+y_1^2+z^2})} + 3 \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz\ z^2}{(\sqrt{x^2+y_1^2+z^2})^5} = I + II$$

Das zweite Paar wird unmittelbar

$$II = z_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(\sqrt{x^2+y_1^2+z_2^2})^3} \quad (z_1)$$

und nach (19)

$$II = \frac{z_2}{y_1^2+z_2^2} \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - \frac{z_1}{y_1^2+z_1^2} \frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} - (x_1) \tag{120}$$

Aus I wird durch Anwendung der Substitutionen (81)

$$I = - \frac{a^3}{(\sqrt{1+a^2})^3} \int_{x_1}^{x_2} dx \int \frac{du}{(\sqrt{u^2+\xi^2+\zeta^2})^3} +$$

$$+ \frac{3\ a^5}{(\sqrt{1+a^2})^5} \int dx \int \frac{du\ u^2}{(\sqrt{u^2+\xi^2+\zeta^2})^5} + \frac{6\ a^5 z_0}{(\sqrt{1+a^2})^7} \int dx \int \frac{du\ u}{(\sqrt{u^2+\xi^2+\zeta^2})^5} +$$

$$+ \frac{3\ a^5 z_0^2}{(\sqrt{1+a^2})^9} \int dx \int \frac{du}{(\sqrt{u^2+\xi^2+\zeta^2})^5} + \frac{a^5}{(\sqrt{1+a^2})^5} \int dx \int \frac{du}{(\sqrt{u^2+\xi^2+\zeta^2})^3} -$$

$$- \frac{a^5}{(\sqrt{1+a^2})^5} \int dx \int \frac{du}{(\sqrt{u^2+\xi^2+\zeta^2})^3} =$$

$$= A + B + C + D + E + F$$

Die zwei letzten Integrale E und F, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, sind hinzugefügt, um die Integration von B leichter durchzuführen. A + E geben zusammen nach u^2 integriert und nach Rückbildung der Substitutionen (81):

$$A + E = - \frac{a(y_2 + a\ z_2)}{(1+a^2)^2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2 + \frac{z_0^2}{1+a^2})\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2}} + (y_1 z_1)$$

Dieses Integral hat im vorigen Abschnitt unter B (110) seine Lösung gefunden, daher ist

$$A + E = - \frac{a}{(1+a^2)z_0} \arctan \frac{y_2 + a\ z_2}{z_0} \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + (x_2 y_1 z_1) + \tag{121}$$

$$+ (x_1 y_2 z_2) - (x_1 y_1 z_1)$$

Zusammen bezüglich u integriert, berechnet man

$$F + B = - \frac{a^5}{(\sqrt{1+a^2})^5} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx\ u}{(\sqrt{\xi^2+u^2+\zeta^2})^3}$$

und mittels Rücksubstitution nach (81) und (37)

$$F + B = -\frac{a^3(y_2+a\ z_2)}{(1+a^2)^2}\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{(\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2})^3} + (y_1 z_1)$$

was mit (19) auf

$$(122)\qquad F + B = \frac{a^3}{(1+a^2)^2}\ \frac{y_2+a\ z_2}{y_2^2+z_2^2}\ \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + (x_2 y_1 z_1) + (x_1 y_2 z_2) - (x_1 y_1 z_1)$$

führt.

Die Integration von C gibt mit (81) und (37)

$$C = -\frac{2\ a^2 z_0}{(1+a^2)^2}\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{(\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2})^3} + (y_1 z_1)$$

und weiter

$$(123)\qquad C = -\frac{2\ a^2 z_0}{(1+a^2)^2}\ \frac{1}{y_2^2+z_2^2}\ \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + (x_2 y_1 z_1) + (x_1 y_2 z_2) - (x_1 y_1 z_1)$$

Das Integral D wird mittels (112) und Rückverwandlung gemäß (81) und (37) zu

$$D = \frac{2\ a\ z_0^2}{(1+a^2)^3}\ (y_2+a\ z_2)\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\left(x^2+\frac{z_0^2}{1+a^2}\right)^2\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2}} + \frac{a\ z_0^2}{(1+a^2)^3}\ (y_2+a\ z_2)\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\left(x^2+\frac{z_0^2}{1+a^2}\right)(\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2})^3}\ (y_1 z_1)$$

und ist gleich der durch $-a$ dividierten Formel (113) von V_{yyz}, die in (116) und (118) gelöst worden ist.

Die Zusammenfassung von (120), (121), (123) und der durch $-a$ dividierten Formeln (116) und (118) gibt

$$(124)\qquad \frac{1}{k^2\delta}\ V_{yzz} = \frac{z_2}{y_1^2+z_2^2}\ \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - \frac{z_1}{y_1^2+z_1^2}\ \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} - \frac{a\ z_2^2}{(y_2^2+z_2^2)(y_2+a\ z_2)}\ \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + \frac{a\ z_1^2}{(y_1^2+z_1^2)(y_1+a\ z_1)}\ \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}} + \frac{a\ x_2}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2}\left(\frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{y_2+a\ z_2} - \frac{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}{y_1+a\ z_1}\right) - (x_1)$$

Die Arcustangensterme haben sich wieder weggehoben.

V_{xxx} bringt wieder Neues. Es ist

$$(125)\qquad \frac{1}{k^2\delta}\, V_{xxx} = 9\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{ay+z_0}^{z_2} dz \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx\; x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,)^5} - 15\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{ay+z_0}^{z_2} dz \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx\; x^3}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,)^7}$$

nach x integriert wird es

$$= -\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{ay+z_0}^{z_2} \frac{dz}{(\sqrt{x_2^2+y^2+z^2}\,)^3} + 3x_2^2\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{ay+z_0}^{z_2} \frac{dz}{(\sqrt{x_2^2+y^2+z^2}\,)^5} + (x_1)$$

Die Integration nach z erfolgt im ersten Integral nach (17), im zweiten nach (112), daher ist

$$\frac{1}{k^2\delta}\, V_{xxx} = - z_2\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(x_2^2+y^2)\sqrt{x_2^2+y^2+z_2^2}} + \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\,(ay+z_0)}{(x_2^2+y^2)\sqrt{x_2^2+y^2+(ay+z_0)^2}} +$$

$$(126)\qquad + 2x_2^2 z_2\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(x_2^2+y^2)^2\sqrt{x_2^2+y^2+z_2^2}} - 2x_2^2\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\,(ay+z_0)}{(x_2^2+y^2)^2\sqrt{x_2^2+y^2+(ay+z_0)^2}} +$$

$$+ x_2^2 z_2\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(x_2^2+y^2)(\sqrt{x_2^2+y^2+z_2^2}\,)^3} - x_2^2\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\,(ay+z_0)}{(x_2^2+y^2)(\sqrt{x_2^2+y^2+(ay+z_0)^2}\,)^3} +$$

$$+ (x_1) = I + II + III + IV + V + VI$$

I liegt unter (6), II als Integral (68) unter (70) bereits berechnet vor:

$$(127)\qquad I = -\frac{1}{x_2}\arctan\frac{y_2 z_2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + (x_2 y_1 z_2) + (x_1 y_2 z_2) - (x_1 y_1 z_1)$$

$$(128)\qquad II = \frac{1}{x_2}\arctan\frac{y_2 z_0 - a x_2^2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - (x_2 y_1 z_1) - (x_1 y_2 z_2) + (x_1 y_1 z_1)$$

III ist genau der Typus T_6 (27):

$$(129)\qquad III = \frac{z_2^2 - x_2^2}{x_2 z_2^2}\arctan\frac{y_2 z_2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + \frac{y_2}{z_2}\,\frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{x_2^2+y_2^2} -$$

$$- (x_2 y_1 z_2) - (x_1 y_2 z_2) + (x_1 y_1 z_2)$$

Vor IV und VI, die Erweiterungen von II sind und eine besondere Behandlung verlangen, möge das leicht zu berechnende Integral V erledigt werden.

Mit

$$y = \sqrt{x_2^2+z_2^2}\ \tan\varphi$$

geht es über in

$$V = \frac{x_2^2 z_2}{x_2^2+z_2^2} \int \frac{d\varphi \cos^3\varphi}{x_2^2+z_2^2\sin^2\varphi}$$

und mit

$$\sin\varphi = t$$

wird es

$$V = \frac{x_2^2 z_2}{x_2^2+z_2^2} \int \frac{dt\ (1-t^2)}{x_2^2+ z_2^2 t^2}$$

und ist als T_{15} (117) bereits bekannt, somit wird V nach Rückführung der zwei Substitutionen in den ursprünglichen rechtwinkligen Koordinaten geschrieben:

(130) $$V = \frac{x_2^2}{(x_2^2+z_2^2)z_2} \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + \frac{x_2}{z_2^2} \arctan \frac{y_2 z_2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} +$$

$$+ (x_2 y_1 z_2) + (x_1 y_2 z_2) - (x_1 y_1 z_2)$$

In IV verwandelt man mit Hilfe der Substitutionen (54) und (69) den Ausdruck unter der Wurzel in

$$g\ u^2 + h\ v^2$$

und die Form $(x^2+y^2)^2$ in $(u^2+ v^2)^2$. Damit wird

(131) $$IV = \frac{2}{x_2} \int \frac{v^2 d\left(\frac{u}{v}\right) u\ \sqrt{a^2x_2^2+z_0^2}\ (-\gamma u+\alpha v)^2}{(u^2+v^2)^2\ \sqrt{[x_2^2(1+a^2)+z_0^2]\ u^2+ x_2^2 v^2}} - (x_1)$$

Dieses Integral unterscheidet sich von dem Typus G, der mittels der Formeln (54) bis (70) berechnet wurde, dadurch, daß $u^2+ v^2$ im Nenner im Quadrat vorkommt. Um dies zu homogenisieren, ist im Zähler der Ausdruck (64)

$$1 = \frac{-\gamma u + \alpha v}{\sqrt{D'}} = \frac{-\gamma u + \alpha v}{x_2}$$

im Quadrat hinzugefügt. Mit Einführung von

(66) $$\frac{u}{v} = \tan\varphi \qquad d\varphi = \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{1+\frac{u^2}{v^2}}$$

wird

$$IV = \frac{2}{x_2 \sqrt{a^2x_2^2+z_0^2}} \int \frac{d\varphi \sin\varphi (z_0^2\sin^2\varphi+a^2x_2^2\cos^2\varphi)}{\sqrt{[x_2^2(1+a^2)+z_0^2]\sin^2\varphi+x_2^2\cos^2\varphi}} -$$

$$- \frac{4\,a\,z_0}{\sqrt{a^2x_2^2+z_0^2}} \int \frac{d\varphi \cos\varphi \sin^2\varphi}{\sqrt{[x_2^2(1+a^2)+z_0^2]\sin^2\varphi+x_2^2\cos^2\varphi}} - (x_1)$$

Im ersten Integral substituieren wir

$$\cos\varphi = \tau$$

im zweiten

$$\sin\varphi = t$$

und erhalten

$$IV = - \frac{2}{x_2 \sqrt{a^2x_2^2+z_0^2}} \int \frac{d\tau [z_0^2 + (a^2x_2^2 - z_0^2)\tau^2]}{\sqrt{[x_2^2(1+a^2)+z_0^2]-(a^2x_2^2+z_0^2)\tau^2}} -$$

$$- \frac{4a\,z_0}{\sqrt{a^2x_2^2+z_0^2}} \int \frac{dt\,t^2}{\sqrt{x_2^2+(a^2x_2^2+z_0^2)\,t^2}} + (x_1)$$

also einfache Integrale der elementaren Typen

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\tau^2}} = \frac{1}{\beta} \arcsin \frac{\beta}{\alpha}\tau$$

(132)
$$\int \frac{d\tau\,\tau^2}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\tau^2}} = -\frac{1}{2\beta^2}\tau\sqrt{\alpha^2-\beta^2\tau^2} + \frac{\alpha^2}{2\beta^3} \arcsin \frac{\beta}{\alpha}\tau$$

$$\int \frac{dt\,t^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2t^2}} = \frac{t}{2\beta^2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2t^2} - \frac{\alpha^2}{2\beta^3}\log\left(\beta t + \sqrt{\alpha^2+\beta^2t^2}\right)$$

Hiemit und nach Rückkehr zu den ursprünglichen Veränderlichen mittels

(133)
$$\tau = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{y\,z_0 - a\,x_2^2}{\sqrt{a^2x_2^2+z_0^2}\sqrt{x_2^2+y^2}} \qquad t = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{x_2(a\,y + z_0)}{\sqrt{a^2x_2^2+z_0^2}\sqrt{x_2^2+y^2}}$$

und Ersatz des arcsin durch einen arctan mit (67) wird schließlich

$$IV = -\left[\frac{1}{x_2} + \frac{x_2(a^2x_2^2-z_0^2)}{(a^2x_2^2+z_0^2)^2}\right] \arctan \frac{y_2z_0 - a\,x_2^2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} -$$

(134)
$$- \frac{2\,a\,x_2^2z_0}{(a^2x_2^2+z_0^2)^2}\left[\frac{z_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{x_2^2+y_2^2} - \log \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}(z_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2})\right] +$$

$$+ (x_2y_1z_1) + (x_1y_2z_2) - (x_1y_1z_1)$$

Die gleichen Substitutionen (54), (69) und (131) verwandeln VI in

$$VI = -\frac{x_2}{\sqrt{a^2x_2^2+z_0^2}}\int \frac{d\tau\left[z_0^2+(a^2x_2^2-z_0^2)\tau^2\right]}{\left(\sqrt{x_2^2(1+a^2)+z_0^2-(a^2x_2^2+z_0^2)\tau^2}\right)^3} -$$
$$-\frac{2\,a\,x_2^2z_0}{\sqrt{a^2x_2^2+z_0^2}}\int \frac{dt\,t^2}{\left(\sqrt{x_2^2+(a^2x_2^2+z_0^2)\,t^2}\right)^3} + (x_1)$$

Die zugrunde liegenden elementaren Integrale sind

$$\int \frac{d\tau}{(\sqrt{\alpha^2-\beta^2\tau^2})^3} = \frac{\tau}{\alpha^2\sqrt{\alpha^2-\beta^2\tau^2}}$$

(135) $$\int \frac{d\tau\,\tau^2}{(\sqrt{\alpha^2-\beta^2\tau^2})^3} = -\frac{1}{\beta^3}\arcsin\frac{\beta\tau}{\alpha} + \frac{\tau}{\beta^2\sqrt{\alpha^2-\beta^2\tau^2}}$$

$$\int \frac{dt\,t^2}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2t^2})^3} = -\frac{t}{\beta^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2t^2}} + \frac{1}{\beta^3}\log\left(\beta t+\sqrt{\alpha^2+\beta^2t^2}\right)$$

Der Übergang auf die ursprünglichen Veränderlichen mit (133) und die Verwandlung des arcsin in einen arctan nach (67) ergibt

(136) $$VI = -\frac{1}{a^2x_2^2+z_0^2}\left[\frac{z_0^2}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2} + \frac{a^2x_2^2-z_0^2}{a^2x_2^2+z_0^2}\right]\frac{y_2z_0-a\,x_2^2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} +$$
$$+\frac{2a\,x_2^2z_0}{(a^2x_2^2+z_0^2)^2}\,\frac{z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + \frac{x_2(a^2x_2^2-z_0^2)}{(a^2x_2^2+z_0^2)^2}\arctan\frac{y_2z_0-a\,x_2^2}{x_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} -$$
$$-\frac{2\,a\,x_2^2z_0}{(a^2x_2^2+z_0^2)^2}\log\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\left(z_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\right) + (x_2y_1z_1) + (x_1y_2z_2) -$$
$$-(x_1y_1z_1)$$

In den Zusammenziehungen von (127), (128), (129), (130), (134) und (136) heben sich die Logarithmen und Arcustangenten weg und es bleibt

(137) $$\frac{1}{k^2\delta}V_{xxx} = \frac{z_2}{x_2^2+z_2^2}\left(\frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \frac{y_1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}\right) -$$
$$-\frac{y_1}{x_2^2+y_1^2}\left(\frac{z_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}\right) -$$
$$-\frac{z_0}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2}\left(\frac{y_2+a\,z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \frac{y_1+a\,z_1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}\right) - (x_1)$$

Bei der Integration von V_{yyy} treten nur schon bekannte Typen auf.

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yyy} = 9 \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{y_1}^{\frac{z-z_0}{a}} \frac{dy\, y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} -$$

$$- 15 \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{y_1}^{\frac{z-z_0}{a}} \frac{dy\, y^3}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^7}$$

Durch Integration nach y wird es:

(138)
$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yyy} = - \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\left(\sqrt{x^2+z^2+(\frac{z-z_0}{a})^2}\right)^3} +$$

$$+ 3 \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz\, (\frac{z-z_0}{a})^2}{\left(\sqrt{x^2+z^2+(\frac{z-z_0}{a})^2}\right)^5} + \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(\sqrt{x^2+y_1^2+z^2})^3} -$$

$$-3\, y_1^2 \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(\sqrt{x^2+y_1^2+z^2})^5} = I + II + III + IV$$

Durch Einführung von (81)

(81)
$$u = z - \frac{z_0}{1 + a^2}, \qquad \xi = \frac{a\, x_2}{\sqrt{1 + a^2}}, \qquad \zeta = \frac{a\, z_0}{1 + a^2}$$

und kurzer Umformung nehmen die zwei ersten Integrale die Gestalt an

$$I + II = - \frac{a^4}{(1+a^2)^2} \int du \int \frac{d\,\xi}{(\sqrt{\xi^2+u^2+\zeta^2})^3} +$$

$$+ \frac{a^2}{(1+a^2)^2} \left\{ - \int d\,\xi \int \frac{du}{(\sqrt{u^2+\xi^2+\zeta^2})^3} + 3 \int d\,\xi \int \frac{du\, u^2}{(\sqrt{u^2+\xi^2+\zeta^2})^5} \right\} -$$

$$- \frac{6\, a^4 z_0}{(1+a^2)^3} \int d\,\xi \int \frac{du\, u}{(\sqrt{u^2+\xi^2+\zeta^2})^5} + \frac{3\, a^6 z_0^2}{(1+a^2)^4} \int d\,\xi \int \frac{du}{(\sqrt{u^2+\xi^2+\zeta^2})^5} =$$

$$= A + B + C + D$$

Durch Integration nach ξ mittels (19) wird

$$A = \frac{-a^4\, \xi_2}{(1+a^2)^2} \int \frac{du}{(u^2+\zeta^2)\sqrt{u^2+\xi_2^2+\zeta^2}} + (\xi_1)$$

Dieses Integral ist schon mit (84) gelöst worden, daher ist

(139)
$$A = -\frac{a^3}{(1+a^2)z_0}\arctan\frac{x_2(y_2+a\ z_2)}{z_0\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + (x_2y_1z_1) + (x_1y_2z_2) - $$
$$- (x_1y_1z_1)$$

B ergibt nach u integriert

$$B = \frac{a^2u_2}{(1+a^2)^2}\int\frac{d\xi}{(\sqrt{\xi^2+u_2^2+\zeta^2})^3} - (u_1)$$

Die Rückführung der Substitutionen (81) verwandelt es in

$$B = -\frac{a\ (y_2+a\ z_2)}{(1+a^2)^2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{(\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2})^3} + (y_1z_1)$$

und durch Integration nach (19) bleibt

(140)
$$B = -\frac{a}{(1+a^2)^2}\ \frac{y_2+a\ z_2}{y_2^2+z_2^2}\ \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2}} + (x_2y_1z_1) + (x_1y_2z_2) -$$
$$- (x_1y_1z_1)$$

Unmittelbare Integration nach u und Rückbildung von (81) ergibt

$$C = \frac{2\ a^2z_0}{(1+a^2)^2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{(\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2})^3} - (y_1z_1)$$

woraus mit (19) wird

(141)
$$C = \frac{2\ a^2z_0}{(1+a^2)^2}\ \frac{1}{y_2^2+z_2^2}\ \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - (x_2y_1z_1) - (x_1y_2z_2) +$$
$$+ (x_1y_1z_1)$$

Die Type T_5 (112) verwandelt D in

$$D = \frac{a^6z_0^2\ u_2}{(1+a^2)^4}\left\{2\int\frac{d\xi}{(\xi^2+\zeta^2)^2\sqrt{\xi^2+u_2^2+\zeta^2}} + \int\frac{d\xi}{(\xi^2+\zeta^2)(\sqrt{\xi^2+u_2^2+\zeta^2})^3}\right\} -$$
$$- (u_1)$$

Mit (81) wird nach kurzer Reduktion

$$D = \frac{a^3z_0^2\ (y_2+a\ z_2)}{(1+a^2)^2}\left\{2\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{(x^2+\frac{z_0^2}{1+a^2})^2\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2}} +\right.$$
$$\left. + \int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{(x^2+\frac{z_0^2}{1+a^2})(\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2})^3}\right. - (y_1z_1)$$

Die zwei Integrale sind bereits in (113) aufgetreten und in (116) und (118) ausgewertet worden. Demnach wird

$$D = \frac{a^3}{(1+a^2)\, z_0} \arctan \frac{y_2 + a\, z_2}{z_0} \; \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} +$$

(142) $$+ \frac{a^3}{y_2+a\; z_2} \; \frac{x_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2} - \frac{a^3 z_0^2}{(1+a^2)^2 (y_2+a\; z_2)(y_2^2+z_2^2)} \; \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} -$$

$$- (x_2 y_1 z_1) - (x_1 y_2 z_2) + (x_1 y_1 z_1)$$

III wird zuerst mittels (19) berechnet:

$$III = z_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2+y_1^2)\sqrt{x^2+y_1^2+z_2^2}} - (z_1)$$

und dann nach (6):

(143) $$III = \frac{1}{y_1} \arctan \frac{x_2 z_2}{y_1 \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - (x_2 y_1 z_1) - (x_1 y_1 z_2) + (x_1 y_1 z_1)$$

IV wird mit (112) nach z integriert:

(144) $$IV = -2\, y_1^2 z_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2+y_1^2)^2 \sqrt{x^2+y_1^2+z_2^2}} - y_1^2 z_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2+y_1^2)\left(\sqrt{x^2+y_1^2+z_2^2}\right)^3}$$

Mittels der Substitutionen

$$x = \sqrt{y_1^2+z_2^2}\, \tan\varphi \quad \text{und} \quad \sin\varphi = t$$

geht es in

$$IV = -2\, y_1^2 z_2 \int \frac{dt\,(1-t^2)}{(y_1^2+z_2^2 t^2)^2} - \frac{y_1^2 z_2}{y_1^2+z_2^2} \int \frac{dt\,(1-t^2)}{y_1^2+z_2^2 t^2}$$

über, also in die zwei unter (114) und (117) gelösten Typen:

(145) $$IV = -\frac{1}{y_1} \arctan \frac{x_2 z_2}{y_1 \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - \frac{x_2}{z_2} \; \frac{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}{x_2^2+y_1^2} +$$

$$+ \frac{y_1^2}{z_2 (y_1^2+z_2^2)} \; \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} + (x_2 y_1 z_1) + (x_1 y_1 z_2) - (x_1 y_1 z_1)$$

Die Summe von (139), (140), (141), (142), (143) und (145) reduziert sich auf

(146) $$\frac{1}{k^2 \delta} V_{yyy} = -\frac{x_2 z_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} \left(\frac{1}{y_1^2+x_2^2} + \frac{1}{y_1^2+z_2^2} \right) +$$

$$+\frac{x_2 z_1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}\left(\frac{1}{y_1^2+x_2^2}+\frac{1}{y_1^2+z_1^2}\right)-\frac{a\ y_2^2}{(y_2^2+z_2^2)(y_2+a\ z_2)}\ \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}+$$

$$+\frac{a\ y_1^2}{(y_1^2+z_1^2)(y_1+a\ z_1)}\quad\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}+$$

$$+\frac{a^3\ x_2}{x_1^2(1+a^2)+z_0^2}\left(\frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{y_2+a\ z_2}-\frac{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}{y_1+a\ z_1}\right)+(x_1)$$

Auch in der Berechnung von V_{zzz} begegnet uns nur schon Bekanntes.

$$\frac{1}{k^2\delta}\ V_{zzz}=9\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1}^{y_2}dy\int_{ay+z_0}^{z_2}\frac{dz\ z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5}-15\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1}^{y_2}dy\int_{ay+z_0}^{z_2}\frac{dz\ z^3}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^7}$$

wird nach z integriert zu

$$\frac{1}{k^2\delta}\ V_{zzz}=-\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy}{(\sqrt{x^2+y^2+z_2^2})^3}+3\ z_2^2\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy}{(\sqrt{x^2+y^2+z_2^2})^5}+$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy}{\left(\sqrt{x^2+y^2+(a\ y+z_0)^2}\right)^3}-3\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy\ (a\ y+z_0)^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2+(z_0+a\ y)^2}\right)^5}=$$

$$=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}$$

Mit (19) wird

$$\mathrm{I}=-y_2\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{(x^2+z_2^2)\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2}}\quad+(y_1)$$

und mit (6)

(147) $$\mathrm{I}=-\frac{1}{z_2}\arctan\frac{x_2 y_2}{z_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}+(x_2 y_1 z_2)+(x_1 y_2 z_2)-(x_1 y_2 z_2)$$

wird mit (112) nach y integriert

$$\mathrm{II}=2\ y_2 z_2^2\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{(x^2+z_2^2)^2\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2}}+y_2 z_2^2\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{(x^2+z_2^2)\left(\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2}\right)^3}-$$

$$-(y_1)$$

und bezüglich x auf die gleiche Weise wie (144) mittels der Substitutionen

$$x=\sqrt{y_2^2+z_2^2}\tan\varphi\qquad\sin\varphi=t$$

Das Ergebnis ist

$$\mathrm{II}=\frac{1}{z_2}\arctan\frac{x_2 y_2}{z_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}+\frac{x_2}{y_2}\ \frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{x_2^2+z_2^2}\quad-$$

(148) $$-\frac{z_2^2}{y_2\,(y_2^2+z_2^2)}\;\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\;-(x_2 y_1 z_2)-(x_1 y_2 z_2)+(x_1 y_1 z_2)$$

III und IV gehen durch die Substitutionen (41)

(41) $$\eta = y + \frac{a\ z_0}{1+a^2}\,,\qquad \xi = \frac{x_2}{1+a^2}\,,\qquad \zeta = \frac{z_0}{1+a^2}$$

und nach geringer Umformung über in

$$\mathrm{III}+\mathrm{IV} = \frac{a^2}{(\sqrt{1+a^2})^5}\left\{\int dx\int\frac{d\eta}{(\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2})^3} - 3\int dx\int\frac{d\eta\,\eta^2}{(\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2})^5}\right\}+$$
$$+\frac{1}{(\sqrt{1+a^2})^5}\int dx\int\frac{d\eta}{(\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2})^3} - \frac{6\ a\ z_0}{(\sqrt{1+a^2})^7}\int dx\int\frac{d\eta\,\eta}{(\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2})^5} -$$
$$-\frac{3\ z_0^2}{(\sqrt{1+a^2})^9}\int dx\int\frac{d\eta}{(\sqrt{\eta^2+\xi^2+\zeta^2})^5} = A+B+C+D$$

A gestattet unmittelbare Integration bezüglich η und nimmt nach Rückkehr zu x, y und z nach (41) die Gestalt an

$$A = \frac{a^2\,(y_2+a\ z_2)}{(1+a^2)^2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{(\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2})^3}$$

und wird nach (19)

(149) $$A = \frac{a^2}{(1+a^2)^2}\;\frac{y_2+a\ z_2}{y_2^2+z_2^2}\;\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\;-(x_2 y_1 z_1)-(x_1 y_2 z_2)+$$
$$+(x_1 y_1 z_1)$$

B gestattet direkte Integration nach η mittels (19):

$$B = \frac{1}{(\sqrt{1+a^2})^5}\int\frac{dx\ \eta_2}{(\xi^2+\zeta^2)\ \sqrt{\xi^2+\eta_2^2+\zeta^2}}\quad -(\eta_1)$$

und wird in den ursprünglichen Veränderlichen zu

$$B = \frac{y_2+a\ z_2}{(1+a^2)^2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\left(x^2+\frac{z_0^2}{1+a^2}\right)\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2}}\;-(y_1 z_1)$$

also schon in der Form, die unter (110) bereits berechnet vorliegt, so daß direkt angeschrieben werden kann:

(150) $$B = \frac{1}{(1+a^2)z_0}\arctan\frac{y_2+a\ z_2}{z_0}\;\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\;-(x_2 y_1 z_1)-(x_1 y_2 z_1)+$$
$$+(x_1 y_1 z_1)$$

Auch C läßt sich unmittelbar nach η integrieren

$$C = \frac{2\ a\ z_0}{(\sqrt{1+a^2})^7} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(\sqrt{\xi^2+\eta_2^2+\zeta^2})^3} - (\eta_1)$$

In den ursprünglichen Veränderlichen wird

$$C = \frac{2\ a\ z_0}{(1+a^2)^2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2})^3} - (y_1\, z_1)$$

und mit (19) berechnet:

(151) $$C = \frac{2\ a\ z_0}{(1+a^2)^2} \frac{1}{y_2^2+z_2^2} \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - (x_2 y_1\, z_1) - (x_1 y_2\, z_2) + (x_1 y_1\, z_1)$$

D wird mittels (112) zu

$$D = -\frac{2\ z_0 \eta_2}{(\sqrt{1+a^2})^9} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(\xi^2+\zeta^2)^2\sqrt{\xi^2+\eta_2^2+\zeta^2}} -$$

$$- \frac{z_0^2 \eta_2}{(\sqrt{1+a^2})^9} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(\xi^2+\zeta^2)(\sqrt{\xi^2+\eta_2^2+\zeta^2})^3} + (\eta_1)$$

und umgeformt nach (41)

$$D = -\frac{2\ z_0^2(y_2+a\ z_2)}{(1+a^2)^3} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2+\frac{z_0^2}{1+a^2})^2\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2}} -$$

$$- \frac{z_0^2\ (y_2+a\ z_2)}{(1+a^2)^3} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2+\frac{z_0^2}{1+a^2})\ (\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2})^3} + (y_1\, z_1)$$

Diese zwei Integrale sind bis auf den hier fehlenden Faktor a^2 gleich den zwei Integralen von (113), die unter (116) und (118) berechnet wurden, man findet daher

(152) $$D = -\frac{1}{(1+a^2)z_0} \arctan \frac{y_2+a\ z_2}{z_0} \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \frac{x_2}{y_2+a\ z_2} \frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2} +$$

$$+ \frac{z_0^2}{(1+a^2)^2} \frac{1}{(y_2^2+z_2^2)(y_2+a\ z_2)} \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + (x_2 y_1\, z_1) + (x_1 y_2\, z_2) -$$

$$- (x_1 y_1\, z_1)$$

In der Summe von (147) bis (152) fallen die Arcustangensterme weg und es bleibt

(153) $$\frac{1}{k^2\delta} V_{zzz} = \frac{x_2 y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \left(\frac{1}{x_2^2+z_2^2} + \frac{1}{y_2^2+z_2^2} \right) - \frac{x_2 y_1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} \left(\frac{1}{x_2^2+z_2^2} \right. +$$

$$+ \frac{1}{y_1^2+z_2^2}\Bigg) + \frac{z_2^2}{(y_2^2+z_2^2)(y_2+a\ z_2)}\ \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \frac{z_1^2}{(y_1^2+z_1^2)(y_1+a\ z_1)}\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}$$

$$- \frac{x_2}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2}\left(\frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{y_2+a\ z_2} - \frac{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}{y_1+a\ z_1}\right) - (x_1)$$

Neun der zehn dritten Ableitungen sind wieder zu je dreien durch die Gleichungen (32) verbunden, die Ableitungen der Laplace'schen Gleichung $\Delta V = 0$ nach x, y und z .

IV. DAS DREISEITIGE, IN DER X-RICHTUNG UNENDLICH AUSGEDEHNTE PRISMA.

Das dreiseitige Prisma soll sich in der X-Richtung von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken, sein Querschnitt sei derselbe wie im vorigen Abschnitt, in Figur 4 dargestellt.

Die Ergebnisse dieses Kapitels werden durch direkte Berechnung hergeleitet. Man kann sie auch gewinnen, indem man in den Resultaten des vorigen Abschnitts den Grenzübergang

$$x_1 \text{ gegen } -\infty, \qquad x_2 \text{ gegen } +\infty$$

macht, was als Rechenprobe dienen mag.

1.) Das Potential und die ersten Ableitungen.

Es ist

$$V = \infty \qquad \text{und} \qquad V_x = 0$$

$$\frac{1}{k^2\delta} \quad V_y = -\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{y_1}^{\frac{z-z_0}{a}} \frac{dy\ y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$$

gibt nach y integriert

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{z_1}^{z_2} dz \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2+\left(\frac{z-z_0}{a}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y_1^2+z^2}} \right)$$

und nach x

$$= \lim_{x=\infty} \int_{z_1}^{z_2} dz \log \frac{x + \sqrt{x^2+z^2+\left(\frac{z-z_0}{a}\right)^2}}{-x+\sqrt{x^2+z^2+\left(\frac{z-z_0}{a}\right)^2}} \cdot \frac{-x+\sqrt{x^2+y_1^2+z^2}}{x+\sqrt{x^2+y_1^2+z^2}} =$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} dz \log \frac{y_1^2+z^2}{z^2+\left(\frac{z-z_0}{a}\right)^2}$$

Partiell integriert wird es

$$\frac{1}{k^2\delta} \quad V_y = z_2 \log \frac{y_1^2+z_2^2}{y_2^2+z_2^2} - 2\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz\ z^2}{y_1^2+z^2} + 2\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz\ z\left[z+\frac{z-z_0}{a}\right]}{z+\left(\frac{z-z_0}{a}\right)^2}$$

$$= A + B + C$$

wobei im ersten schon integrierten Term A die Integrationsgrenzen durch die Werte an den Kanten der schiefen Ebene

(37) $$\frac{z_2 - z_0}{a} = y_2 \qquad \frac{z_1 - z_0}{a} = y_1$$

dargestellt sind.

Die zwei Integrale B und C sind von einfacher rationaler Form. Es ist

$$B = -2(z_2 - z_1) + 2\, y_1 \left(\arctan \frac{z_2}{y_1} - \arctan \frac{z_1}{y_1}\right)$$

C wird mit der Substitution (81) umgeformt und ist

$$C = 2 \int_{z_1}^{z_2} dz + \frac{2\, z_0}{1+a^2} \int \frac{du\, u}{u^2+\zeta^2} - \frac{2\, a^2 z_0^2}{(1+a^2)^2} \int \frac{du}{u^2+\zeta^2}$$

Die Rückführung von (81) nach der Integration ergibt

$$C = 2\,(z_2 - z_1) + \frac{z_0}{1+a^2} \log \frac{y_2^2 + z_2^2}{y_1^2 + z_1^2} - \frac{2\, a\, z_0}{1+a^2}\left(\arctan \frac{y_2 + a\, z_2}{z_0} - \right.$$
$$\left. - \arctan \frac{y_1 + a\, z_1}{z_0}\right)$$

Die Addition von A, B und C liefert V_y :

(154) $$\frac{1}{k^2\delta} V_y = -z_2 \log \frac{y_2^2 + z_2^2}{y_1^2 + z_2^2} + 2\, y_1 \left(\arctan \frac{z_2}{y_1} - \arctan \frac{z_1}{y_1}\right) +$$
$$+ \frac{z_0}{1+a^2} \log \frac{y_2^2 + z_2^2}{y_1^2 + z_1^2} - \frac{2\, a\, z_0}{1+a^2}\left(\arctan \frac{y_2 + a\, z_2}{z_0} - \arctan \frac{y_1 + a\, z_1}{z_0}\right)$$

Unter Beachtung von (37) für die Werte von z an den Kanten des Prismas

(37) $$a\, y_2 + z_0 = z_2 \qquad a\, y_1 + z_0 = z_1$$

findet man auf die gleiche Weise wie in der vorigen Rechnung

(155) $$\frac{1}{k^2\delta} V_z = -\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_0+ay}^{z_2} \frac{dz\, z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} = y_1 \log \frac{y_1^2 + z_2^2}{y_1^2 + z_1^2} -$$
$$- 2\, z_2 \left(\arctan \frac{y_2}{z_2} - \arctan \frac{y_1}{z_2}\right) + \frac{a\, z_0}{1+a^2} \log \frac{y_2^2 + z_2^2}{y_1^2 + z_1^2} +$$
$$+ \frac{2\, z_0}{1+a^2}\left(\arctan \frac{y_2 + a\, z_2}{z_0} - \arctan \frac{y_1 + a\, z_1}{z_0}\right)$$

2.) Die zweiten Ableitungen des in der X-Richtung unendlichen Prismas.

$$V_{xx} = V_{xy} = V_{xz} = \theta$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yz} = 3 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{ay+z_0}^{z_2} \frac{dz\ y\ z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5}$$

gibt nach z integriert

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\ y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} + \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\ y}{(\sqrt{x^2+y^2+(a\ y+z_0)^2})^3} = \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+y_2^2+z_2^2}} - (y_1\ z_2) = \log \frac{y_1^2+z_2^2}{y_2^2+z_2^2}$$

II wird nach (19) bezüglich x integriert:

$$\mathrm{II} = 2 \int_{y_1}^{y_1} \frac{dy\ y}{y^2+(z_0+a\ y)^2} \cdot \lim_{x=\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+(z_0+a\ y)^2}}$$

Da der limes gleich 1 ist, beschränkt sich II auf das einfache elementare Integral. Man erhält

(156)
$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yz} = - \log \frac{y_2^2+z_2^2}{y_1^2+z_2^2} + \frac{1}{1+a^2} \log \frac{y_2^2+z_2^2}{y_1^2+z_1^2} - \frac{2\ a}{1+a^2} \left(\arctan \frac{y_2+a\ z_2}{z_0} - \arctan \frac{y_1+a\ z_1}{z_0} \right)$$

Auf die gleichen elementaren Integrale führt auch die Berechnung der zwei weiteren zweiten Ableitungen

(157)
$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yy} = - \frac{a}{1+a^2} \log \frac{y_2^2+z_2^2}{y_1^2+z_1^2} + 2 \left(\arctan \frac{z_2}{y_1} - \arctan \frac{z_1}{y_1} \right) + \frac{2\ a^2}{1+a^2} \left(\arctan \frac{y_2+a\ z_2}{z_0} - \arctan \frac{y_1+a\ z_1}{z_0} \right)$$

und

(158)
$$\frac{1}{k^2\delta} V_{zz} = \frac{a}{1+a^2} \log \frac{y_2^2+z_2^2}{y_1^2+z_1^2} - 2 \left(\arctan \frac{y_2}{z_2} - \arctan \frac{y_1}{z_2} \right) + \frac{2}{1+a^2} \left(\arctan \frac{y_2+a\ z_2}{z_0} - \arctan \frac{y_1+a\ z_1}{z_0} \right)$$

Mit Benützung von (21 findet man leicht, daß die Summe der zwei letzten Ausdrücke im Außenraum θ

im Innenraum

$$- 4\pi k^2\delta$$

ist.

3.) Die dritten Ableitungen des dreiseitigen in der X -Richtung unendlichen Prismas.

$$V_{xxx} = V_{xxy} = V_{xxz} = V_{xyy} = V_{xzz} = V_{xyz} = \theta$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yyz} = 3\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{ay+z_0}^{z_2} \frac{dz\ z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} - 15 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{ay+z_0}^{z_2} \frac{dz\ y^2 z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^7}$$

gibt nach z integriert

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(\sqrt{x^2+y^2+z_2^2})^3} + 3\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\ y^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z_2^2})^5} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(\sqrt{x^2+y^2+(a\ y+z_0)^2})^3} - 3\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\ y^2}{(\sqrt{x^2+y^2+(a'\ y+z_0)^2})^5}$$

Man integriert nach x mit (19) und (112) und geht mit x zur Grenze ∞ über. Es bleibt

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yyz} = -2\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y^2+z_2^2} + 4\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\ y^2}{(y^2+z_2^2)^2} + 2\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y^2+(z_0+a\ y)^2} -$$

$$- 4\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\ y^2}{\left[y^2+(z_0+a\ y)^2\right]^2}$$

Die hier auftretenden elementaren Typen sind

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y^2+z_2^2} = \frac{1}{z_2} \arctan \frac{y_2}{z_2} - (y_1$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(y^2+z_2^2)^2} = \frac{1}{2\ z_2^2} \frac{y_2}{y_2^2+z_2^2} + \frac{1}{2\ z_2^3} \arctan \frac{y_2}{z_2} - (y_1)$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\ y^2}{(y^2+z_2^2)^2} = -\frac{y_2}{2\ (y_2^2+z_2^2)} + \frac{1}{2\ z_2} \arctan \frac{y_2}{z_2} + (y_1)$$

$$\int_{y_2}^{y_2} \frac{dy}{y^2+(z_0+a\ y)^2} = \frac{1}{z_0} \arctan \frac{y_2+a\ z_2}{z_0} - (y_1\ z_1)$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\, y^2}{\left[y^2+(z_0+a\,y)^2\right]^2} = \frac{1}{2\,z_0} \arctan \frac{y_2+a\,z_2}{z_0} + \frac{a\,z_0}{(1+a^2)^2}\,\frac{1}{y_2^2+z_2^2} - $$
$$ - \frac{1-a^2}{2(1+a^2)^2} \cdot \frac{y_2+a\,z_2}{y_2^2+z_2^2} - (y_1\,z_1)$$

In der Zusammenziehung heben sich die Arcustangenten weg und es bleibt

(159) $$\frac{1}{k^2\delta} V_{yyz} = -2\left(\frac{y_2}{y_2^2+z_2^2} - \frac{y_1}{y_1^2+z_2^2}\right) + \frac{2}{1+a^2}\,M$$

wobei zur Abkürzung

$$\frac{y_2-a\,z_2}{y_2^2+z_2^2} - \frac{y_1-a\,z_1}{y_1^2+z_1^2} = M$$

gesetzt ist. Auf die gleiche Weise werden die andern drei dritten Ableitungen berechnet.

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yzz} = 2\left(\frac{z_2}{y_1^2+z_2^2} - \frac{z_1}{y_1^2+z_1^2}\right) + \frac{2\,a}{1+a^2}\,M$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yyy} = -2\left(\frac{z_2}{y_1^2+z_2^2} - \frac{z_1}{y_1^2+z_1^2}\right) - \frac{2\,a}{1+a^2}\,M$$

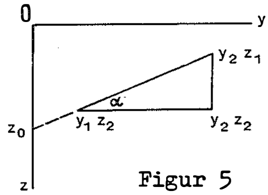
$$\frac{1}{k^2\delta} V_{zzz} = 2\left(\frac{y_2}{y_2^2+z_2^2} - \frac{y_1}{y_1^2+z_2^2}\right) - \frac{2}{1+a^2}\,M$$

Man sieht unmittelbar, daß die Ableitungen der Laplace'schen Gleichung verschwinden

$$\frac{\partial}{\partial_y}\Delta V = \frac{\partial}{\partial_z}\Delta V = 0$$

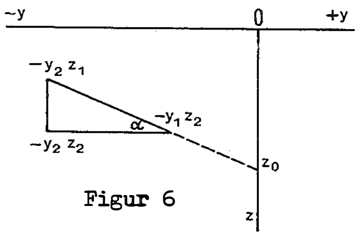
V. DAS POTENTIAL EINES DREISEITIGEN PRISMAS IN EINER ZWEITEN LAGE UND SEINE ABLEITUNGEN BIS ZUR DRITTEN ORDNUNG.

Für geophysikalische Zwecke benötigt man ebenso häufig das Potential und seine Ableitungen für ein dreiseitiges Prisma in einer Lage, die zu der in den vorausgehenden Abschnitten III und IV zugrunde gelegten und in Figur 4 gezeichneten symmetrisch ist. Die neue Lage zeigt Figur 5 im Querschnitt, die positive X-Achse ist senkrecht in die Papierebene hineinragend vorzustellen.



Figur 5

Man kann die Formeln für das Prisma in der neuen Lage aus den in den vorigen zwei Abschnitten berechneten durch eine Umstellung des Koordinatensystems gemäß Figur 6 gewinnen. Der Sinn der Integration nach y wäre hier gegenüber dem vorigen umgekehrt; es ist zu ersetzen



Figur 6

früher y_1 durch $-y_2$

" y_2 " $-y_1$

die Integrationsgrenze $\dfrac{z - z_0}{a}$ durch $\dfrac{z_0 - z}{a}$

" $z_0 + a\,y$ " $z_0 - a\,y$

Statt der Beziehungen (37) wäre für die Kanten an der schrägen Prismafläche anzusetzen:

$$z_2 = z_0 - a\,y_1 \quad \text{und} \quad z_1 = z_0 - a\,y_2$$

Wenn man diese Umstellung in den Formeln der Abschnitte III und IV vornimmt, muß dann noch das Vorzeichen von

$$V_y\ ,\ V_{xy}\ ,\ V_{yz}\ ,\ V_{xyz}\ ,\ V_{xxy}\ ,\ V_{yzz}\quad \text{und}\quad V_{yyy}$$

umgekehrt werden, um die Formeln dem Vorzeichen nach richtig zu erhalten. Die übrigen Formeln werden durch die Umstellung auch dem Vorzeichen nach richtig berechnet.

Um diese Schwierigkeiten der Umstellung des Koordinatensystems zu ersparen, werden im Folgenden die Formeln des Potentials und seiner Ableitungen für ein Prisma in der Lage der Figur 5 direkt gegeben.

Die Integrationen bezüglich y und z sind in den Grenzen

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_0 - ay}^{z_2} dz \quad \text{oder} \quad \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{\frac{z_0 - z}{a}}^{y_2} dy$$

auszuführen. Die Gleichung der schiefen Ebene heißt hier

(36') $$y = \frac{z_0 - z}{a} \qquad \text{oder} \qquad z = z_0 - a\,y$$

und an den Kanten gilt statt (37) nun

(37") $$z_2 = z_0 - a\,y_1 \qquad \text{und} \qquad z_1 = z_0 - a\,y_2$$

Der Steigungswinkel α bleibt unter 90^0 und

$$a = \tan\alpha$$

daher positiv.

Bei der Integration selbst, deren Resultat hier nur gebracht wird, treten die schon behandelten Typen auf, nur ist (36) durch (36') und (37) durch (37") ersetzt.

a) Das in der X-Richtung endliche dreiseitige Prisma in der zweiten Lage.

1.) Das Potential des endlichen dreiseitigen Prismas.

Das Ergebnis der Integration ist:

$$\frac{1}{k^2\delta}\,V = y_2 z_2 \log(x_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}) - y_1 z_2 \log(x_2 + \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}) +$$

$$+ x_2 z_2 \log \frac{y_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{y_1 + \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} + x_2 y_2 \log \frac{z_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{z_1 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2a}\left(z_1^2 - \frac{z_0^2}{1+a^2}\right) \log\left(x_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}\right) - \frac{1}{2a}\left(z_2^2 - \frac{z_0^2}{1+a^2}\right) \log\left(x_2 + \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}\right) -$$

$$- \frac{x_2 z_0}{\sqrt{1+a^2}} \log \frac{y_2 - a\,z_1 + \sqrt{1+a^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}{y_1 - a\,z_2 + \sqrt{1+a^2}\,\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} -$$

$$- \frac{z_2^2}{2}\left(\arctan \frac{x_2 y_2}{z_2\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \arctan \frac{x_2 y_1}{z_2\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}\right) -$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{x_2^2}{2} \left(\arctan \frac{y_2\, z_2}{x_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \arctan \frac{y_1\, z_2}{x_2 \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} \right) - \\
&- \frac{y_2^2}{2} \left(\arctan \frac{x_2\, z_2}{y_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \arctan \frac{x_2\, z_1}{y_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}} \right) + \\
&+ \frac{z_0^2}{2\,(1+a^2)} \left(\arctan \frac{x_2 (y_2 - a\, z_1)}{z_0 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}} - \arctan \frac{x_2 (y_1 - a\, z_2)}{z_0 \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} \right) + \\
&+ \frac{x_2^2}{2} \left(\arctan \frac{y_2\, z_0 + a\, x_2^2}{x_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}} - \arctan \frac{y_1\, z_0 + a\, x_2^2}{x_2 \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} \right) - (x_1)
\end{aligned}
$$

Die letzte Zeile stammt vom Integral

$$
\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy\ (z_0 - a\ y)}{(x_2^2+y^2) \sqrt{y^2(1+a^2)-2\, a\, y\, z_0 + z_0^2 + x_2^2}}
$$

Es wird nach der gleichen Methode gelöst, wie sie in den Formeln (54) bis (70) entwickelt worden ist.

Weiter kann

$$
\log \frac{y_2 - a\, z_1 + \sqrt{1+a^2}\ \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}{y_1 - a\, z_2 + \sqrt{1+a^2}\ \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}
$$

berechnet werden als

$$
\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin} \frac{y_2 - a\, z_1}{\sqrt{x_2^2(1+a^2) + z_0^2}} - \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin} \frac{y_1 - a\, z_2}{\sqrt{x_2^2(1+a^2) + z_0^2}}
$$

2.) Die ersten Ableitungen des endlichen dreiseitigen Prismas in der zweiten Lage.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k^2 \delta}\, V_x = {} & y_2 \log \frac{z_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{z_1 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}} + z_2 \log \frac{y_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{y_1 + \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - \\
& - \frac{z_0}{\sqrt{1+a^2}} \log \frac{y_2 - a\, z_1 + \sqrt{1+a^2}\ \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}{y_1 - a\, z_2 + \sqrt{1+a^2}\ \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - \\
& - x_2 \left(\arctan \frac{y_2\, z_2}{x_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \arctan \frac{y_1\, z_2}{x_2 \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} \right) + \\
& + x_2 \left(\arctan \frac{y_2\, z_0 + a\, x_2^2}{x_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}} - \arctan \frac{y_1\, z_0 + a\, x_2^2}{x_2 \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} \right) - (x_1)
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_y = z_2 \log \frac{x_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{x_2 + \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} + x_2 \log \frac{z_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{z_1 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}} -$$

$$- \frac{a\, x_2}{\sqrt{1+a^2}} \log \frac{y_2 - a\, z_1 + \sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}{y_1 - a\, z_2 + \sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} -$$

$$- \frac{z_0}{1+a^2} \log \frac{x_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}{x_2 + \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} -$$

$$- y_2 \left(\arctan \frac{x_2 z_2}{y_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \arctan \frac{x_2 z_1}{y_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}} \right) +$$

$$+ \frac{a\, z_0}{1+a^2} \left(\arctan \frac{x_2 (y_2 - a\, z_1)}{z_0 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}} - \arctan \frac{x_2 (y_1 - a\, z_2)}{z_0 \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} \right) - (x_1)$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_z = y_2 \log \frac{x_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{x_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}} + x_2 \log \frac{y_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{y_1 + \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} -$$

$$- \frac{x_2}{\sqrt{1+a^2}} \log \frac{y_2 - a\, z_1 + \sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}{y_1 - a\, z_2 + \sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} +$$

$$+ \frac{a\, z_0}{1+a^2} \log \frac{x_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}{x_2 + \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} -$$

$$- z_2 \left(\arctan \frac{x_2 y_2}{z_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \arctan \frac{x_2 y_1}{z_2 \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} \right) +$$

$$+ \frac{z_0}{1+a^2} \left(\arctan \frac{x_2 (y_2 - a\, z_1)}{z_0 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}} - \arctan \frac{x_2 (y_1 - a\, z_2)}{z_0 \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} \right) - (x_1)$$

3.) Die zweiten Ableitungen des endlichen dreiseitigen Prismas in der zweiten Lage.

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{xy} = \log \frac{z_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{z_1 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}} -$$

$$- \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \log \frac{y_2 - a\, z_1 + \sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}{y_1 - a\, z_2 + \sqrt{1+a^2}\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - (x_1)$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{xz} = \log \frac{y_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{y_1 + \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \log \frac{y_2 - a\, z_1 + \sqrt{1+a^2}\, \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}{y_1 - a\, z_2 + \sqrt{1+a^2}\, \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - (x_1)$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yz} = \log \frac{x_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}{x_2 + \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - \frac{1}{1+a^2} \log \frac{x_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}{x_2 + \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} +$$

$$+ \frac{a}{1+a^2} \left(\arctan \frac{x_2 (y_2 - a\, z_1)}{z_0 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}} - \arctan \frac{x_2 (y_1 - a\, z_2)}{z_0 \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} \right) - (x_1)$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{xx} = - \arctan \frac{y_2 z_2}{x_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + \arctan \frac{y_1 z_2}{x_2 \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} +$$

$$+ \arctan \frac{y_2 z_0 + a\, x_2^2}{x_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}} - \arctan \frac{y_1 z_0 + a\, x_2^2}{x_2 \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} + (x_1)$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yy} = - \frac{a}{1+a^2} \log \frac{x_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}{x_2 + \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - \arctan \frac{x_2 z_2}{y_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} +$$

$$+ \arctan \frac{x_2 z_1}{y_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}} + \frac{a^2}{1+a^2} \left(\arctan \frac{x_2 (y_2 - a\, z_1)}{z_0 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}} - \right.$$

$$\left. - \arctan \frac{x_2 (y_1 - a\, z_2)}{z_0 \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} \right) + (x_1)$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{zz} = \frac{a}{1+a^2} \log \frac{x_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}{x_2 + \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} - \arctan \frac{x_2 y_2}{z_2 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} +$$

$$+ \arctan \frac{x_2 y_1}{z_2 \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} + \frac{1}{1+a^2} \left(\arctan \frac{x_2 (y_2 - a\, z_1)}{z_0 \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}} - \right.$$

$$\left. - \arctan \frac{x_2 (y_1 - a\, z_2)}{z_0 \sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} \right) - (x_1)$$

4.) Die dritten Ableitungen des endlichen dreiseitigen Prismas in der zweiten Lage.

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{xyz} = \frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \frac{1}{1+a^2} \frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}} - \frac{a^2}{1+a^2} \frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} +$$

$$+ \frac{a\, z_0}{1+a^2} \frac{1}{x_2^2(1+a^2) + z_0^2} \left(\frac{y_2 - a\, z_1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}} - \frac{y_1 - a\, z_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} \right) - (x_1)$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{xxy} = - \frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} \left(\frac{z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}} \right) +$$

$$+\frac{a x_2}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2}\left(\frac{y_2-a\,z_1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}-\frac{y_1-a\,z_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}\right)+(x_1)$$

$$\frac{1}{k^2\delta}\,V_{xxz}=-\frac{x_2}{x_2^2+z_2^2}\left(\frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}-\frac{y_1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}\right)+$$

$$+\frac{x_2}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2}\left(\frac{y_2-a\,z_1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}-\frac{y_1-a\,z_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}\right)+(x_1)$$

$$\frac{1}{k^2\delta}\,V_{xyy}=-\frac{y_2}{x_2^2+y_2^2}\left(\frac{z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}-\frac{z_1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}\right)-$$

$$-\frac{a}{1+a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}-\frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}\right)+$$

$$+\frac{a^2 z_0}{1+a^2}\,\frac{1}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2}\left(\frac{y_2-a\,z_1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}-\frac{y_1-a\,z_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}\right)+(x_1)$$

$$\frac{1}{k^2\delta}\,V_{xzz}=-\frac{z_2}{x_2^2+z_2^2}\left(\frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}-\frac{y_1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}\right)+$$

$$+\frac{a}{1+a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}-\frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}\right)+$$

$$+\frac{z_0}{1+a^2}\,\frac{1}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2}\left(\frac{y_2-a\,z_1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}-\frac{y_1-a\,z_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}\right)+(x_1)$$

$$\frac{1}{k^2\delta}\,V_{yyz}=-\frac{y_2}{y_2^2+z_2^2}\,\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}+\frac{y_1}{y_1^2+z_2^2}\,\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}+$$

$$+\frac{y_2^2}{(y_2^2+z_1^2)(y_2-a\,z_1)}\,\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}-\frac{y_1^2}{(y_1^2+z_2^2)(y_1-a\,z_2)}\,\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}-$$

$$-\frac{a^2 x_2}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2}\left(\frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}{y_2-a\,z_1}-\frac{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}{y_1-a\,z_2}\right)+(x_1)$$

$$\frac{1}{k^2\delta}\,V_{yzz}=-\frac{z_2}{y_2^2+z_2^2}\,\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}+\frac{z_1}{y_2^2+z_1^2}\,\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}+$$

$$+\frac{a\,z_1^2}{(y_2^2+z_1^2)(y_2-a\,z_1)}\,\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}-\frac{a\,z_2^2}{(y_1^2+z_2^2)(y_1-a\,z_2)}\,\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}-$$

$$-\frac{a x_2}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2}\left(\frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}{y_2-a\,z_1}-\frac{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}{y_1-a\,z_2}\right)+(x_1)$$

$$\frac{1}{k^2\delta}\,V_{xxx}=\frac{y_2}{x_2^2+y_2^2}\left(\frac{z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}-\frac{z_1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}\right)+$$

$$+ \frac{z_2}{x_2^2+z_2^2}\left(\frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \frac{y_1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}\right) -$$

$$- \frac{z_0}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2}\left(\frac{y_2 - a\, z_1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}} - \frac{y_1 - a\, z_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}\right) - (x_1)$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yyy} = \frac{x_2 z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\left(\frac{1}{x_2^2+y_2^2} + \frac{1}{y_2^2+z_2^2}\right) - \frac{x_2 z_1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}\left(\frac{1}{x_2^2+y_2^2} +\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{y_2^2+z_1^2}\right) + \frac{a\, y_2^2}{(y_2^2+z_1^2)(y_2 - a\, z_1)}\,\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} - \frac{a\, y_1^2}{(y_1^2+z_2^2)(y_1 - a\, z_2)}\,\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} -$$

$$- \frac{a^3 x_2}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2}\left(\frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}{y_2 - a\, z_1} - \frac{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}{y_1 - a\, z_2}\right) - (x_1)$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{zzz} = \frac{x_2 y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\left(\frac{1}{x_2^2+z_2^2} + \frac{1}{y_2^2+z_2^2}\right) -$$

$$- \frac{x_2 y_1}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}\left(\frac{1}{x_2^2+y_1^2} + \frac{1}{y_1^2+z_2^2}\right) +$$

$$+ \frac{z_1^2}{(y_2^2+z_1^2)(y_2 - a\, z_1)}\,\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}} - \frac{z_2^2}{(y_1^2+z_2^2)(y_1 - a\, z_2)}\,\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}} -$$

$$- \frac{x_2}{x_2^2(1+a^2)+z_0^2}\left(\frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}{y_2 - a\, z_1} - \frac{\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_2^2}}{y_1 - a\, z_2}\right) - (x_1)$$

b) Das in der X-Richtung unendlich ausgedehnte dreiseitige Prisma in der zweiten Lage.

Die Figur 5 stelle den Querschnitt des dreiseitigen Prismas dar, das sich in der X-Richtung von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt.

1.) Das Potential und die ersten Ableitungen.

$$V = \infty$$

$$V_x = 0$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_y = - z_2 \log \frac{y_2^2 + z_2^2}{y_1^2 + z_2^2} + \frac{z_0}{1 + a^2} \log \frac{y_2^2 + z_1^2}{y_1^2 + z_2^2} -$$

$$- 2 y_2 \left(\arctan \frac{z_2}{y_2} - \arctan \frac{z_1}{y_2} \right) + \frac{2 a z_0}{1 + a^2} \left(\arctan \frac{y_2 - a z_1}{z_0} - \right.$$

$$\left. - \arctan \frac{y_1 - a z_2}{z_0} \right)$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_z = - y_2 \log \frac{y_2^2 + z_2^2}{y_2^2 + z_1^2} - \frac{a z_0}{1 + a^2} \log \frac{y_2^2 + z_1^2}{y_1^2 + z_2^2} -$$

$$- 2 z_2 \left(\arctan \frac{y_2}{z_2} - \arctan \frac{y_1}{z_2} \right) + \frac{2 z_0}{1 + a^2} \left(\arctan \frac{y_2 - a z_1}{z_0} - \right.$$

$$\left. - \arctan \frac{y_1 - a z_2}{z_0} \right)$$

2.) <u>Die zweiten Ableitungen.</u>

$$V_{xx} = V_{xy} = V_{xz} = 0$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yz} = - \log \frac{y_2^2 + z_2^2}{y_1^2 + z_2^2} + \frac{1}{1 + a^2} \log \frac{y_2^2 + z_1^2}{y_1^2 + z_2^2} +$$

$$+ \frac{2 a}{1 + a^2} \left(\arctan \frac{y_2 - a z_1}{z_0} - \arctan \frac{y_1 - a z_2}{z_0} \right)$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yy} = \frac{a}{1 + a^2} \log \frac{y_2^2 + z_1^2}{y_1^2 + z_2^2} - 2 \left(\arctan \frac{z_2}{y_2} - \arctan \frac{z_1}{y_2} \right) +$$

$$+ \frac{2 a^2}{1 + a^2} \left(\arctan \frac{y_2 - a z_1}{z_0} - \arctan \frac{y_1 - a z_2}{z_0} \right)$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{zz} = - \frac{a}{1 + a^2} \log \frac{y_2^2 + z_1^2}{y_1^2 + z_2^2} - 2 \left(\arctan \frac{y_2}{z_2} - \arctan \frac{y_1}{z_2} \right) +$$

$$+ \frac{2}{1 + a^2} \left(\arctan \frac{y_2 - a z_1}{z_0} - \arctan \frac{y_1 - a z_2}{z_0} \right)$$

3.) Die dritten Ableitungen.

$$V_{xxx} = V_{xxy} = V_{xxz} = V_{xyy} = V_{xzz} = V_{xyz} = 0$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yyz} = -2\left(\frac{y_2}{y_2^2+z_2^2} - \frac{y_1}{y_1^2+z_2^2}\right) + \frac{2}{1+a^2}\left(\frac{y_2+a\,z_1}{y_2^2+z_1^2} - \frac{y_1+a\,z_2}{y_1^2+z_2^2}\right)$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yzz} = -2\left(\frac{z_2}{y_2^2+z_2^2} - \frac{z_1}{y_2^2+z_1^2}\right) - \frac{2\,a}{1+a^2}\left(\frac{y_2+a\,z_1}{y_2^2+z_1^2} - \frac{y_1+a\,z_2}{y_1^2+z_2^2}\right)$$

$$\frac{1}{k^2\delta} V_{yyy} = 2\left(\frac{z_2}{y_2^2+z_2^2} - \frac{z_1}{y_2^2+z_1^2}\right) + \frac{2\,a}{1+a^2}\left(\frac{y_2+a\,z_1}{y_2^2+z_1^2} - \frac{y_1+a\,z_2}{y_1^2+z_2^2}\right) =$$

$$= -V_{yzz}$$

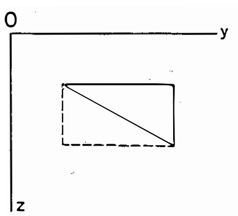
$$\frac{1}{k^2\delta} V_{zzz} = 2\left(\frac{y_2}{y_2^2+z_2^2} - \frac{y_1}{y_1^2+z_2^2}\right) - \frac{2}{1+a^2}\left(\frac{y_2+a\,z_1}{y_2^2+z_1^2} - \frac{y_1+a\,z_2}{y_1^2+z_2^2}\right) =$$

$$= -V_{yyz}$$

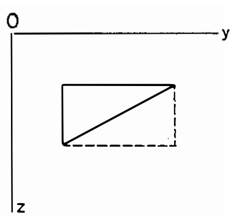
Dreiseitige Prismen in zwei weiteren Lagen.

Mit den Formeln für das vierseitige Prisma (Fig.1) und für die dreiseitigen in den zwei Lagen (Fig.4 und 5) wird man im allgemeinen das Auslangen finden.

Für Prismen in den zwei Lagen der Figuren 7 und 8 gewinnt man die zugehörigen Formeln als die Differenzen der Ausdrüke für das vierseitige Prisma vermindert um die Formeln für das dreiseitige Prisma in der ersten, beziehungsweise zweiten Lage.



Figur 7



Figur 8

Weitere Publikationen:

I. Der Österreichische Grundkataster, 66 Seiten, 1948 Preis S 10.—
zu beziehen im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen,
Wien, VIII., Krotenthallergasse 3

II. Behelf zur Prüfung für den höheren technischen Vermessungsdienst:

Heft 1:	Fortführung 1. Teil, 55 Seiten, 1949	Preis S 10.—
Heft 2:	Fortführung 2. Teil, Bodenschätzung, 46 Seiten, 1949	Preis S 10.—
Heft 3:	Höhere Geodäsie, 81 Seiten, 1949	Preis S 10.—
Heft 4:	Triangulierung, 46 Seiten, 1949	Preis S 7.—
Heft 5:	Neuvermessung, Nivellement und topographische Landesaufnahme, 104 Seiten, 1949	Preis S 16.—
Heft 6:	Photogrammetrie und Kartographie	Preis S 10.—

III. Dienstvorschriften des Bundesvermessungsdienstes:

Heft 1:	Benennungen, Zeichen und Abkürzungen im Österr. Vermessungsdienst, 38 Seiten, Prov. Ausg. 1947	Preis S 5.—
Heft 2:	Allg. Bestimmungen über Dienstvorschriften, Rechentafeln, Muster und sonstige Drucksorten, 50 Seiten, Prov. Ausg. 1947	Preis S 6.50
Heft 8:	Die österreichischen Meridianstreifen, 62 Seiten, 3. Aufl. 1949	Preis S 8.—
Heft 14:	Fehlergrenzen und Hilfstabellen für Neuvermessungen, 16 Seiten, 2. Aufl. 1937	Preis S 2.50
Heft 15:	Hilfstabellen für Neuvermessungen, 36 Seiten, 1. Aufl. 1949	Preis S 5.—
Heft 48:	Behelfe für die Anlage von Oleaten bei der Neuaufnahme und Kartenrevision, 17 Seiten, 4. Aufl. 1948	Preis S 12.—

II. und III. zu beziehen in der Amtsbücherei des
Bundesamtes für Eich- u. Vermessungswesen, Wien, I., Hohenstaufengasse 17