

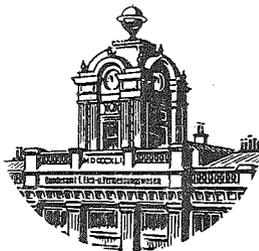
Sonderheft 7 u. 8
der Österreichischen Zeitschrift
für Vermessungswesen

Numerische Untersuchungen über
die Perioden der Polbewegung

Zur Analyse der
Laplaceschen Widersprüche

von

Karl Ledersteger, Wien



Herausgeber, Eigentümer und Verleger:
Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen
Gruppe Vermessungswesen
Wien, VIII., Friedrich-Schmidt-Platz 3

WIEN 1949

Bisher sind folgende Sonderhefte erschienen:

- Sonderheft 1: Festschrift Eduard Dolezal, 198 Seiten, Neuauflage 1948
Preis S 18.—
- Sonderheft 2: Die Zentralisierung des Vermessungswesens in ihrer Bedeutung für die topographische Landesaufnahme, 40 Seiten, 1935
wird neu aufgelegt
- Sonderheft 3: Ledersteger, Der schrittweise Aufbau des europäischen Lotabweichungssystems und sein bestanschließendes Ellipsoid
140 Seiten, 1948 Preis S 25.—
- Sonderheft 4: Zaar, Zweimedienphotogrammetrie, 40 Seiten, 1948
Preis S 18.—
- Sonderheft 5: Rinner, Abbildungsgesetz und Orientierungsaufgaben in der Zweimedienphotogrammetrie, 45 Seiten, 1948 Preis S 18.—
- Sonderheft 6: Hauer, Entwicklung von Formeln zur praktischen Anwendung der flächentreuen Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene, 32 Seiten, 1949 Preis S 15.—
- Sonderheft 7 u. 8: Ledersteger: Numerische Untersuchungen über die Perioden der Polbewegung, 59 Seiten,
Zur Analyse der Laplaceschen Widersprüche, 22 Seiten, 1949
Preis S 25.—

Weitere Publikationen:

Tachymetrische Hilfstafel für sexagesimale Kreisteilung, 20 Seiten
Normformat A 5 (148×210 mm) Preis S 10.—

Tabuliert sind die Werte für $\cos^2\alpha$ und $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$ auf vier Dezimalstellen von 0° bis 45° von Minute zu Minute. Daher keine Interpolation erforderlich. Infolge des praktischen Taschenformates und der besonders widerstandsfähigen Ausstattung ist die Tafel auch im Gelände verwendbar.

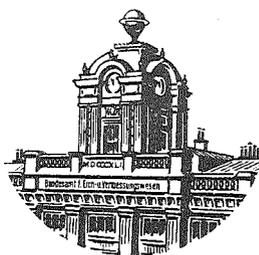
Sämtlich zu beziehen beim
Österr. Verein für Vermessungswesen, Wien, VIII., Friedrich-Schmidtplatz 3

Sonderheft 7
der **Österreichischen Zeitschrift**
für **Vermessungswesen**

Numerische Untersuchungen über
die Perioden der Polbewegung

von

Karl Ledersteger, Wien



Herausgeber, Eigentümer und Verleger:
Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen
Gruppe Vermessungswesen
Wien, VIII., Friedrich-Schmidt-Platz 3

WIEN 1949

Druck: Bundesamt für Eich- u. Vermessungswesen (Landesaufnahme), Wien

Seit der Einrichtung des Internationalen Breitendienstes vor 50 Jahren wurde das Problem der Polbewegung vielfach und in den verschiedensten Richtungen diskutiert. Je mehr sich aber das exakte Material anhäufte, desto rätselhafter wurde der ganze Fragenkomplex und man hat zum Großteil überhaupt die Hoffnung aufgegeben, einen einheitlichen Ausdruck für die überaus komplizierten Schwankungen der Stationspolhöhen aufzufinden. Ja, namhafte Forscher ¹⁾ betrachten sogar einen streng gesetzmäßigen Verlauf der Erscheinung für im Widerspruch mit der Vorstellung von der Plastizität der Erde stehend. Denn ist die sogenannte freie Nutation der Erdachse, wie sie in der Chandlerschen Polbewegung zum Ausdruck kommt, die Folge eines einmaligen Stoßes, so hätte sich, wie jüngst A. Prey ausführt, in der 50-jährigen Beobachtungszeit bereits eine Dämpfung bemerkbar machen müssen, wenn nicht irgendeine Energiequelle die Bewegung aufrecht erhält. Faßt man aber die Chandlersche Bewegung als eine Begleiterscheinung der durch die Luftmassentransporte bedingten jährlichen Polschwankung auf, so ist die Existenz der freien Schwingung nur durch die Unregelmäßigkeit des ganzen Vorganges, d.h. durch immer neue Anregung durch unregelmäßige Stöße zu verstehen. Und diese Auffassung findet ihre empirische Stütze in den letzten großen Periodenanalysen ²⁾ der Polbewegung, denzufolge die Chandlersche Periode ständig Amplitude und Phase wechselt. Fast hoffnungslos erschienen alle weiteren Versuche zur Auffindung einer einheitlichen Gesetzmäßigkeit in der Polbahn, seit sich nach 1922 der bisherige Mittelwert der Chandlerschen Periode von etwa 1.185 Jahren scheinbar sprunghaft um rund 0.06 Jahre verkürzte.

Der Schluß aber, den Wahl hieraus zog, nämlich daß die Polbewegung seit Ende 1922 überhaupt neuen Gesetzen folgt, scheint doch etwas voreilig zu sein. Denn eine derartige Erscheinung läßt prinzipiell noch eine zweite Deutung zu. Sprünge in den Schwingungszahlen, den Amplituden und Phasen der ausgeschiedenen Perioden können nämlich auch auftreten, wenn sich die Bewegung aus mehreren Wellen superponiert und bei der Wahl der zu analysierenden Abschnitte aus Unkenntnis oder Mißachtung keine Rücksicht auf die zugehörigen Schwebungen genommen wird. So zeitigte die von Pollak und Hanel nach der Fuhrichschen Autokorrelationsmethode durchgeführte Analyse der x- Koordinate der Polbahn recht merkwürdige Ergebnisse, weil die aus der Chandlerschen und der jährlichen Bewegung resultierende Schwebung von rund $6\frac{1}{2}$ Jahren nicht

1) W. Schweydar : Zur Erklärung der Bewegung der Rotationspole der Erde, S. Ber. d. preuss. Ak. d. Wiss., 20, 1919

H. Jeffreys : The Earth, its Origin, History and Physical Constitution, Cambridge 1924.

A. Prey : Über Polschwankung und Polwanderung, Gerl. Beitr. z. Geophysik, Bd. 56, 1940, Seite 155 - 202

2) L. W. Pollak : Das Periodogramm der Polbewegung, Gerl. Beitr. z. Geophysik, Bd. 16, 1927

K. Stumpff : Die Perioden der Polbewegung, Astr. Nachr. Bd. 231, 281, 1927.

E. Wahl : Neue Untersuchungen über die Perioden der Polbewegung, Astr. Nachr., Bd. 267, Nr. 6403, 1938

beachtet wurde. Diese Ergebnisse ließen sich an einer streng gesetzmäßigen, idealisierten Polbahn ad absurdum führen. ³⁾ Außerdem ist es möglich, daß die mittlere Chandlersche Periode, die nach Wanach mit der Newcombschen Periode, also mit der durch die elastische Nachgiebigkeit der Erde verlängerten Eulerschen Periode nahe zusammenfällt, gar nicht primär in der Polbewegung auftritt. Hiefür spricht schon seit je die theoretisch schwer erklärbare Variabilität der Chandlerschen Amplitude, vor allem aber gerade die sprunghafte Verkürzung oder, wenn man will, das vollständige Verschwinden dieser Hauptperiode nach 1922. Besonders auffallend war das zeitliche Zusammenfallen dieses Sprunges mit der systematischen Abänderung der Kettenbeobachtungen des Breitendienstes, derzufolge die Beobachtungsstunden nicht mehr mit den Jahreszeiten wechseln, sondern nunmehr streng symmetrisch zur Mitternacht liegen. Es war daher der Schumannsche ⁴⁾ Gedanke, daß hier Zusammenhänge obwalten, keineswegs so ohne weiters von der Hand zu weisen. Ist also die Chandlersche Bewegung eine aus verschiedenen "Bändern" resultierende Mittelperiode, dann können die wahren, primären Perioden vielleicht überhaupt nicht aus den Periodogrammen allein erschlossen werden, sondern erfordern eine tiefergehende logische Diskussion des merkwürdigen Wechselspiels.

Dies sind die Grundgedanken, die der folgenden Untersuchung der Polbahn zugrundeliegen. Sie erstreckte sich zunächst auf den in den bisherigen acht Bänden der "Resultate des Internationalen Breitendienstes" behandelten Zeitraum 1900 - 1935. Erst als die Arbeit bereits weit fortgeschritten war, konnte sie auf Grund des jüngsten Berichtes Carneras ⁵⁾ bis zum Jahre 1948 ausgedehnt werden. Um ein möglichst homogenes Material zu gewinnen, wurden für den erstgenannten Abschnitt lediglich die drei durchlaufend beobachteten Stationen Mizusawa, Carloforte und Ukiah des Nordparallels $39^{\circ}08'$ herangezogen. Sie verteilen sich auch hinsichtlich ihrer Längen ziemlich symmetrisch:

1. Mizusawa, Japan	$\lambda = - 141^{\circ} 08'$
2. Carloforte, Sardinien	$\lambda = - 8 19$
3. Ukiah, Californien, U.S.A.	$\lambda = + 123 13$

Wie ich aber bereits früher gezeigt habe, ⁶⁾ erreicht bei bloß drei Stationen die mögliche Verfälschung der Polkoordinaten durch rein lokale Einflüsse wahrscheinlich ihr Maximum, weshalb wir zuerst die Jahresperiode gesondert abschöpfen müssen. Denn bei dieser überlagern sich die tatsächliche Polbewegung und die Schwankungen der Lotrichtungen mit anderen jahreszeitlichen Erscheinungen und mit dem Einfluß des zugrundeliegenden Deklinationssystemes. Die getrennte Behandlung der Jahresperiode ist auch deshalb angezeigt, um die oben erwähnte $6\frac{1}{2}$ - jährige Schwebung zu eliminieren, da sonst die Wahl der Untersuchungsabschnitte auf zu große Schwierigkeiten stößt.

3) L.W.Pollak und A.Hanel : Bericht über die numerische Methode von J.Fuhrich zur Ermittlung von Periodizitäten, Meteorol.g.Zeitschr. Jg.52, Seite 330 - 333, 1935.

K.Ledersteger : Zur Frage der Variabilität der Chandlerschen Periode, Zeitschrift f.Geophysik, Jg.13, Seite 11 - 13. 1937.

4) R.Schumann : Bemerkenswerte Änderung der Amplitude der Chandlerschen Periode beim Übergang zu konstanter täglicher Beobachtungszeit, Astr.Nachr., Band 258, Spalte 385 - 392, 1936.

5) Luigi Carnera : I Movimenti del Polo di Rotazione Terrestre negli Anni 1938 - 1948, Bulletin geodesique No.10, 1948, Seite 269 - 284.

6) K.Ledersteger : Polbahn und primäres z-Glied, Zeitschr.f.Geophysik, Jg.14, 1938, Seite 1 - 11.

1. Das Kimura - Glied

Der erste wesentliche Fortschritt nach der Entdeckung der Polhöhen-schwankung war die Erweiterung des Ansatzes für die Erscheinung um das sogenannte z - Glied durch Kimura. Zur Darstellung der Polbahn hat man ein Koordinatensystem eingeführt, dessen x-Achse nach Greenwich gerichtet ist, während die y-Achse nach 90° westlicher Länge weist. Der Koordinatenursprung ist durch die Wahl der Mittelwerte der Polhöhen aller der Ableitung zugrundeliegenden Stationen bestimmt. Demnach ergibt sich für die Schwankungen der Stationspolhöhen die Formel :

$$\Delta \varphi = x \cos \lambda + y \sin \lambda + z \quad 1)$$

und unsere drei Stationen liefern gerade eine eindeutige Lösung :

$$\begin{aligned} x &= - 0.396 \Delta \varphi_1 + 0.591 \Delta \varphi_2 - 0.195 \Delta \varphi_3 \\ y &= - 0.621 \Delta \varphi_1 - 0.093 \Delta \varphi_2 + 0.714 \Delta \varphi_3 \\ z &= + 0.302 \Delta \varphi_1 + 0.402 \Delta \varphi_2 + 0.296 \Delta \varphi_3 \end{aligned} \quad 2)$$

Eine eingehende Diskussion des Kimuragliedes ist in der vorliegenden Arbeit nicht geplant. Hingegen erfordert die exakte Trennung der lokalen Jahresperioden in den Schwankungen der Stationspolhöhen von der erzwungenen Schwingung des Rotationspoles der Erde die prinzipielle Klärung einiger damit eng zusammenhängender Fragen. Bei den Kettenbeobachtungen des Breitendienstes werden bekanntlich je zwei Sterngruppen mit einer mittleren Rektaszensionsdifferenz von zwei Stunden beobachtet und hierzu, um die Beobachtungsstunden annähernd oder seit 1922.7 streng beibehalten zu können, zwölf Sterngruppen über das Jahr verteilt. In der sogenannten Treppenanordnung ist jede Gruppe zuerst einen Monat hindurch als "Nachtgruppe" mit der vorhergehenden und dann ebensolang als "Abendgruppe" mit der nachfolgenden zu einer Gruppenkombination vereinigt. Man erhält dadurch auf jeder Station zwei Parallelreihen von Polhöhenwerten φ_a und φ_n aus den Abend- und Nachtgruppen. Jede dieser Reihen und auch ihr arithmetisches Mittel enthält neben dem Einfluß der Polbewegung noch eine lokale Fluktuation von Jahresperiode, die entsprechend mit den Deklinationsfehlern der einzelnen Sterngruppen verknüpft ist und im übrigen Jahr für Jahr nicht unbedeutlichen Schwankungen unterliegt. Speziell für das arithmetische Mittel habe ich diese Jahresperiode als "primäres z - Glied" bezeichnet. Dieses löst sich im Mittel über mehrere Jahre meist ziemlich gut als Sinusschwingung :

$$z_p = a \sin (\odot - \alpha) \quad 3)$$

ansetzen. Am bequemsten legt man der Analyse 6 - 7-jährige Abschnitte zugrunde, im Hinblick auf die schon genannte Hauptschwebung und wegen der fallweisen Erneuerung des Sternprogramms. Aber auch die zweistündigen Differenzen aus Abend- und Nachtgruppe können nicht aus den Deklinationsfehlern allein erklärt werden. Sie zeigen vielmehr einen langperiodischen Verlauf, der in den "Schlußfehlern" S zwölfmal überhöht zutage tritt, und eine periodische Abendschwankung

b $\sin(\odot - \beta)$. Das genauere Studium der lokalen Komponente der Breitenschwankung erfordert in erster Linie eine exakte Elimination der Deklinationsfehler $\Delta \delta$. Die verschiedenen Verfahren zur Ableitung $\Delta \delta$ - freier Polhöhenreihen lassen sich als Varianten der Einführung individueller Reduktionsgrößen R gemäß :

$$(\varphi_a - \varphi_n) - \frac{1}{12} S = \Delta \delta_n - \Delta \delta_a + b \sin(\odot - \beta) = R_n - R_a \quad 4)$$

darstellen. Durch sukzessive Summation mit der Bedingung $\sum_7^{\infty} R_i = 0$ folgt hieraus das "sekundäre z - Glied" :

$$Z_s = \frac{1}{2} (R_a + R_n), \quad 5)$$

in dem sich die Periode :

$$\frac{b}{2} \cotg 15^\circ \sin(\odot - \beta - 90^\circ) \quad 6)$$

mit den Deklinationskorrekturen verbindet. In der reduzierten Polhöhenreihe :

$$\left(\frac{\varphi_a + \varphi_n}{2} \right) + \left(\frac{R_a + R_n}{2} \right) \quad 7)$$

fallen die Deklinationsfehler bis auf die Konstante $\frac{1}{12} \sum \Delta \delta$ aus, da sie im primären und sekundären z - Glied mit entgegengesetztem Vorzeichen enthalten sind. 7) Die von den Deklinationsfehlern unabhängige Summe aus dem primären und sekundären z - Glied darf als das gesamte Kimuraglied bezeichnet werden. Die Jahresperioden des sekundären z - Gliedes weisen nun erfahrungsgemäß auf den einzelnen Stationen recht verschiedene Amplituden auf. Die Folge ist, daß bei Verwendung der reduzierten Polhöhenreihen zwar die Deklinationsfehler eliminiert, dafür aber die Polkoordinaten trotz des erweiterten Ansatzes 1) durch die Perioden des sekundären z - Gliedes verfälscht werden. Um diesen Übelstand zu vermeiden, beschränkt man sich am besten auf die gänzlich unreduzierten Reihen $\left(\frac{\varphi_a + \varphi_n}{2} \right)$. Da auf allen Stationen dasselbe Sternprogramm beobachtet wird, gehen dabei die Deklinationsfehler gänzlich in das Kimuraglied ein.

Hingegen mahnt obige Erkenntnis in anderer Richtung zur Vorsicht. In Analogie zum sekundären z - Glied dürfen wir nämlich schließen, daß auch die primären z - Glieder lokal verschiedene Amplituden aufweisen. Um daher die Verfälschung der Polkoordinaten durch die primären z - Glieder zu vermeiden, leiten wir die mittleren Jahresperioden getrennt für die drei Stationen ab und versuchen nachträglich die erzwungene Schwingung des Rotationspoles abzuspalten.

7) K.Ledersteger : Der Einfluß des Kimuragliedes auf die Polkoordinaten, Zeitschr.f.Geophysik, Jg.12, 1936, Seite 48 - 58.

2. Die mittleren Jahresperioden 1900 - 1935

Wie schon erwähnt, geht man am besten von den gänzlich unreduzierten Mitteln aus den Abend- und Nachtgruppen, also direkt von den Treppenwerten aus. Bei der getrennten Behandlung der Stationen ist dies aber nicht erforderlich. Wir benützen daher für die Jahre 1900-1912 unmittelbar die in Band 3 und 5 der "Resultate des Internationalen Breitendienstes" auf den Seiten 211 - 219, resp. 169 - 178 gegebenen "definitiven" Polhöhen. Im wesentlichen handelt es sich dabei um die Größen :

$$\frac{1}{2}(\varphi_a + \varphi_n) + \frac{1}{2}(G_a + G_n), \quad 7 \text{ a)}$$

in denen die G die für alle Stationen gleichen "Gruppenreduktionen" darstellen. Abgesehen von der rohen Verwendung der Schlußfehler sind dies die Mittelwerte der individuellen Reduktionsgrößen R über alle Stationen, deren Addition die Polkoordinaten nicht berührt. Weniger einfach und in Anlehnung an Wanachs "Ableitung der Polbewegung unter Verzicht auf die Kettenmethode" gewonnen, sind die Korrekturen, mit denen Mahnkopf für den Zeitraum 1912 - 1922.7 seine Mittelwerte der beobachteten Polhöhen gebildet hat. Sie sind im 6. Bande der "Ergebnisse des Internationalen Breitendienstes" auf den Seiten 215 - 217 zusammengestellt. Abgesehen von einfachen linearen Interpolationen auf genau gleiche Epoche wurden sie ebenfalls unverändert übernommen. Auch das Verfahren Kimuras zur Ableitung der Deklinationskorrekturen und der Reduktionen auf die Gruppenmittel kann hier nicht eingehend besprochen werden. Auf den Seiten 166 - 168 des 8. Bandes der "Results of the International Latitude Service", Mizusawa 1940, hat er die Gruppenmittel getrennt für die Abend- und Morgengruppen ausgewiesen. Sie wurden jeweils auf gleiche Epoche reduziert und einfach gemittelt. Die übliche Trennung des Materials in zwei Abschnitte mit der Epoche 1922.7 wurde beibehalten.

Obwohl die angenommenen mittleren Stationspolhöhen in aller Strenge den Koordinatenursprung definieren, wurden trotzdem für die beiden Abschnitte gesondert die Stationsmittelwerte bestimmt und in Abzug gebracht. Diese Mittelwerte $\bar{\Phi}$ sind :

	1900-22.7	1922.7 -35.0	$\delta\bar{\Phi}$
Mizusawa :	03.554	03.387	- 0.167
Carloforte :	08.947	08.845	- 0.102
Ukiah :	12.111	12.045	- 0.066

Bei Zugrundelegung des Wanachschen Wertes $N = 1.185$ Jahre für die Newcombsche Periode der freien Nutation der Erdachse findet man für die aus der Jahres-schwingung resultierende Schwebung, d.h. für den Zeitraum, in dem die Jahres-schwingung die freie Schwingung um einen vollen Umlauf überholt hat, den Betrag :

$$\frac{1 \times 1.185}{1.185 - 1.000} = 6.4 \text{ Jahre .} \quad 8)$$

Wir legen daher der Ableitung der Jahresperioden im ersten Abschnitt 19 Jahre oder genähert drei Schwebungen und im 2. Abschnitt 13 Jahre entsprechend zwei Schwebungen zugrunde. Ordnet man die Werte

$$\Delta \psi = \varphi_t - \bar{\varphi} \quad 9)$$

aus Tabelle 1 nach den einzelnen Jahresbrüchen an, so findet man folgende Mittelwerte in 0%001 :

t_1	Mizusawa		Carloforte		Ukiah		t_2
	1.	2.	1.	2.	1.	2.	
-.05	+ 106	+ 116	- 42	- 47	- 4	- 5	-.06
-.12	+ 93	+ 112	- 67	- 86	+ 30	+ 26	-.14
-.19	+ 65	+ 82	- 97	- 96	+ 47	+ 74	-.23
-.25	+ 44	+ 24	- 96	- 88	+ 53	+ 73	-.31
-.32	- 16	- 38	- 83	- 74	+ 48	+ 62	-.39
-.40	- 63	- 95	- 56	- 44	+ 32	+ 24	-.48
-.48	- 106	- 116	- 16	+ 22	+ 15	+ 2	-.56
-.56	- 103	- 112	+ 35	+ 95	- 21	- 24	-.64
-.67	- 62	- 81	+ 99	+ 97	- 47	- 63	-.73
-.78	+ 7	- 27	+ 92	+ 80	- 54	- 64	-.81
-.89	+ 60	+ 21	+ 60	+ 53	- 38	- 60	-.89
-.97	+ 84	+ 64	+ 20	- 1	- 7	- 48	-.98

Für die Ausgleichung nach $\sigma \sin(2\pi t + \psi)$, wobei die Phasenkonstante wie auch stets in der Folge für die Epoche 1900.00 ($t = 0$) gelten soll, führen wir die beiden Unbekannten :

$$\xi = \sigma \cos \psi, \quad \eta = \sigma \sin \psi \quad 10)$$

ein und finden der Reihe nach :

Mizusawa	:	ξ	=	+ 43.87	,	η	=	+ 97.62
Carloforte	:			- 99.43	,			- 2.01
Ukiah	:			+ 57.04	,			- 14.76

und damit schließlich :

Mizusawa	:	0%107	sin	($2\pi t$	+	65 ⁰ .8)	
Carloforte	:	0.099	sin	($2\pi t$	+	181 ⁰ .2)	11)
Ukiah	:	0.059	sin	($2\pi t$	+	345 ⁰ .5)	

Selbstverständlich erhielt dabei jeweils der erste Abschnitt das Gewicht 3 und der zweite Abschnitt das Gewicht 2.

Die bisherigen Analysen der Polkoordinaten bestätigen zur Genüge, daß man die erzwungene Schwingung schon in Anbetracht der großen Veränderlichkeit ihrer Amplitude im Mittel über größere Zeitabschnitte als eine Kreisschwingung auffassen darf. Setzt man demnach an :

$$x = \tau \sin(2\pi t + \chi), \quad y = \tau \cos(2\pi t + \chi), \quad 12)$$

so findet man auf einer Station der Länge λ die jährliche Polhöhenchwankung :

$$\sigma \sin (2\pi t + \psi) = \tau \sin (2\pi t + \chi + \lambda) + c \sin (2\pi t + \gamma), \quad (13)$$

in der der zweite Summand rechter Hand das lokale Kimuraglied darstellt. Nach den obigen Bemerkungen über die verschiedene Reduktionsweise sind diese lokalen Kimuraglieder gar nicht streng einheitlich und wären daher für eine Erörterung der lokalen Komponente der Breitenvariation nicht geeignet. Unsere drei Stationen ($i = 1, 2, 3$) liefern also 6 Bestimmungsgleichungen mit 8 Unbekannten :

$$\begin{aligned} \sigma_i \cos \psi_i &= u \cos \lambda_i - v \sin \lambda_i + c_i \cos \gamma_i \\ \sigma_i \sin \psi_i &= u \sin \lambda_i + v \cos \lambda_i + c_i \sin \gamma_i \end{aligned} \quad (14)$$

$$(u = \tau \cos \chi, v = \tau \sin \chi)$$

Ignoriert man die z-Glieder, so ergibt einfache Ausgleichung :

$$\tau = 0.086, \quad \chi = 204^\circ \quad (15)$$

Wesentlich korrekter ist aber der Vorgang, für die Kimuraglieder zwar verschiedene Amplituden, jedoch Phasengleichheit vorauszusetzen. Mit $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$ reduziert sich die Zahl der Unbekannten auf 6 und wir gewinnen eine eindeutige Lösung. Die Konstanz von $\cotg \gamma$ führt dann auf die beiden quadratischen Gleichungen :

$$\begin{aligned} 9568.6680 + 1634.2312 u' + 491.7839 v' + 73.4047 (u'^2 + v'^2) &= 0 \\ 6222.1530 + 1375.6733 u' + 928.6847 v' + 99.6167 (u'^2 + v'^2) &= 0 \end{aligned}$$

und deren Auflösung auf :

$$u = 10 u' = -89.7, \quad v = 10 v' = -30.2$$

$$\text{oder : } \tau = 0.094.7, \quad \chi = 198^\circ 38', \quad \gamma = 111^\circ 38' \quad (16)$$

Die Perioden 11) sind damit in ihre beiden Komponenten zerlegt :

$$\begin{aligned} \text{Miz. : } & 0.095 \sin (2\pi t + 57^\circ 30') + 0.019 \sin (2\pi t + 111^\circ 38') \\ \text{Carl. : } & 0.095 \sin (2\pi t + 190^\circ 19') + 0.016 \sin (2\pi t + 111^\circ 38') \\ \text{Ukiah : } & 0.095 \sin (2\pi t + 321^\circ 51') + 0.047 \sin (2\pi t + 111^\circ 38'). \end{aligned} \quad (17)$$

Wie erwartet, weisen die z-Glieder beträchtliche Unterschiede in den Amplituden auf. Ihre Vernachlässigung würde bei unmittelbarer Verwendung der Gleichungen 2) die Polbahn verfälschen. Die Polbahn der Kimuraglieder wäre in unserem Falle :

$$\begin{aligned} x &= -0.007 \sin (2\pi t + 111.6) \\ y &= +0.020 \sin (2\pi t + 111.6), \end{aligned}$$

mithin eine Schwingung von merkbarer Elliptizität. Es darf allerdings nicht übersehen werden, daß auch die Lösung 16) nicht ganz der Wahrheit entsprechen wird. Denn unsere drei Stationen liegen zwar auf demselben Parallelkreis, aber sonst in klimatisch doch nicht soweit übereinstimmenden Gebieten, als daß die Annahme absolut gleicher Phasen für die z-Glieder widerspruchslos hingenommen werden könnte. Doch ist ein wesentlicher Fehler aus dieser Voraussetzung nicht zu befürchten, wie die nahe Übereinstimmung der beiden Lösungen 15) und 16) lehrt.

In Tabelle 1) wurden von den Schwankungen der Stationspolhöhen die

individuellen Perioden 11) abgezogen. Damit scheiden jedenfalls für die weitere Behandlung sowohl die mittlere erzwungene Schwingung wie auch die Kimuraglieder aus und es bleiben allein jene Schwankungen über, die man gewöhnlich als Chandlersche Periode (Ch) bezeichnet. Bequemlichkeitshalber seien die Werte der individuellen Jahresperioden für die einzelnen Jahresbrüche, gesondert für die beiden Abschnitte, ausgewiesen :

1900 - 22.7				1922.7 - 35.0			
t	Mi	Ca	Uk	t	Mi	Ca	Uk
-.05	+ 106	- 33	+ 4	-.06	+ 107	- 38	+ 7
-.12	+ 101	- 70	+ 28	-.14	+ 96	- 78	+ 35
-.19	+ 77	- 93	+ 48	-.23	+ 55	- 99	+ 55
-.25	+ 44	- 99	+ 57	-.31	+ 5	- 92	+ 58
-.32	- 2	- 89	+ 58	-.39	- 47	- 62	+ 48
-.40	- 53	- 57	+ 45	-.48	- 91	- 10	+ 22
-.48	- 91	- 10	+ 22	-.56	- 107	+ 38	- 7
-.56	- 107	+ 38	- 7	-.64	- 96	+ 78	- 35
-.67	- 85	+ 88	- 43	-.73	- 55	+ 99	- 55
-.78	- 25	+ 97	- 59	-.81	- 5	+ 92	- 58
-.89	+ 47	+ 62	- 48	-.89	+ 47	+ 62	- 48
-.97	+ 88	+ 16	- 25	-.98	+ 91	+ 10	- 22

Der "Provisional report" Kimuras für das Jahr 1935 steht leider nicht zur Verfügung, sodaß hier eine Lücke in unserem Material klafft. Im Jahre 1936 ging die Leitung des internationalen Breitendienstes an L.Carnera über und wir können für 1936 und 1937 die Polhöhenchwankungen der drei Stationen seinen Jahresberichten ⁸⁾ entnehmen. Dies ermöglicht es, die Tabelle 1) mit Ausnahme des Jahres 1935 bis Ende 1937 auszudehnen.

8) L.Carnera : Il movimento del Polo di rotazione terrestre nel 1936, Astr. Nachr., Band 263, Spalte 17 - 32 .

L.Carnera : Il movimento del Polo di rotazione terrestre nel 1937, Astr. Nachr., Band 266, Spalte 181 - 196 .

Tabelle 1 : Die Schwankungen der Stationspolhöhen.

<i>t</i>	Mizusawa			Carloforte			Ukiah		
	φ_t	$\Delta\varphi$	<i>Ch</i>	φ_t	$\Delta\varphi$	<i>Ch</i>	φ_t	$\Delta\varphi$	<i>Ch</i>
1899.97	03°573	+ 19	- 69	08°998	+ 51	+ 35	12°243	+ 132	+ 157
1900.05	546	- 8	- 114	9.013	+ 66	+ 99	084	- 27	- 31
12	579	+ 25	- 76	9.014	+ 67	+ 137	077	- 34	- 62
19	590	+ 36	- 41	8.972	+ 25	+ 118	033	- 78	- 126
25	600	+ 46	+ 2	8.955	+ 8	+ 107	036	- 75	- 132
32	635	+ 81	+ 83	8.896	- 51	+ 38	009	- 102	- 160
40	651	+ 97	+ 150	8.827	- 120	- 63	11.970	- 141	- 186
48	640	+ 86	+ 177	8.863	- 84	- 74	978	- 133	- 155
56	653	+ 99	+ 206	8.860	- 87	- 125	12.020	- 91	- 84
67	634	+ 80	+ 165	8.850	- 97	- 185	103	- 8	+ 35
78	640	+ 86	+ 111	8.870	- 77	- 174	149	+ 38	+ 97
89	700	+ 146	+ 99	8.913	- 34	- 96	189	+ 78	+ 126
97	680	+ 126	+ 38	9.000	+ 53	+ 37	191	+ 80	+ 105
1901.05	549	+ 95	- 11	9.001	+ 54	+ 87	168	+ 57	+ 53
12	640	+ 86	- 15	9.031	+ 84	+ 154	108	- 3	- 31
19	551	- 3	- 80	8.978	+ 31	+ 124	091	- 20	- 68
25	517	- 37	- 81	8.978	+ 31	+ 130	081	- 30	- 87
32	505	- 49	- 47	9.011	+ 64	+ 153	035	- 76	- 134
40	551	- 3	+ 50	9.010	+ 63	+ 120	11.975	- 136	- 181
48	528	- 26	+ 65	9.050	+ 103	+ 113	891	- 220	- 242
56	572	+ 18	+ 125	9.001	+ 54	+ 16	888	- 223	- 216
67	666	+ 112	+ 197	9.046	+ 99	+ 11	953	- 158	- 115
78	718	+ 164	+ 189	8.957	+ 10	- 87	990	- 121	- 62
89	793	+ 239	+ 192	8.942	- 5	- 67	12.065	- 46	+ 2
97	787	+ 233	+ 145	8.896	- 51	- 67	130	+ 19	+ 44
1902.05	668	+ 114	+ 8	8.860	- 87	- 54	186	+ 75	+ 71
12	625	+ 71	- 30	8.830	- 117	- 47	206	+ 95	+ 67
19	571	+ 17	- 60	8.807	- 140	- 47	164	+ 53	+ 5
25	539	- 15	- 59	8.837	- 110	- 11	135	+ 24	- 33
32	406	- 148	- 146	8.905	- 42	+ 47	148	+ 37	- 21
40	364	- 190	- 137	8.966	+ 19	+ 76	057	- 54	- 99
48	354	- 200	- 109	9.040	+ 93	+ 103	11.954	- 157	- 179
56	388	- 166	- 59	9.084	+ 137	+ 99	922	- 189	- 182
67	523	- 31	+ 54	9.109	+ 162	+ 74	910	- 201	- 158
78	680	+ 126	+ 151	9.055	+ 108	+ 11	954	- 157	- 98
89	783	+ 229	+ 182	8.939	- 8	- 70	992	- 119	- 71
97	809	+ 255	+ 167	8.836	- 111	- 127	12.077	- 34	- 9
1903.05	776	+ 222	+ 116	8.766	- 181	- 148	169	+ 58	+ 54
12	788	+ 234	+ 133	8.743	- 204	- 134	231	+ 120	+ 92
19	650	+ 96	+ 19	8.759	- 188	- 95	256	+ 145	+ 97
25	605	+ 51	+ 7	8.746	- 201	- 102	250	+ 139	+ 82
32	538	- 16	- 14	8.803	- 144	- 55	246	+ 135	+ 77
40	424	- 130	- 77	8.882	- 65	- 8	195	+ 84	+ 39
48	363	- 191	- 100	8.942	- 5	+ 5	178	+ 67	+ 45
56	356	- 198	- 91	9.035	+ 88	+ 50	109	- 2	+ 5
67	415	- 139	- 54	9.147	+ 200	+ 112	016	- 95	- 52
78	542	- 12	+ 13	9.132	+ 185	+ 88	11.966	- 145	- 86
89	663	+ 109	+ 62	9.091	+ 144	+ 82	977	- 134	- 86
97	746	+ 192	+ 104	9.001	+ 54	+ 38	12.032	- 79	- 54
1904.05	831	+ 277	+ 171	8.867	- 80	- 47	050	- 61	- 65
12	819	+ 265	+ 164	8.806	- 141	- 71	138	+ 27	- 1
19	780	+ 226	+ 149	8.760	- 187	- 94	147	+ 36	- 12
25	725	+ 171	+ 127	8.777	- 170	- 71	208	+ 97	+ 40
32	680	+ 126	+ 128	8.770	- 177	- 88	227	+ 116	+ 58
40	558	+ 4	+ 57	8.822	- 125	- 68	277	+ 166	+ 121
48	477	- 77	+ 14	8.889	- 58	- 48	260	+ 149	+ 127
56	451	- 103	+ 4	8.992	+ 45	+ 7	217	+ 106	+ 113
67	439	- 115	- 30	9.098	+ 151	+ 63	167	+ 56	+ 99
78	454	- 100	- 75	9.146	+ 199	+ 102	088	- 23	+ 36
89	577	+ 23	- 24	9.125	+ 178	+ 116	026	- 85	- 37
97	609	+ 55	- 33	9.096	+ 149	+ 133	000	- 111	- 86
1905.05	692	+ 138	+ 32	9.021	+ 74	+ 107	002	- 109	- 113
12	735	+ 181	+ 80	8.946	- 1	+ 69	028	- 83	- 111
19	789	+ 235	+ 158	8.836	- 111	- 18	085	- 26	- 74
25	721	+ 167	+ 123	8.799	- 148	- 49	098	- 13	- 70
32	695	+ 141	+ 143	8.778	- 169	- 80	149	+ 38	- 20
40	626	+ 72	+ 125	8.784	- 163	- 106	202	+ 91	+ 46
48	558	+ 4	+ 95	8.808	- 139	- 129	184	+ 73	+ 51

t	Mizusawa			Carloforte			Ukiah		
	φ_t	$\Delta\varphi$	Ch	φ_t	$\Delta\varphi$	Ch	φ_t	$\Delta\varphi$	Ch
1905.56	03:520	- 34	+ 73	08:887	- 60	- 98	12:234	+ 123	+ 130
67	462	- 92	- 7	9.020	+ 73	- 15	219	+ 108	+ 151
78	462	- 92	- 67	9.094	+ 147	+ 50	167	+ 56	+ 115
89	518	- 36	- 83	9.148	+ 201	+ 139	094	- 17	+ 31
97	555	+ 1	- 87	9.114	+ 167	+ 151	042	- 69	- 44
1906.05	649	+ 95	- 11	9.053	+ 106	+ 139	022	- 89	- 93
12	655	+ 101	- 0	8.993	+ 46	+ 116	008	- 103	- 131
19	644	+ 90	+ 13	8.934	- 13	+ 80	022	- 89	- 137
25	629	+ 75	+ 31	8.871	- 76	+ 23	021	- 90	- 147
32	659	+ 105	+ 107	8.821	- 126	- 37	030	- 81	- 139
40	643	+ 89	+ 142	8.756	- 191	- 134	060	- 51	- 96
48	611	+ 57	+ 148	8.763	- 184	- 174	125	+ 14	- 8
56	597	+ 43	+ 150	8.790	- 157	- 195	154	+ 43	+ 50
67	598	+ 44	+ 129	8.910	- 37	- 125	179	+ 68	+ 111
78	593	+ 39	+ 64	8.962	+ 15	- 82	187	+ 76	+ 135
89	577	+ 23	- 24	8.999	+ 52	- 10	244	+ 133	+ 181
97	545	- 9	- 97	9.019	+ 72	+ 56	221	+ 110	+ 135
1907.05	502	- 52	- 158	8.999	+ 52	+ 85	121	+ 10	+ 6
12	519	- 35	- 136	8.999	+ 52	+ 122	077	- 34	- 62
19	527	- 27	- 104	8.969	+ 22	+ 115	049	- 62	- 110
25	533	- 21	- 65	8.965	+ 18	+ 117	005	- 106	- 163
32	538	- 16	- 14	8.956	+ 9	+ 98	11.948	- 163	- 221
40	577	+ 23	+ 76	8.892	- 55	+ 2	951	- 160	- 205
48	614	+ 60	+ 151	8.880	- 67	- 57	962	- 149	- 171
56	639	+ 85	+ 192	8.885	- 62	- 100	964	- 147	- 140
67	701	+ 147	+ 232	8.893	- 54	- 142	12.077	- 34	+ 9
78	766	+ 212	+ 237	8.828	- 119	- 216	193	+ 82	+ 141
89	655	+ 101	+ 54	8.826	- 121	- 183	291	+ 180	+ 228
97	563	+ 9	- 79	8.833	- 114	- 130	290	+ 179	+ 204
1908.05	479	- 75	- 181	8.862	- 85	- 52	300	+ 189	+ 185
12	462	- 92	- 193	8.929	- 18	+ 52	253	+ 142	+ 114
19	416	- 138	- 215	8.987	+ 40	+ 133	131	+ 20	- 28
25	425	- 129	- 173	9.056	+ 109	+ 208	114	+ 3	- 54
32	350	- 204	- 202	9.050	+ 103	+ 192	11.984	- 127	- 185
40	398	- 156	- 103	9.085	+ 138	+ 195	880	- 231	- 276
48	436	- 118	- 27	9.088	+ 141	+ 151	823	- 288	- 310
56	537	- 17	+ 90	9.069	+ 122	+ 84	812	- 299	- 292
67	691	+ 137	+ 222	9.010	+ 63	- 25	871	- 240	- 197
78	825	+ 271	+ 296	8.896	- 51	- 148	12.008	- 103	- 44
89	898	+ 344	+ 297	8.760	- 187	- 249	158	+ 47	+ 95
97	863	+ 309	+ 221	8.724	- 223	- 239	250	+ 139	+ 164
1909.05	811	+ 257	+ 151	8.640	- 307	- 274	315	+ 204	+ 200
12	692	+ 138	+ 37	8.680	- 267	- 197	374	+ 263	+ 235
19	591	+ 37	- 40	8.690	- 257	- 164	437	+ 326	+ 278
25	512	- 42	- 86	8.767	- 180	- 81	415	+ 304	+ 247
32	340	- 214	- 212	8.864	- 83	+ 6	292	+ 181	+ 123
40	243	- 311	- 258	8.997	+ 50	+ 107	142	+ 31	- 14
48	210	- 344	- 253	9.097	+ 150	+ 160	051	- 60	- 82
56	273	- 281	- 174	9.205	+ 258	+ 220	11.930	- 181	- 174
67	479	- 75	+ 10	9.279	+ 332	+ 244	845	- 266	- 223
78	660	+ 106	+ 131	9.165	+ 218	+ 121	875	- 236	- 177
89	861	+ 307	+ 260	8.981	+ 34	- 28	964	- 147	- 99
97	952	+ 398	+ 310	8.875	- 72	- 88	12.076	- 35	- 10
1910.05	954	+ 400	+ 294	8.790	- 157	- 124	092	- 19	- 23
12	876	+ 322	+ 221	8.709	- 238	- 168	234	+ 123	+ 95
19	840	+ 286	+ 209	8.645	- 302	- 209	366	+ 255	+ 207
25	758	+ 204	+ 160	8.627	- 320	- 221	406	+ 295	+ 238
32	570	+ 16	+ 18	8.642	- 305	- 216	445	+ 334	+ 276
40	415	- 139	- 86	8.770	- 177	- 120	380	+ 269	+ 224
48	277	- 277	- 186	8.901	- 46	- 36	287	+ 176	+ 154
56	220	- 334	- 227	9.091	+ 144	+ 106	224	+ 113	+ 120
67	305	- 249	- 164	9.254	+ 307	+ 219	040	- 71	- 28
78	477	- 77	- 52	9.305	+ 358	+ 261	11.904	- 207	- 148
89	630	+ 76	+ 29	9.240	+ 293	+ 231	858	- 253	- 205
97	772	+ 218	+ 130	9.109	+ 162	+ 146	911	- 200	- 175
1911.05	856	+ 302	+ 196	8.959	+ 12	+ 45	12.000	- 111	- 115
12	915	+ 361	+ 260	8.870	- 77	- 7	110	- 1	- 29
19	854	+ 300	+ 223	8.747	- 200	- 107	197	+ 86	+ 38
25	858	+ 304	+ 260	8.674	- 273	- 174	237	+ 126	+ 69
32	725	+ 171	+ 173	8.653	- 294	- 205	247	+ 136	+ 78

t	Mizusawa			Carloforte			Ukiah		
	φ_t	$\Delta\varphi$	Ch	φ_t	$\Delta\varphi$	Ch	φ_t	$\Delta\varphi$	Ch
1911.40	03:567	+ 13	+ 66	08:661	- 286	- 229	12:320	+ 209	+ 164
48	459	- 95	- 4	8.686	- 261	- 251	364	+ 253	+ 231
56	345	- 209	- 102	8.836	- 111	- 149	331	+ 220	+ 227
67	322	- 232	- 147	9.051	+ 104	+ 16	309	+ 198	+ 241
78	340	- 214	- 189	9.177	+ 230	+ 133	173	+ 62	+ 121
89	393	- 161	- 208	9.247	+ 300	+ 238	085	- 26	+ 22
97	528	- 26	- 114	9.228	+ 281	+ 265	031	- 80	- 55
1912.05	546	- 8	- 114	9.070	+ 123	+ 156	11.956	- 155	- 159
12	598	+ 44	- 57	9.016	+ 69	+ 139	12.016	- 95	- 123
19	676	+ 122	+ 45	8.911	- 36	+ 57	11.974	- 137	- 185
25	752	+ 198	+ 154	8.869	- 78	+ 21	12.010	- 101	- 158
32	726	+ 172	+ 174	8.836	- 111	- 22	113	+ 2	- 56
40	733	+ 179	+ 232	8.792	- 155	- 98	221	+ 110	+ 65
48	632	+ 78	+ 169	8.759	- 188	- 178	184	+ 73	+ 51
56	584	+ 30	+ 137	8.775	- 172	- 210	244	+ 133	+ 140
67	540	- 14	+ 71	8.778	- 169	- 257	244	+ 133	+ 176
78	510	- 44	- 19	8.876	- 71	- 168	273	+ 162	+ 221
89	367	- 187	- 234	8.958	+ 11	- 51	267	+ 156	+ 204
97	396	- 158	- 246	8.996	+ 49	+ 33	191	+ 80	+ 105
1913.05	440	- 114	- 220	9.008	+ 61	+ 94	144	+ 33	+ 29
12	418	- 136	- 237	9.017	+ 70	+ 140	111	- 0	- 28
19	495	- 59	- 136	9.053	+ 106	+ 199	011	- 100	- 148
25	551	- 3	- 47	9.082	+ 135	+ 234	11.976	- 135	- 192
32	540	- 14	- 12	9.064	+ 117	+ 206	972	- 139	- 197
40	551	- 3	+ 50	9.051	+ 104	+ 161	951	- 160	- 205
48	526	- 28	+ 63	9.006	+ 59	+ 69	989	- 122	- 144
56	652	+ 98	+ 205	8.936	- 11	- 49	978	- 133	- 126
67	670	+ 116	+ 201	8.897	- 50	- 138	12.042	- 69	- 26
78	668	+ 114	+ 139	8.802	- 145	- 242	168	+ 57	+ 116
89	583	+ 29	- 18	8.790	- 157	- 219	224	+ 113	+ 161
97	537	- 17	- 105	8.766	- 181	- 197	271	+ 160	+ 185
1914.05	550	- 4	- 110	8.800	- 147	- 114	279	+ 168	+ 164
12	465	- 89	- 190	8.812	- 135	- 65	262	+ 151	+ 123
19	392	- 162	- 239	8.899	- 48	+ 45	223	+ 112	+ 64
25	376	- 178	- 222	8.965	+ 18	+ 117	146	+ 35	- 22
32	355	- 199	- 197	9.029	+ 82	+ 171	070	- 41	- 99
40	351	- 203	- 150	9.042	+ 95	+ 152	097	- 14	- 59
48	408	- 146	- 55	9.073	+ 126	+ 136	026	- 85	- 107
56	470	- 84	+ 23	9.080	+ 133	+ 95	11.982	- 129	- 122
67	570	+ 16	+ 101	9.000	+ 53	- 35	973	- 138	- 95
78	696	+ 142	+ 167	8.919	- 28	- 125	994	- 117	- 58
89	718	+ 164	+ 117	8.795	- 152	- 214	12.136	+ 25	+ 73
97	653	+ 99	+ 11	8.712	- 235	- 251	234	+ 123	+ 148
1915.05	671	+ 117	+ 11	8.643	- 304	- 271	267	+ 156	+ 152
12	567	+ 13	- 88	8.632	- 315	- 245	319	+ 208	+ 180
19	531	- 23	- 100	8.675	- 272	- 179	366	+ 255	+ 207
25	459	- 95	- 139	8.755	- 192	- 93	356	+ 245	+ 188
32	336	- 218	- 216	8.821	- 126	- 37	359	+ 248	+ 190
40	326	- 228	- 175	8.925	- 22	+ 35	204	+ 93	+ 48
48	244	- 310	- 219	9.026	+ 79	+ 89	207	+ 96	+ 74
56	269	- 285	- 178	9.071	+ 124	+ 86	056	- 55	- 48
67	344	- 210	- 125	9.122	+ 175	+ 87	11.917	- 194	- 151
78	497	- 57	- 32	9.034	+ 87	- 10	881	- 230	- 171
89	646	+ 92	+ 45	8.923	- 24	- 86	917	- 194	- 146
97	716	+ 162	+ 74	8.822	- 125	- 141	12.075	- 36	- 11
1916.05	764	+ 210	+ 104	8.727	- 220	- 187	077	- 34	- 38
12	738	+ 184	+ 83	8.710	- 237	- 167	149	+ 38	+ 10
19	636	+ 82	+ 5	8.634	- 313	- 220	299	+ 188	+ 140
25	577	+ 23	- 21	8.622	- 325	- 226	375	+ 264	+ 207
32	520	- 34	- 32	8.693	- 254	- 165	380	+ 269	+ 211
40	387	- 167	- 114	8.816	- 131	- 74	393	+ 282	+ 237
48	309	- 245	- 154	8.897	- 50	- 40	320	+ 209	+ 187
56	276	- 278	- 171	9.019	+ 72	+ 34	227	+ 116	+ 123
67	302	- 252	- 167	9.156	+ 209	+ 121	11.994	- 117	- 74
78	350	- 204	- 179	9.194	+ 247	+ 150	959	- 152	- 93
89	488	- 66	- 113	9.100	+ 153	+ 91	835	- 276	- 228
97	574	+ 20	- 68	9.012	+ 65	+ 49	904	- 207	- 182
1917.05	680	+ 126	+ 20	8.855	- 92	- 59	942	- 169	- 173
12	672	+ 118	+ 17	8.808	- 139	- 69	996	- 115	- 143
19	702	+ 148	+ 71	8.744	- 203	- 110	12.106	- 5	- 53

<i>t</i>	Mizusawa			Carloforte			Ukiah		
	φ_t	$\Delta\varphi$	<i>Ch</i>	φ_t	$\Delta\varphi$	<i>Ch</i>	φ_t	$\Delta\varphi$	<i>Ch</i>
1917.25	03 ^m 723	+ 169	+ 125	08 ^m 709	- 238	- 139	12 ^m 188	+ 77	+ 20
32	608	+ 54	+ 56	8.718	- 229	- 140	261	+ 150	+ 92
40	510	- 44	+ 9	8.762	- 185	- 128	281	+ 170	+ 125
48	458	- 96	- 5	8.845	- 102	- 92	344	+ 233	+ 211
56	388	- 166	- 59	8.901	- 46	- 84	266	+ 155	+ 162
67	332	- 222	- 137	9.032	+ 85	- 3	206	+ 95	+ 138
78	411	- 143	- 118	9.080	+ 133	+ 36	102	- 9	+ 50
89	445	- 109	- 156	9.063	+ 116	+ 54	021	- 90	- 42
97	485	- 69	- 157	9.056	+ 109	+ 93	11.991	- 120	- 95
1918.05	594	+ 40	- 66	8.988	+ 41	+ 74	937	- 174	- 178
12	652	+ 98	- 3	8.916	- 31	+ 39	12.053	- 58	- 86
19	634	+ 80	+ 3	8.891	- 56	+ 37	114	+ 3	- 45
25	612	+ 58	+ 14	8.857	- 90	+ 9	133	+ 22	- 35
32	604	+ 50	+ 52	8.832	- 115	- 26	189	+ 78	+ 20
40	575	+ 21	+ 74	8.819	- 128	- 71	240	+ 129	+ 84
48	529	- 25	+ 66	8.806	- 141	- 131	337	+ 226	+ 204
56	490	- 64	+ 43	8.875	- 72	- 110	229	+ 118	+ 125
67	462	- 92	- 7	8.965	+ 18	- 70	229	+ 118	+ 161
78	484	- 70	- 45	8.993	+ 46	- 51	124	+ 13	+ 72
89	486	- 68	- 115	9.027	+ 80	+ 18	121	+ 10	+ 58
97	467	- 87	- 175	9.013	+ 66	+ 50	131	+ 20	+ 45
1919.05	461	- 93	- 199	9.006	+ 59	+ 92	111	- 0	- 4
12	501	- 53	- 154	8.960	+ 13	+ 83	115	+ 4	- 24
19	512	- 42	- 119	8.992	+ 45	+ 138	186	+ 75	+ 27
25	508	- 46	- 90	9.014	+ 67	+ 166	061	- 50	- 107
32	567	+ 13	+ 15	9.022	+ 75	+ 164	043	- 68	- 126
40	516	- 38	+ 15	9.001	+ 54	+ 111	071	- 40	- 85
48	552	- 2	+ 89	9.004	+ 57	+ 67	065	- 46	- 68
56	589	+ 35	+ 142	8.984	+ 37	- 1	035	- 76	- 69
67	629	+ 75	+ 160	8.939	- 8	- 96	126	+ 15	+ 58
78	651	+ 97	+ 122	8.973	+ 26	- 71	171	+ 60	+ 119
89	624	+ 70	+ 23	8.864	- 83	- 145	183	+ 72	+ 120
97	562	+ 8	- 80	8.899	- 48	- 64	242	+ 131	+ 156
1920.05	445	- 109	- 215	8.905	- 42	- 9	227	+ 116	+ 112
12	486	- 68	- 169	8.980	+ 33	+ 103	193	+ 82	+ 54
19	500	- 54	- 131	8.982	+ 35	+ 128	279	+ 168	+ 120
25	433	- 121	- 165	9.025	+ 78	+ 177	156	+ 45	- 12
32	398	- 156	- 154	9.071	+ 124	+ 213	145	+ 34	- 24
40	412	- 142	- 89	9.116	+ 169	+ 226	034	- 77	- 122
48	438	- 116	- 25	9.148	+ 201	+ 211	11.992	- 119	- 141
56	484	- 70	+ 37	9.160	+ 213	+ 175	967	- 144	- 137
67	558	+ 4	+ 89	9.126	+ 179	+ 91	905	- 206	- 163
78	628	+ 74	+ 99	9.049	+ 102	+ 5	938	- 173	- 114
89	692	+ 138	+ 91	8.971	+ 24	- 38	12.007	- 104	- 56
97	710	+ 156	+ 68	8.886	- 61	- 77	098	- 13	+ 12
1921.05	650	+ 96	- 10	8.843	- 104	- 71	153	+ 42	+ 38
12	646	+ 92	- 9	8.838	- 109	- 39	241	+ 130	+ 102
19	635	+ 81	+ 4	8.890	- 57	+ 36	199	+ 88	+ 40
25	550	- 4	- 48	8.931	- 16	+ 83	190	+ 79	+ 22
32	497	- 57	- 55	8.985	+ 38	+ 127	175	+ 64	+ 6
40	380	- 174	- 121	9.072	+ 125	+ 182	095	- 16	- 61
48	396	- 158	- 67	9.144	+ 197	+ 207	041	- 70	- 92
56	398	- 156	- 48	9.180	+ 233	+ 195	022	- 89	- 82
67	454	- 100	- 15	9.183	+ 236	+ 148	11.946	- 165	- 122
78	584	+ 30	+ 55	9.127	+ 180	+ 83	928	- 183	- 124
89	602	+ 48	+ 1	9.005	+ 58	- 4	985	- 126	- 78
97	634	+ 80	- 8	8.977	+ 30	+ 14	12.053	- 58	- 33
1922.05	638	+ 84	- 22	8.846	- 101	- 68	186	+ 75	+ 71
12	678	+ 124	+ 23	8.845	- 102	- 32	205	+ 94	+ 66
19	605	+ 51	- 26	8.836	- 111	- 18	236	+ 125	+ 77
25	537	- 17	- 61	8.874	- 73	+ 26	280	+ 169	+ 112
32	497	- 57	- 55	8.923	- 24	+ 65	268	+ 157	+ 99
40	414	- 140	- 87	9.008	+ 61	+ 118	231	+ 120	+ 75
48	366	- 188	- 97	9.072	+ 125	+ 135	129	+ 18	- 4
56	371	- 183	- 76	9.179	+ 232	+ 194	047	- 64	- 57
67	344	- 210	- 125	9.227	+ 280	+ 192	11.938	- 173	- 130
73	285	- 102	- 47	9.047	+ 202	+ 103	796	- 249	- 194
81	367	- 20	- 15	9.014	+ 169	+ 77	768	- 277	- 219
89	407	+ 20	- 27	8.930	+ 85	+ 23	812	- 233	- 185

<i>t</i>	Mizusawa			Carloforte			Ukiah		
	φ_t	$\Delta\varphi$	<i>Ch</i>	φ_t	$\Delta\varphi$	<i>Ch</i>	φ_t	$\Delta\varphi$	<i>Ch</i>
1922.98	03°500	+ 113	+ 22	08°793	- 52	- 62	11°829	- 216	- 194
1923.06	516	+ 129	+ 22	8.744	- 101	- 63	935	- 110	- 117
14	540	+ 153	+ 57	8.722	- 123	- 45	12.010	- 35	- 70
23	532	+ 145	+ 90	8.691	- 154	- 55	112	+ 67	+ 12
31	436	+ 49	+ 44	8.716	- 129	- 37	144	+ 99	+ 41
39	363	- 24	+ 23	8.750	- 95	- 33	190	+ 145	+ 97
48	285	- 102	- 11	8.829	- 16	- 6	159	+ 114	+ 92
56	238	- 149	- 42	8.905	+ 60	+ 22	084	+ 39	+ 46
64	178	- 209	- 113	9.006	+ 161	+ 83	052	+ 7	+ 42
73	200	- 187	- 132	9.036	+ 191	+ 92	11.946	- 99	- 44
81	220	- 167	- 162	9.022	+ 177	+ 85	902	- 143	- 85
89	296	- 91	- 138	8.985	+ 140	+ 78	875	- 170	- 122
98	386	- 1	- 92	8.907	+ 62	+ 52	903	- 142	- 120
1924.06	485	+ 98	- 9	8.865	+ 20	+ 58	958	- 87	- 94
14	496	+ 109	+ 13	8.798	- 47	+ 31	990	- 55	- 90
23	491	+ 104	+ 49	8.764	- 81	+ 18	12.110	+ 65	+ 10
31	456	+ 69	+ 64	8.755	- 90	+ 2	090	+ 45	- 13
39	405	+ 18	+ 65	8.737	- 108	- 46	105	+ 60	+ 12
48	365	- 22	+ 69	8.758	- 87	- 77	115	+ 70	+ 48
56	330	- 57	+ 50	8.828	- 17	- 55	089	+ 44	+ 51
64	256	- 131	- 35	8.902	+ 57	- 21	052	+ 7	+ 42
73	265	- 122	- 67	8.917	+ 72	- 27	11.995	- 50	+ 5
81	283	- 104	- 99	8.926	+ 81	- 11	975	- 70	- 12
89	283	- 104	- 151	8.903	+ 58	- 4	957	- 88	- 40
98	372	- 15	- 106	8.905	+ 60	+ 50	931	- 114	- 92
1925.06	409	+ 22	- 85	8.876	+ 31	+ 69	930	- 115	- 122
14	530	+ 143	+ 47	8.848	+ 3	+ 81	953	- 92	- 127
23	489	+ 102	+ 47	8.814	- 31	+ 68	986	- 59	- 114
31	551	+ 164	+ 159	8.803	- 42	+ 50	12.041	- 4	- 62
39	413	+ 26	+ 73	8.830	- 15	+ 47	021	- 24	- 72
48	392	+ 5	+ 96	8.805	- 40	- 30	013	- 32	- 54
56	398	+ 11	+ 118	8.842	- 3	- 41	035	- 10	- 3
64	366	- 21	+ 75	8.909	+ 64	- 14	11.982	- 63	- 28
73	357	- 30	+ 25	8.890	+ 45	- 54	921	- 124	- 69
81	342	- 45	- 40	8.906	+ 61	- 31	936	- 109	- 51
89	373	- 14	- 61	8.895	+ 50	- 12	926	- 119	- 71
98	414	+ 27	- 64	8.830	- 15	- 25	942	- 103	- 81
1926.06	504	+ 117	+ 10	8.909	+ 64	+ 102	949	- 96	- 103
14	570	+ 183	+ 87	8.851	+ 6	+ 84	12.024	- 21	- 56
23	568	+ 181	+ 126	8.829	- 16	+ 83	101	+ 56	+ 1
31	487	+ 100	+ 95	8.781	- 64	+ 28	090	+ 45	- 13
39	477	+ 90	+ 137	8.786	- 59	+ 3	094	+ 49	+ 1
48	396	+ 9	+ 100	8.792	- 53	- 43	084	+ 39	+ 17
56	341	- 46	+ 61	8.822	- 23	- 61	054	+ 9	+ 16
64	341	- 46	+ 50	8.869	+ 24	- 54	080	+ 35	+ 70
73	320	- 67	- 12	8.886	+ 41	- 58	000	- 45	+ 10
81	354	- 33	- 28	8.891	+ 46	- 46	008	- 37	+ 21
89	354	- 33	- 80	8.863	+ 18	- 44	057	+ 12	+ 60
98	390	+ 3	- 88	8.876	+ 31	+ 21	018	- 27	- 5
1927.06	417	+ 30	- 77	8.860	+ 15	+ 53	035	- 10	- 17
14	370	- 17	- 113	8.926	+ 81	+ 159	11.987	- 58	- 93
23	466	+ 79	+ 24	8.876	+ 31	+ 130	12.018	- 27	- 82
31	412	+ 25	+ 20	8.872	+ 27	+ 119	000	- 45	- 103
39	366	- 21	+ 26	8.849	+ 4	+ 66	11.993	- 52	- 100
48	338	- 49	+ 42	8.863	+ 18	+ 28	12.004	- 41	- 63
56	322	- 65	+ 42	8.861	+ 16	- 22	11.987	- 58	- 51
64	340	- 47	+ 49	8.892	+ 47	- 31	960	- 85	- 50
73	396	+ 9	+ 64	8.882	+ 37	- 62	946	- 99	- 44
81	404	+ 17	+ 22	8.865	+ 20	- 72	980	- 65	- 7
89	467	+ 80	+ 33	8.900	+ 55	- 7	12.001	- 44	+ 4
98	503	+ 116	+ 25	8.861	+ 16	+ 6	026	- 19	+ 3
1928.06	512	+ 125	+ 18	8.822	- 23	+ 15	082	+ 37	+ 30
14	482	+ 95	- 1	8.812	- 33	+ 45	100	+ 55	+ 20
23	445	+ 58	+ 3	8.804	- 41	+ 58	097	+ 52	- 3
31	411	+ 24	+ 19	8.835	- 10	+ 82	047	+ 2	- 56
39	353	- 51	- 4	8.822	- 23	+ 39	082	+ 37	- 11
48	336	- 34	+ 57	8.807	- 38	- 28	11.998	- 47	- 69
56	350	- 37	+ 70	8.849	+ 4	- 34	12.035	- 10	- 3
64	372	- 15	+ 81	8.904	+ 59	- 19	11.998	- 47	- 12
73	411	+ 24	+ 79	8.844	- 1	- 100	12.018	- 27	+ 28
81	464	+ 77	+ 82	8.810	- 35	- 127	050	+ 5	+ 63

t	Mizusawa			Carloforte			Ukiah		
	φ_t	$\Delta\varphi$	Ch	φ_t	$\Delta\varphi$	Ch	φ_t	$\Delta\varphi$	Ch
1928*89	03:468	+ 81	+ 34	08:822	- 23	- 85	12:100	+ 55	+ 103
98	457	+ 70	- 21	8.811	- 34	- 44	119	+ 74	+ 96
1929.06	476	+ 89	- 18	8.833	- 12	+ 26	144	+ 99	+ 92
14	460	+ 73	- 23	8.750	- 95	- 17	137	+ 92	+ 57
23	408	+ 21	- 34	8.841	+ 4	+ 95	147	+ 102	+ 47
31	309	- 78	- 83	8.879	+ 34	+ 126	105	+ 60	+ 2
39	263	- 124	- 77	8.878	+ 33	+ 95	072	+ 27	- 21
48	253	- 134	- 43	8.929	+ 84	+ 94	000	- 45	- 67
56	292	- 95	+ 12	8.950	+ 105	+ 67	11.942	- 103	- 96
64	349	- 38	+ 58	8.974	+ 129	+ 51	910	- 135	- 100
73	406	+ 19	+ 74	8.931	+ 86	- 13	912	- 133	- 78
81	477	+ 90	+ 95	8.873	+ 28	- 64	970	- 75	- 17
89	547	+ 160	+ 113	8.834	- 11	- 73	999	- 46	+ 2
98	559	+ 172	+ 81	8.791	- 54	- 64	12.059	+ 14	+ 36
1930.06	546	+ 159	+ 52	8.727	- 118	- 80	115	+ 70	+ 63
14	452	+ 65	- 31	8.703	- 142	- 64	191	+ 146	+ 111
23	412	+ 25	- 30	8.775	- 70	+ 29	203	+ 158	+ 103
31	377	- 10	- 15	8.814	- 31	+ 61	175	+ 130	+ 72
39	245	- 142	- 95	8.812	- 33	+ 29	120	+ 75	+ 27
48	193	- 194	- 103	8.876	+ 31	+ 41	031	- 14	- 36
56	184	- 203	- 96	8.963	+ 118	+ 80	11.985	- 60	- 53
64	256	- 131	- 35	9.028	+ 183	+ 105	975	- 70	- 35
73	359	- 28	+ 27	9.001	+ 156	+ 57	949	- 96	- 41
81	438	+ 51	+ 56	8.929	+ 84	- 8	975	- 70	- 12
89	490	+ 103	+ 56	8.904	+ 59	- 3	12.016	- 29	+ 19
98	555	+ 168	+ 77	8.768	- 77	- 87	059	+ 14	+ 36
1931.06	536	+ 149	+ 42	8.724	- 121	- 83	130	+ 85	+ 78
14	475	+ 88	- 8	8.692	- 153	- 75	172	+ 127	+ 92
23	428	+ 41	- 14	8.664	- 181	- 82	209	+ 164	+ 109
31	298	- 89	- 94	8.705	- 140	- 48	223	+ 178	+ 120
39	254	- 133	- 86	8.750	- 95	- 33	164	+ 119	+ 71
48	143	- 244	- 153	8.848	+ 3	+ 13	103	+ 58	+ 36
56	126	- 261	- 154	8.963	+ 118	+ 80	058	+ 13	+ 20
64	179	- 208	- 112	9.032	+ 187	+ 109	035	- 10	+ 25
73	243	- 144	- 89	9.067	+ 222	+ 123	11.988	- 57	- 2
81	446	+ 59	+ 64	9.002	+ 157	+ 55	981	- 64	- 6
89	487	+ 100	+ 53	8.927	+ 82	+ 20	986	- 59	- 11
98	525	+ 138	+ 47	8.816	- 29	- 39	12.012	- 33	- 11
1932.06	585	+ 198	+ 91	8.739	- 106	- 68	092	+ 47	+ 40
14	545	+ 158	+ 62	8.614	- 231	- 153	135	+ 90	+ 55
23	457	+ 70	+ 15	8.638	- 207	- 108	197	+ 152	+ 97
31	352	- 35	- 40	8.690	- 155	- 63	199	+ 154	+ 96
39	353	- 34	+ 13	8.693	- 152	- 90	187	+ 142	+ 94
48	258	- 129	- 38	8.700	- 145	- 135	139	+ 94	+ 72
56	203	- 184	- 77	8.807	- 38	- 76	144	+ 99	+ 106
64	190	- 197	- 101	8.976	+ 131	- 53	120	+ 75	+ 110
73	190	- 197	- 142	9.044	+ 199	+ 100	077	+ 32	+ 87
81	299	- 88	- 83	9.043	+ 198	+ 106	014	- 31	+ 27
89	427	+ 40	- 7	9.008	+ 163	+ 101	11.967	- 78	- 30
98	486	+ 99	+ 8	8.932	+ 87	+ 77	978	- 67	- 45
1933.06	537	+ 150	+ 43	8.792	- 53	- 15	12.007	- 38	- 45
14	555	+ 168	+ 72	8.780	- 65	+ 13	090	+ 45	+ 10
23	506	+ 119	+ 64	8.723	- 122	- 23	122	+ 77	+ 22
31	435	+ 48	+ 43	8.673	- 172	- 80	157	+ 112	+ 54
39	365	- 22	+ 25	8.690	- 155	- 93	154	+ 109	+ 61
48	277	- 110	- 19	8.674	- 171	- 161	126	+ 81	+ 59
56	254	- 133	- 26	8.765	- 80	- 118	134	+ 89	+ 96
64	243	- 144	- 48	8.895	+ 50	- 28	126	+ 81	+ 116
73	326	- 61	- 6	8.957	+ 112	+ 13	111	+ 66	+ 121
81	379	- 8	- 3	8.978	+ 133	+ 41	095	+ 50	+ 108
89	410	+ 23	- 24	8.955	+ 110	+ 48	061	+ 16	+ 64
98	457	+ 70	- 21	8.916	+ 71	+ 61	021	- 24	- 2
1934.06	503	+ 116	+ 9	8.876	+ 31	+ 69	049	+ 4	- 3
14	479	+ 92	- 4	8.774	- 71	+ 7	015	- 30	- 65
23	465	+ 78	+ 23	8.692	- 153	- 54	081	+ 36	- 19
31	452	+ 65	+ 60	8.645	- 200	- 108	089	+ 44	- 14
39	402	+ 15	+ 62	8.674	- 171	- 109	066	+ 21	- 27
48	308	- 79	+ 12	8.705	- 140	- 130	088	+ 43	+ 21
56	248	- 139	- 32	8.778	- 67	- 105	111	+ 66	+ 73
64	285	- 102	- 6	8.867	+ 22	- 56	112	+ 67	+ 102
73	344	- 43	+ 12	8.902	+ 57	- 42	129	+ 84	+ 139

t	Mizusawa			Carloforte			Ukiah		
	φ_t	$\Delta\varphi$	Ch	φ_t	$\Delta\varphi$	Ch	φ_t	$\Delta\varphi$	Ch
1934.81	03:342	- 45	- 40	08:925	+ 80	- 12	12:120	+ 75	+ 133
89	419	+ 32	- 15	8.910	+ 65	+ 3	064	+ 19	+ 67
98	392	+ 5	- 86	8.927	+ 82	+ 72	086	+ 41	+ 63
1935.06									
14									
23									
31									
39									
48									
56									
64									
73									
81									
89									
98									
1936.06	03.575	+ 188	+ 81	08.841	- 4	+ 34	12.235	+ 190	+ 183
14	498	+ 101	+ 5	8.863	+ 18	+ 96	265	+ 220	+ 185
22	570	+ 183	+ 122	8.907	+ 62	+ 160	323	+ 278	+ 225
31	408	+ 21	+ 16	8.873	+ 28	+ 120	218	+ 173	+ 115
39	262	- 125	- 78	8.763	- 82	- 20	050	+ 5	- 43
47	213	- 174	- 86	8.848	+ 3	+ 20	11.986	- 59	- 84
56	301	- 86	+ 21	8.927	+ 82	+ 44	12.080	+ 35	+ 42
63	495	+ 108	+ 207	9.002	+ 157	+ 83	147	+ 102	+ 133
72	616	+ 229	+ 290	9.007	+ 162	+ 64	182	+ 137	+ 190
81	525	+ 138	+ 143	8.913	+ 68	- 24	136	+ 91	+ 149
88	593	+ 206	+ 164	8.913	+ 68	+ 2	180	+ 135	+ 185
97	649	+ 262	+ 174	8.904	+ 59	+ 42	323	+ 278	+ 303
1937.06	593	+ 206	+ 99	8.780	- 65	- 27	279	+ 234	+ 227
14	525	+ 138	+ 42	8.780	- 65	+ 13	281	+ 236	+ 201
22	466	+ 79	+ 18	8.827	- 18	+ 80	327	+ 282	+ 229
30	358	- 29	- 40	8.806	- 39	+ 54	237	+ 192	+ 133
39	180	- 207	- 160	8.777	- 68	- 6	112	+ 67	+ 19
48	110	- 277	- 186	8.829	- 16	- 6	027	- 18	- 40
55	235	- 152	- 46	8.970	+ 125	+ 93	122	+ 77	+ 81
64	405	+ 18	+ 114	9.034	+ 189	+ 111	123	+ 78	+ 113
72	565	+ 178	+ 239	9.038	+ 193	+ 95	166	+ 121	+ 174
81	478	+ 91	+ 96	8.983	+ 138	+ 46	072	+ 27	+ 85
89	525	+ 138	+ 91	8.952	+ 107	+ 45	145	+ 100	+ 148
97	03.718	+ 331	+ 243	08.921	+ 76	+ 59	12.252	+ 207	+ 232

3. Die x - Koordinate der Chandlerbewegung 1900 - 1948

Die nach Abzug der mittleren kreisförmigen Jahresschwingung verbleibenden Polhöhenchwankungen werden gewöhnlich etwas ungenau kurz als Chandlerbewegung bezeichnet. In der Chandlerbewegung vereinigt sich nämlich, wenn man von den restlichen Unregelmäßigkeiten der Jahresperiode absieht, die frei Nutation offensichtlich mit weiteren Periodizitäten, deren richtige empirische und theoretische Erfassung auf große Schwierigkeiten stößt. In noch höherem Grade, als dies für die Jahresschwingung gilt, erwiesen sich in den bisherigen Periodenanalysen hinsichtlich der Chandlerbewegung die beiden Polkoordinaten x und y als vollkommen ähnlich. Wir dürfen daher auch für die Chandlersche Periode eine reine Kreisschwingung annehmen und die weitere Untersuchung auf die x - Koordinate beschränken. Führt man die Werte Ch der Tabelle 1) in die erste Gleichung 2) ein, so findet man die x - Koordinate der Chandlerbewegung 1900 - 1938, die in Tabelle 5) die Ausgangsreihe für die weitere Untersuchung darstellt.

Anders liegen die Verhältnisse für die Jahre 1938 - 48: In Carneras Bericht ⁵⁾ sind nämlich nicht die Stationsschwankungen, sondern lediglich die provisorischen Koordinaten x , y , z ausgewiesen. Außerdem müssen wir schon deshalb auf eine reine Fortsetzung der aus den drei Stationen Mizusawa, Carloforte und Ukiah abgeleiteten Polbahn verzichten, weil infolge der Kriegsereignisse die Beobachtungen in Carloforte in den Jahren 1939 - 41 wiederholt und 1943 - 46 gänzlich unterbrochen wurden. Auch in Ukiah trat im August 1946 mit dem Ausscheiden des langjährigen Beobachters Wrocklage eine dreimonatige Unterbrechung ein. Die von Carnera abgeleiteten Koordinaten gingen also aus den verschiedensten Kombinationen aller acht Stationen hervor, nämlich der 5 Stationen Mizusawa, Kitab, Carloforte, Gaithersburg und Ukiah des Nordparallels $39^{\circ} 08'$, der beiden Stationen Adelaide und La Plata des Südpallels $34^{\circ} 55'$ und der Station Batavia, die übrigens bereits im März 1940 endgültig ausschied.

Diese Koordinaten beruhen auf dem System Kimuras, d.h. speziell für unsere drei Stationen auf den mittleren Polhöhen :

Mizusawa	:	$39^{\circ} 08' 03''$	397
Carloforte	:		08.855
Ukiah	:		12.031

Diese unterscheiden sich nur geringfügig von unseren Mittelwerten für den zweiten Abschnitt.

Wir gehen natürlich sofort von dem Mittel aus den Abend- und Nachtwerten aus. Lediglich für die Epoche 1939.31 wurde der Abendwert und für die unmittelbar folgende Epoche 1939.39 der Nachtwert verwendet. Diese Werte scheinen nämlich, wie sich im Laufe der Rechnung ergab, größeres Vertrauen zu verdienen. Zwecks Elimination der mittleren Jahresperiode wurden die x - Werte für

die einzelnen Jahresbrüche entsprechend gemittelt, und zwar im Hinblick auf die 6½ - jährige Hauptschwebung in zwei übergreifenden siebenjährigen Zyklen 1938 - 1945 und 1941 - 1948. Durch Subtraktion von 0%026 im ersten und von 0%045 im zweiten Zyklus wurden die beiden resultierenden Kurven auf ihre Mittellinie bezogen :

t	1.-Zyklus-2.		M	J
-.06	- 63	- 62	- 62	- 61
-.14	- 91	- 92	- 91	- 88
-.23	- 62	- 92	- 77	- 93
-.31	- 41	- 94	- 67	- 72
-.39	+ 2	- 30	- 14	- 34
-.48	+ 40	+ 15	+ 27	+ 18
-.56	+ 71	+ 57	+ 64	+ 61
-.64	+ 89	+ 90	+ 89	+ 88
-.72	+ 71	+ 91	+ 81	+ 94
-.80	+ 26	+ 66	+ 46	+ 73
-.89	+ 11	+ 48	+ 30	+ 34
-.97	- 53	+ 3	- 25	- 13

Wie die kleine Tabelle zeigt, stimmt das Mittel (M) aus den beiden Zyklen recht gut mit den aus der Periode 16) berechneten \bar{x} - Werten (J) überein. Die mittlere Jahresperiode 1900 - 1935 darf also unbedenklich mit unveränderter Amplitude und Phase extrapoliert werden. Um den Anschluß an die Ausgangsreihe in Tabelle 5) zu gewinnen, ist die Berechnung des Chandlerschen \bar{x} für die letzten 10 Jahre in Tabelle 2) gesondert durchgeführt :

$$\bar{x}_{Ch} = \bar{x} - J \quad . \quad 18)$$

Tabelle 2 : Berechnung der Chandlerschen x - Koordinate 1938 - 48

t	x	-	J	=	x _{Ch}	t	x	-	J	=	x _{Ch}
1938.06	- 210	+	61	-	149	1943.06	+ 43	+	61	+	104
14	- 129	+	88	-	41	14	+ 72	+	88	+	160
23	- 143	+	93	-	50	23	+ 107	+	93	+	200
31	- 90	+	72	-	18	31	+ 98	+	72	+	170
39	- 60	+	34	-	26	39	+ 147	+	34	+	181
47	- 31	-	13	-	44	47	+ 132	-	13	+	119
56	+ 124	-	61	+	63	56	+ 98	-	61	+	37
64	+ 187	-	88	+	99	65	+ 120	-	91	+	29
72	+ 137	-	94	+	43	72	+ 38	-	94	-	56
80	+ 33	-	77	-	44	81	- 23	-	73	-	96
88	- 10	-	40	-	50	90	+ 7	-	28	-	21
97	- 161	+	13	-	148	98	- 67	+	18	-	49
1939.06	- 94	+	61	-	33	1944.06	- 33	+	61	+	28
14	- 122	+	88	-	34	14	- 7	+	88	+	81
22	- 111	+	94	-	17	23	+ 10	+	93	+	103
31	- 52	+	72	+	20	31	+ 76	+	72	+	148
39	- 19	+	34	+	15	39	+ 191	+	34	+	225
47	+ 39	-	13	+	26	48	+ 278	-	18	+	260
56	+ 89	-	61	+	28	56	+ 274	-	61	+	213
64	+ 143	-	88	+	55	64	+ 279	-	88	+	191
73	+ 174	-	93	+	81	72	+ 151	+	94	+	57
80	+ 155	-	77	+	78	81	- 19	-	73	-	92
89	+ 143	-	34	+	109	89	- 55	-	34	-	89
97	+ 72	+	13	+	85	98	- 152	+	18	-	134
1940.06	- 37	+	61	+	24	1945.06	- 153	+	61	-	92
14	- 132	+	88	-	44	14	- 174	+	88	-	86
22	- 120	+	94	-	26	22	- 137	+	94	-	43
30	- 138	+	76	-	62	31	- 66	+	72	+	6
39	- 108	+	34	-	74	40	+ 92	+	28	+	120
47	+ 10	-	13	-	3	48	+ 172	-	18	+	154
56	+ 74	-	61	+	13	55	+ 234	-	57	+	177
64	+ 46	-	88	-	42	64	+ 279	-	88	+	191
73	+ 127	-	93	+	34	72	+ 305	-	94	+	211
80	+ 125	-	77	+	48	81	+ 239	-	73	+	166
89	+ 83	-	34	+	49	89	+ 100	-	34	+	66
97	+ 77	+	13	+	90	97	+ 74	+	13	+	87
1941.07	+ 55	+	66	+	121	1946.06	- 114	+	61	-	53
14	+ 15	+	88	+	103	14	- 176	+	88	-	88
22	+ 3	+	94	+	97	22	- 192	+	94	-	98
30	- 31	+	76	+	45	31	- 217	+	72	-	145
39	+ 7	+	34	+	41	39	- 134	+	34	-	100
47	+ 16	-	13	+	3	48	- 51	-	18	-	69
56	+ 19	-	61	-	42	56	+ 117	-	61	+	56
64	+ 57	-	88	-	31	64	+ 153	-	88	+	75
71	+ 67	-	95	-	28	72	+ 263	-	94	+	169
79	+ 79	-	79	-	0	81	+ 270	-	73	+	197
88	+ 93	-	40	+	53	89	+ 240	-	34	+	206
96	+ 23	+	7	+	30	97	+ 193	+	13	+	206
1942.07	+ 15	+	66	+	82	1947.06	+ 66	+	61	+	127
14	- 7	+	88	+	81	14	- 52	+	88	+	36
22	+ 1	+	94	+	95	22	- 119	+	94	-	25
30	- 9	+	76	+	67	31	- 196	+	72	-	124
39	+ 12	+	34	+	46	39	- 207	+	34	-	173
47	+ 18	-	13	+	5	47	- 143	-	13	-	156
56	+ 3	-	61	-	58	56	- 28	-	61	-	89
64	- 24	-	88	-	112	64	+ 68	-	88	-	20
71	- 12	-	95	-	107	72	+ 142	-	94	+	48
79	+ 13	-	79	-	66	80	+ 221	-	77	+	144
86	- 0	-	50	-	50	88	+ 267	-	40	+	227
96	+ 22	+	7	+	29	97	+ 243	+	13	+	256

4. Die mittlere Schwingungsdauer der Chandlersbewegung

Schon sehr früh wurde die große Veränderlichkeit der Chandlerschen Amplitude bemerkt. Sie hat zur Folge, daß ihr Mittelwert mit dem der Analyse jeweils zugrundeliegenden Zeitabschnitt beträchtlich variiert und daß nach Abzug einer mittleren Kreisschwingung stets stark systematische Reste verbleiben, die mehr oder minder ausgeprägte Periodizitäten andeuten, deren Frequenzen verhältnismäßig nahe beieinanderliegen. Bis 1923 aber zeigte sich immer eine kräftig dominierende Hauptschwingung, deren Periodendauer innerhalb recht enger Grenzen zu schwanken schien. Man erblickte daher die Hauptaufgabe in einer möglichst sicheren Bestimmung der mittleren Dauer dieser Periode, die man dann mit der Newcombschen Periode der freien Nutation des Rotationspoles um den ungestörten Trägheitspol des elastischen Erdkörpers identifizierte.

Unter den älteren Bestimmungen der mittleren Periodendauer ist ohne Zweifel die Wanachsche ⁹⁾ am bemerkenswertesten. Zur Elimination des regelmäßigen Teiles der Jahresperiode bildet Wanach die Differenzen zwischen je zwei um ein Jahr auseinanderliegenden Werten der Polkoordinaten und findet aus den Nullstellen der so entstehenden Reihen im Zeitraum 1890 - 1915 :

$$N = 1.187 \text{ Jahre} = 434 \text{ Tage} \pm 0.0012 \text{ Jahre} .$$

Dieser Wert vermindert sich etwas durch Heranziehung der 69 - jährigen Beobachtungsreihe der Sternwarte in Pulkowo (1842 - 1911) :

$$N = 1.185 \text{ Jahre} = 432.8 \text{ Tage} . \quad 19)$$

Pollak ²⁾ kann aus seinen Periodogrammen keine genauere Bestimmung der Länge der Chandlerschen Periode vornehmen, d.h. aus seinem Phasendiagramm keine sichere Verbesserung der mit 1.2 Jahren angesetzten Periode ableiten. Hingegen findet er einen Sprung in den Phasenwinkeln mit der Epoche 1904.

Einen noch größeren Sprung konstatierte Wahl ²⁾ in seinem Phasendiagramm mit der Epoche 1922.7 und bestätigte damit die bekannte sprunghafte Verkürzung der Chandlerschen Periode nach 1922. Er zerlegte deshalb das Material in zwei Abschnitte und fand :

$$\begin{array}{ll} 1890 - 1922 : & Ch = 1.1907 \text{ Jahre, Amplitude } 0.162 \\ 1922 - 1938 : & \quad \quad 1.1324 \quad \quad \quad 0.078 \end{array}$$

Wahl analysierte noch die älteren Greenwicher Polhöhenreihen und fand für die Chandlersche Periode :

9) B. Wanach : Die Chandlersche Periode und die Bahn des Trägheitspoles, Resultate des Internationalen Breitendienstes, Band 5, Berlin 1916, Seite 202 ff

1851 - 1864 : Ch = 1.219 Jahre
 1864 - 1891 : Ch = 1.174 Jahre ,

im Mittel also wieder : Ch = 1.189 Jahre .

Eine einfache Bestimmung der Länge der mittleren Chandlerschen Periode ergibt sich auch aus den Nullstellen unserer x - Reihe in Tabelle 5) . Aus später ersichtlichem Grunde gehen wir aber nicht von der ersten, sondern von der zweiten Reihe (Spalte 4) aus. Wir zählen die ab - und aufsteigen - den Nullstellen durchlaufend und interpolieren ihre Epochen linear (Tabelle 3) . Legen wir annähernd dieselben Abschnitte wie Wahl zugrunde, so finden wir aus den ersten 18 Perioden den Mittelwert 1.189 Jahre und aus den folgenden 14 Perioden ähnlich 1.138 Jahre. Wie aber die Ausdehnung der Untersuchung auf die letzten 10 Jahre lehrt, ist die Verkürzung nur eine vorübergehende Erscheinung und läßt sich leicht noch weiter einengen, wodurch sich der Effekt verstärkt. Wir finden aus den Nullstellen :

Umläufe	abst.	aufst.	Summe	2n	Ch
1. - 21.	23 ² .83	23 ² .74	47 ² .57	: 40 =	1 ² .1892
21. - 28.	7.67	7.87	15.54	: 14 =	1.1100
28. - 41.	15.26	15.15	30.41	: 26 =	1.1696

und es hat den Anschein, daß der frühere Wert für die Dauer der mittleren Chandlerperiode noch nicht wieder erreicht ist. Infolge der größeren Streuung in den provisorischen Koordinaten Carneras kann dies aber nicht mit Sicherheit behauptet werden. Aus den letzten 7 Perioden (34. - 41.) ergibt sich z.B. sogar der Mittelwert 1.200 Jahre. Aus unserem 1. und 3.Abschnitt folgt das Gesamtmittel : (77.98 : 66) = 1.182 Jahre. Es erweist sich daher der Wanachsche Wert, der zwischen diesem und dem Wahlschen Ergebnis liegt, als derart sicher, daß ein Abgehen von ihm zwecklos erscheint.

Zur Bestimmung der Phasenkonstanten dieser Schwingung und gleichzeitig zur näheren Untersuchung der vorübergehenden Periodenverkürzung halten wir willkürlich die erste absteigende Nullstelle fest und berechnen von ihr aus die Nullstellen der Wanachschen Periode N. Es zeigt sich, daß nach 1930 unsere Nullstellen gegenüber den theoretischen etwa um ein halbes Jahr zurückbleiben. Die Darstellung wird wieder korrekt, wenn man zur Epoche 1928.21 die aufsteigende Nullstelle von N mit der folgenden absteigenden Nullstelle zusammenfallen läßt. Mit anderen Worten : Die scheinbare Verkürzung der Chandlerschen Periode in der Zeit zwischen 1924 und 1931 ist durch einen Phasensprung von 180° um 1928'2 herum hervorgerufen.

Bevor wir dieses merkwürdige Verhalten zu erklären versuchen, leiten wir nach Berücksichtigung des Phasensprunges aus den Differenzen der tatsächlichen und berechneten Nullstellen als Verbesserung der letzteren den Beitrag + 0⁰.005 ab. Man hat hierzu lediglich die Summe der beiden Differenzreihen in Tabelle 3) durch 82 zu dividieren. Die erste aufsteigende Nullstelle der Periode N fällt demnach genau mit der Epoche 1901.00 zusammen. Diese Periode hat die Schwingungszahl :

$$\mathcal{V} = 1 : 1.185 = 0.84388 \quad (20)$$

und die jährliche Winkelgeschwindigkeit : $360^\circ \cdot \mathcal{V} = 303^\circ.797$. Soll daher die Sinuskurve zur Zeit $t = + 1.00$ eine aufsteigende Nullstelle haben, so muß die Phasenkonstante $56^\circ.2$ sein.

Ein Phasensprung von 180° wird dann auftreten, wenn sich die Chandlerbewegung als Schwebung auffassen läßt. In Verfolgung dieses Gedankens müssen wir uns zunächst der Frage zuwenden, inwieweit in der starken Veränderlichkeit der Chandlerschen Amplitude eine Gesetzmäßigkeit zu erkennen ist.

Tabelle 3 : Die Nullstellen der Chandlerschen Periode

n	absteig.	N	D(0 ^c 01)	aufsteig.	N	D(0 ^c 01)
1.	1900.36	00.36	+ 0	1900.97	00.95	+ 2
2.	01.59	01.55	+ 4	02.17	02.14	+ 3
3.	02.76	02.73	+ 3	03.36	03.32	+ 4
4.	03.98	03.92	+ 6	04.56	04.51	+ 5
5.	05.16	05.10	+ 6	05.70	05.69	+ 1
6.	06.30	06.29	+ 1	06.90	06.88	+ 2
7.	07.43	07.47	- 4	08.03	08.06	- 3
8.	08.63	08.66	- 3	09.28	09.25	+ 3
9.	09.84	09.84	- 0	10.45	10.43	+ 2
10.	11.03	11.03	- 0	11.64	11.62	+ 2
11.	12.25	12.21	+ 4	12.86	12.80	+ 6
12.	13.51	13.40	+ 11	14.09	13.99	+ 10
13.	14.64	14.58	+ 6	15.28	15.17	+ 11
14.	15.85	15.77	+ 8	16.48	16.36	+ 12
15.	17.04	16.95	+ 9	17.65	17.54	+ 11
16.	18.25	18.14	+ 11	18.83	18.73	+ 10
17.	19.50	19.32	+ 18	20.04	19.91	+ 13
18.	20.67	20.51	+ 16	21.23	21.10	+ 13
19.	21.78	21.69	+ 9	22.34	22.28	+ 6
20.	22.90	22.88	+ 2	23.60	23.47	+ 13
21.	24.19	24.06	+ 13	24.71	24.65	+ 6
22.	25.31	25.25	+ 6	25.81	25.84	- 3
23.	26.21	26.43	- 22	26.91	27.02	- 11
24.	27.49	27.62	- 13	28.07	28.21	- 14
25.	28.44	(28.80)	28.21 + 23	29.06	(29.39)	28.80 + 26
26.	29.69	(29.99)	29.39 + 30	30.22	(30.58)	29.99 + 23
27.	30.78	(31.17)	30.58 + 20	31.39	(31.76)	31.17 + 22
28.	31.86	(32.36)	31.76 + 10	32.58	(32.95)	32.36 + 22
29.	33.10	(33.54)	32.95 + 15	33.64	(34.13)	33.54 + 10
30.	34.21	(34.73)	34.13 + 8	34.80	(35.32)	34.73 + 7
31.		(35.91)	35.32	36.07	(36.50)	35.91 + 16
32.	36.61	(37.10)	36.50 + 11	37.16	(37.69)	37.10 + 6
33.	37.68	(38.28)	37.69 - 1	38.50	(38.87)	38.28 + 22
34.	38.77	(39.47)	38.87 - 10	39.24	(40.05)	39.47 - 23
35.	40.05	(40.65)	40.05 0	40.73	(41.24)	40.65 + 8
36.	41.40	(41.84)	41.24 + 16	41.88	(42.43)	41.84 + 4
37.	42.41	(43.02)	42.43 - 2	42.97	(43.61)	43.02 - 5
38.	43.59	(44.21)	43.61 - 2	44.10	(44.80)	44.21 - 11
39.	44.72	(45.39)	44.80 - 8	45.35	(45.98)	45.39 - 4
40.	45.99	(46.58)	45.98 + 1	46.56	(47.17)	46.58 - 2
41.	1947.12	(47.76)	47.17 - 5	1947.73	(48.35)	47.76 - 3
Summe :			+ 1.97			+2.22

5. Die Chandlersche Amplitude.
Die Chandlerbewegung als Schwebung

Von den älteren Bemühungen, die Variabilität der Chandlerschen Amplitude zu erklären, seien nur jene kurz gestreift, die zu den vorliegenden Untersuchungen in Beziehung stehen. Vor allem hat Kimura ¹⁰⁾ aus einem bis zum Jahre 1925 zurückreichenden Material für diese Amplitude 1918 eine Interpolationsformel abgeleitet, die wegen der Unsicherheit der zugrundeliegenden Daten kein allzugroßes Vertrauen beanspruchen kann und auch physikalisch wenig befriedigt :

$$Q = + 0.160 - 0.049 \cos \left(\frac{2\pi}{80} t - 57^\circ \right) + 0.044 \cos \left(\frac{2\pi}{50} t - 302^\circ \right) + \\ + 0.027 \cos \left(\frac{2\pi}{26.67} t - 168^\circ \right) + 0.021 \cos \left(\frac{2\pi}{22} t - 352^\circ \right) . \quad 21)$$

t ist die Zeit ab 1870.0 in mittleren Sonnenjahren. Diese Formel stellt das Minimum um 1927 vielleicht etwas verfrüht, aber sonst überraschend gut dar, versagt jedoch vollkommen beim letzten Maximum 1947; sie gibt statt dessen 1944-45 ein flaches Minimum.

Schumann ¹¹⁾ glaubte im Radiusvektor der Polbahn eine Periode von 19.46 Jahren gefunden zu haben und vermutete einen Zusammenhang mit der Knotenperiode des Mondes. Er bezeichnete geradezu den Mond als die Energiequelle, die die freie Nutation trotz der notwendigerweise bestehenden Dämpfung aufrecht hält.

Eine weitere Untersuchung des Radiusvektors der Polbahn ¹²⁾ schien gleichfalls auf eine lange Periode von etwa 25 Jahren zu führen. Zieht man von den Polkoordinaten 1890 - 1929 die durch Ausgleichung gewonnenen Kreisschwingungen :

$$x_r = + 0.029 + 0.083 \sin (2\pi t + 201^\circ) + 0.134 \sin \left(\frac{2\pi}{N} t + 57^\circ \right) \\ y_r = + 0.024 + 0.083 \cos (2\pi t + 201^\circ) + 0.134 \cos \left(\frac{2\pi}{N} t + 57^\circ \right) \quad 22)$$

ab, so zeigt sich in den sukzessiven Mitteln des restlichen Radiusvektors :

$$\Delta x = \sqrt{(X - X_n)^2 + (Y - Y_n)^2} \quad 23)$$

10) Kimura, H. : Variations in the fourteen month's component of the polar motion, Monthly Notices 1918, Bd. 78, Seite 163

11) R. Schumann : Über Gezeitenerscheinungen in den Schwankungen der Stationspolhöhen, Denkschr. d. Akad. d. Wiss. Wien, 1913

Über Zusammenhänge zwischen Polhöhen schwankung, Beweglichkeit innerhalb des Erdkörpers und Mondbewegung, Gerl. Beiträge, z. Geoph., 1928, Bd. XIX

12) K. Ledersteger : Über die Analyse des Radiusvektors der Polbahn, Gerl. Beitr. z. Geoph., Bd. 26, 1930, Seite 314 - 332

Wittniks Störungen und die Veränderlichkeit der Chandlerschen Amplitude, Zeitschr. f. Geoph., Jg. 16, 1940, Seite 203 - 210.

die Knotenperiode oder eine ihr sehr naheliegende, noch unbekannte Periode mit einer Amplitude von $0^{\circ}04$ ziemlich gut ausgeprägt. Zwei Maxima liegen an den beiden Endpunkten der Reihe, das mittlere Maximum scheint mit der Knotenlänge 90° zur Epoche 1908.8 zusammenzufallen.

In einem späteren Versuch nahm ich für die Veränderlichkeit des Chandlerschen Radiusvektors rein deduktiv eine Sinusschwingung der doppelten Knotenperiode an und fand aus dem Zeitraum 1900 - 1928 :

$$Q = 0^{\circ}142 + 0^{\circ}060 \cos \left(\frac{2\pi t}{2\Omega} + 275^{\circ} \right) . \quad 24)$$

Durch Ausgleich bestimmt wurden hierin bloß der Mittelwert und die Amplitude. Die Phasenkonstante ging aus der Annahme hervor, daß das Maximum auf die Epoche 1908.8 fällt. Der Hauptmangel des Ansatzes 24) besteht darin, daß er bei der Ausdehnung auf den Zeitraum der Kooperation der Sternwarten 1890 - 1900 versagt. Wir sollten nach 24) im Jahre 1890 ein Minimum vorfinden, während gerade umgekehrt Q nach rückwärts von 1900 gegen 1890 ständig ansteigt.

Trotz dieser Schwierigkeit habe ich noch versucht, aus dem Material 1890 - 1930 eine Darstellung für Q nach einem erweiterten Ansatz zu finden. Dabei erwies es sich als empfehlenswert, vor der Ausgleichung eine Glättung der Q - Werte über die sechseinhalbjährige Hauptschwebung vorzunehmen und es darf nicht übersehen werden, daß infolge der dadurch entstehenden Einengung des Zeitraums auf 1894 - 1927 die genannte Unstimmigkeit fast ganz ausgeschaltet ist. Wie nicht näher ausgeführt werden soll, ergab sich :

$$Q = 0^{\circ}145 + 0^{\circ}047 \cos \left(\frac{2\pi t}{2\Omega} + 266^{\circ} \right) + 0^{\circ}025 \cos \left(\frac{2\pi t}{\Omega} + 109^{\circ} \right) . \quad 25)$$

Wichtig ist hier die Phasenkonstante des ersten periodischen Gliedes. Wegen $\Omega = 18.6$ Jahre ist die Schwingungszahl der Periode 2Ω 0.02688 und daher die jährliche Winkelgeschwindigkeit 9.68° . Das Maximum fällt demnach auf die Epoche 1909.7 und das folgende Minimum auf 1928.3. Oben aber fanden wir für den Phasensprung die genäherte Epoche 1928.26. Der Phasensprung und das Minimum der Periode 2Ω stehen somit in einem engen Zusammenhang.

Lassen wir zunächst das letzte Glied in 25) beiseite, so liegt es nahe, für das Chandlersche x den Ansatz :

$$x_{Ch} = \left[0^{\circ}145 + 0^{\circ}047 \cos \left(\frac{2\pi t}{2\Omega} + 266^{\circ} \right) \right] \sin \left(\frac{2\pi t}{N} + 56^{\circ} \right) \quad 26)$$

zu machen. Demnach wäre x eine mit der Periode 2Ω harmonisch modulierte Schwingung. Zu der Schwingung der konstanten Amplitude $0^{\circ}145$ würden die beiden Seitenbänder :

$$0^{\circ}0235 \sin \left(\frac{2\pi t}{7148} + 322^{\circ} \right) + 0^{\circ}0235 \sin \left(\frac{2\pi t}{7224} - 210^{\circ} \right) \quad 27)$$

treten. Diese Annahme ist aber durch die Existenz des Phasensprunghinlänglich als falsch erwiesen. Ein Phasensprung von 180° könnte nur dann auftreten, wenn die Amplitude in 26) auch negative Werte annehmen könnte, wenn also die Schwingung konstanter Amplitude nur eine untergeordnete Rolle neben den beiden Seitenbändern spielt oder überhaupt fehlt. Der Fehler liegt in dem Trugschluß, daß die Amplitude mit dem Radiusvektor übereinstimmt. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn wir es stets mit positiven Größen zu tun haben.

Die bisher als Newcombsche Periode der freien Nutation aufgefaßte Schwingung N kann daher gar nicht primär in den Polkoordinaten vorhanden sein. Vielmehr müssen wir annehmen, daß die Chandlerbewegung durch zwei benachbarte Wellen verursacht ist und wollen sie in erster Näherung als reines Schwebungsphänomen deuten. Zwei benachbarte Wellen gleicher Amplitude und mit den Schwin-

gangszahlen ν_1 und ν_2 überlagern sich bekanntlich zu einer Schwingung mit periodisch veränderlicher Amplitude gemäß :

$$\begin{aligned} & a \sin(2\pi \nu_1 t + \alpha_1) + a \sin(2\pi \nu_2 t + \alpha_2) = \\ & = 2 a \cos\left(2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) \sin\left(2\pi \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \end{aligned} \quad (28)$$

Die resultierende Schwingung mit der Frequenz $\frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)$ ist natürlich wieder mit der Periode N identisch. Hingegen dürfen wir im cos-Glied nicht wie in 26) die Periode 2Ω verwenden. Denn 2Ω soll ja die Schwebungsdauer sein, d.h. die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Maxima der (stets positiven!) Amplitude oder die Zeit, in der die kürzere Schwingung ν_1 die längere Schwingung ν_2 gerade um einen vollen Umlauf überholt. Diese ist aber $2\Omega = 1 : (\nu_1 - \nu_2)$ und daher die Periode des cos-Gliedes 4Ω . Die als positive Größe betrachtete Amplitude schwankt zwischen 0 und $2a$ und an den gleichfalls 37.2 Jahre auseinanderliegenden Nullstellen tritt jeweils ein Phasensprung von 180° auf. Zur Bestimmung der beiden Schwingungszahlen stehen die beiden Gleichungen:

$$\frac{1}{N} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} = 0.84388 ; \quad \frac{1}{4\Omega} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} = 0.01344 \quad (29)$$

zur Verfügung und wir erhalten zwei nicht ganz 0.04 Jahre auseinander liegende Grundperioden :

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 0.85732 , & \tau_1 &= 1.1664 \text{ Jahre} \\ \nu_2 &= 0.83044 , & \tau_2 &= 1.2042 \text{ Jahre} . \end{aligned} \quad (29 a)$$

Da wir für das erste Maximum der Amplitude bereits die Epoche 1909.7 gefunden haben, bereitet auch die Ableitung der beiden Phasenkonstanten keinerlei Schwierigkeit. Die jährliche Phasenzunahme der Periode 4Ω beträgt $4^\circ.838$ und somit die Phasenkonstante des cos-Gliedes $-46^\circ.9$:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} &= +56^\circ.2 ; & \alpha_1 &= +9^\circ.3 \\ \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} &= -46^\circ.9 ; & \alpha_2 &= +103^\circ.1 . \end{aligned} \quad (30)$$

An dieser Stelle muß aber daran erinnert werden, daß mir Carneras provisorische Koordinaten erst bekannt wurden, als die Rechnungen bereits weit fortgeschritten waren. Aus dem kleineren Material ergab sich aber die Phasenkonstante der mittleren Chandlerperiode N etwas anders. Auch konnte der Phasensprung nicht wie in Tabelle 3 festgestellt werden; die Phase des cos-Gliedes wurde daher auf Grund der früheren hypothetischen Annahme für das Maximum der Amplitude abgeleitet. Diese Umstände haben zur Folge, daß für die beiden Phasenkonstanten etwas von 30) abweichende Werte resultieren. Wegen der geringfügigkeit des Unterschiedes wurden die früher berechneten Werte beibehalten :

$$\begin{aligned} & a \sin\left(\frac{2\pi t}{1166} + 10^\circ.6\right) + a \sin\left(\frac{2\pi t}{1204} + 95^\circ.8\right) = \\ & = 2 a \cos\left(\frac{2\pi t}{744} - 42^\circ.6\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{1185} + 53^\circ.2\right) . \end{aligned} \quad (31)$$

Übrigens besteht keine zwingende Notwendigkeit, daß die Nullstelle des cos- oder die Stelle, an der ein Zeichenwechsel der Amplitude durch einen Phasensprung von 180° ersetzt wird, mit einer Nullstelle des sin zusammenfällt. Im allgemeinen liegt vielmehr die Nullstelle der Amplitude irgendwo zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen des sin und es vollführt das Chandlersche x

in diesem Intervall ($N : 2$) eine ganze statt wie sonst eine halbe Schwingung.

Die nächste Aufgabe besteht in der empirischen Ableitung der Amplitude a . Nun läßt schon der Verlauf der x - Werte erkennen, daß die Chandler - bewegung keine reine Schwebung sein kann. So finden wir um 1928 wohl ein Minimum, aber bei weitem nicht eine ideale Nullstelle. Sind aber noch weitere systematische Einflüsse vorhanden, so ist es auch denkbar, daß die beiden Grundperioden nicht gleiche Amplitude haben, d.h. daß noch Reste der einen oder anderen Periode überbleiben. Dies muß umso mehr beachtet werden, als der theoretische Zusammenhang der beiden Perioden noch ungeklärt ist. Zur gleichzeitigen Ableitung beider Amplituden wurden für annähernd äquidistante Epochen, und zwar für die Jahresbrüche $-.32$, $-.67$ und $-.97$ im ersten Abschnitt und $-.31$, $-.67$ und $-.98$ im zweiten Abschnitt Fehlergleichungen der Gestalt :

$$a_1 \sin (2 \pi \nu_1 t + 10^{\circ}6) + a_2 \sin (2 \pi \nu_2 t + 95^{\circ}8) - x_{Ch} = 0$$

aufgestellt. Es ergab sich für den Zeitraum 1900 - 1935 :

$$a_1 = 0\%098 \quad , \quad a_2 = 0\%091 \quad 32)$$

und bei Erweiterung auf den Zeitraum 1900 - 1948 :

$$a_1 = 0\%085 \quad , \quad a_2 = 0\%080 \quad 32 a)$$

Die Unterschiede der zwei Amplituden liegen beidemale innerhalb der Rechengenauigkeit und dürfen daher vernachlässigt werden. Namentlich im Zeitraum 1900-1935 ergibt sich die überraschende Tatsache, daß die Amplitude a gleich groß ist wie die Amplitude der erzwungenen Schwingung, was den Anschein erweckt, daß alle drei Schwingungen sich in einer Art Gleichgewichtszustand befinden.

In Tabelle 5) sind die beiden Perioden \mathfrak{P}_1), die wir mit N_1 und N_2 bezeichnen wollen, gesondert mit der Amplitude $0\%083$ berechnet und ihre Summe S von den x_{Ch} abgezogen. Die Gleichartigkeit der Bezeichnung soll zum Ausdruck bringen, daß - wenigstens bis jetzt - jeder Hinweis fehlt, welche der beiden so nahe benachbarten Perioden mit der Newcombschen Periode der freien Mutation identisch ist.

Es sei noch kurz der Radiusvektor unserer Schwebung betrachtet. Da kein Grund vorliegt, von der Kreisform abzuweichen, erhalten wir für das Quadrat des Radiusvektors :

$$\begin{aligned} Q^2 &= x^2 + y^2 = 4 a^2 \cos^2 \left(\frac{2 \pi t}{74.4} - 42^{\circ}6 \right) = \\ &= 2 a^2 \left[1 - \cos \left(\frac{2 \pi t}{37.2} - 85^{\circ}2 \right) \right] \end{aligned} \quad 33)$$

In Q tritt also tatsächlich die Periode 2Ω auf. Der Mittelwert ist $a \sqrt{2}$, d.h. im Zeitraum 1900 - 1935 : $Q_m = 0\%134$ (vergleiche 22) !) und im Zeitraum 1900 - 1948 : $Q_m = 0\%117$. Wegen der Ausdehnung über das Maximum 1947 hätten wir für den erweiterten Zeitraum eigentlich eine Zunahme des mittleren Q erwarten müssen. Es ist dies das erste Anzeichen einer vielleicht doch bestehenden Dämpfung der freien Mutation.

6. Koordinatenursprung, Polwanderung und Schollenbewegung

Wiewohl eigentlich aus dem Rahmen der vorliegenden Arbeit heraus - fallend, müssen an dieser Stelle mehrere Fragen kurz gestreift werden, um die Abweichungen von der bisherigen Gepflogenheit des streng einheitlichen Koordinatenursprungs zu rechtfertigen. Bekanntlich sah sich Kimura im 7. Bande der "Results of the International Latitude Service" gezwungen, das Wanachsche Koordinatensystem aufzugeben, weil die Polbahn bereits zu exzentrisch verlief. Einen ganz ähnlichen Wechsel des Koordinatensystems haben wir zur Epoche 1922.7 durch die Wahl neuer Stationsmittelwerte vorgenommen. Die den Differenzen $\delta\Phi_i$ (Seite 5) entsprechenden Änderungen des Koordinatenursprungs ergeben sich aus 2) mit $\Delta\varphi_i = -\delta\Phi_i$:

$$\Delta x = -0.019, \quad \Delta y = -0.066. \quad 34)$$

Auffallend ist, daß die mittleren Polhöhen auf allen drei Stationen abgenommen haben. Der Mittelwert dieser Abnahme 0.112 berührt die Polkoordinaten überhaupt nicht. Denn die Koeffizientensumme in den Gleichungen 2) für x und y verschwindet. Hingegen ist die Koeffizientensumme für das z - Glied 1, d.h. dieser Mittelwert geht mit vollem Betrage in das Kimuraglied ein, das auch in dieser Hinsicht zum Sammelbecken von Residuen wird. Da die Mittelepochen unserer beiden Abschnitte 17.5 Jahre auseinanderliegen, entspricht diesem Mittelwert eine durchschnittliche jährliche Abnahme der Polhöhe von rund 0.007. Zur Erklärung wird man in erster Linie an Einflüsse des Deklinationssystems denken. Auch nur teilweise darin Auswirkungen der Polfluchtkraft zu sehen, scheinen die Ergebnisse der theoretischen Untersuchung A. Preys¹³⁾ zu verbieten. Jedenfalls muß die Erscheinung weiterhin verfolgt werden.

Will man aus den genannten Differenzen aber eine mittlere Polwanderung ableiten, so darf man nicht die Gleichungen 2) zugrundelegen, sondern muß die Normalgleichungen der z - freien Lösung für die drei Stationen benutzen:

$$\begin{aligned} x &= -0.449 \Delta\varphi_1 + 0.520 \Delta\varphi_2 - 0.247 \Delta\varphi_3 \\ y &= -0.609 \Delta\varphi_1 - 0.077 \Delta\varphi_2 + 0.726 \Delta\varphi_3 \end{aligned} \quad 35)$$

Man findet mit $\Delta\varphi_i = +\delta\Phi_i$: $\Delta x = +0.0382$, $\Delta y = +0.0616$ und daraus: $\cotg \gamma = +0.620$, $\gamma = +58^\circ$, $\Delta s = +0.0725$ in 17.5 Jahren. Die säkulare Polwanderung beträgt demnach pro Jahr 0.0041 in Richtung 58° westlicher Länge. Diese so einfach abgeleitete Lagenänderung der Erdachse unterscheidet sich nur in der Richtung geringfügig von dem älteren Wanachschen

13) A. Prey: Über die Polfluchtkraft, Gerl. Beitr. z. Geoph., Band 48, 1936, Seite 349 - 387.

Wert 14). Ihre Elimination durch den Übergang auf die neuen Stationsmittelwerte scheint demnach vollkommen gerechtfertigt.

Etwas anders liegen die Verhältnisse, wenn auf den einzelnen Stationen stärkere und länger anhaltende Störungen auftreten, wie sie z.B. durch Schollenbewegung verursacht sein können. Denn wenn schon die Polflucht kraft abgelehnt wird, so darf andererseits nicht eine vollkommene Starrheit der Erdoberfläche zwischen dem Pol und den Stationen des Breitendienstes vorausgesetzt werden. Das auffallendste Beispiel bietet die Station Carloforte in den Jahren 1919 - 1924. Diese Störung geht mit 0.6 ihres Betrages in die x - Koordinate der Polbahn ein. Daß es sich hier tatsächlich um eine vorübergehende Schollenbewegung handelt, dürfte auch aus dem vorübergehenden Anwachsen in den kurzperiodischen Schwankungen des Radiusvektors der Polbahn hervorgehen. Denn diese Schwankungen sind einzig durch den Abstand des Koordinatenursprungs vom ungestörten Trägheitspol bedingt 12). Eine ähnliche, aber natürlich aus den Koordinaten allein nicht deutbare Erscheinung zeigen die provisorischen Werte Carneras 1938 - 1948.

Um auch derartige unliebsame Störungen auszuschließen, wurde folgender einfacher Vorgang gewählt. Es wurden jeweils 4- Jahresabschnitte durch Addition einer entsprechenden Konstanten in ihren Summen auf die zugehörigen Summen der Schwebungsperiode S abgestimmt. Auf diese Weise erhält man (siehe Tabelle 5) der Reihe nach folgende Korrekturen für das Chandlersche x :

1900 - 04 : + 14	1916 - 20 : - 5	1932 - 36 : + 20	
1904 - 08 : + 18	1920 - 24 : - 51	1936 - 38 : + 8	
1908 - 12 : + 10	1924 - 28 : - 6	1938 - 40 : + 36	36)
1912 - 16 : + 13	1928 - 32 : - 0	1940 - 44 : - 34	
		1944 - 48 : - 55	

Selbstverständlich erwies sich wegen des Überganges auf das von Carnera beibehaltene Koordinatensystem Kimuras eine weitere Unterteilung mit dem Jahr 1938 als notwendig. Neben der großen, von Carloforte verursachten Störung 1920 - 1924, die die positiven Werte der Korrektur in den ersten 16 Jahren mit bedingt, fällt an dieser Reihe der starke Gang in den letzten 10 Jahren auf. Zu bemerken ist noch, daß diese Korrekturen wegen der weiteren systematischen Einflüsse später noch kleine Änderungen erfahren haben.

Es darf aber als sicher gelten, daß durch diesen Vorgang Schollenbewegungen und Unregelmäßigkeiten in der säkularen Polwanderung weitgehendst eliminiert sind und die Koordinaten im wesentlichen auf das Krümmungszentrum bezogen sind.

 14) B.Wanach : Eine fortschreitende Lageänderung der Erdschse, Zeitschrift f. Geophysik, Jg. 1927, Seite 102 - 105 .

7. Die Seitenperiode M_2

Zieht man von der zweiten, reduzierten x - Reihe die Summenkurve S der Schwebung mit der maximalen Amplitude $0^{\circ}166$ ab, so bleiben die Reste R_1 (Tabelle 5), die noch ein starkes systematisches Verhalten zeigen. Aus den Nullstellen dieser Reste geht eine Periode von 1.242 Jahren hervor und es erhebt sich die Frage, ob diese Periode in Verfolgung des bisherigen Gedankenganges irgendwie aus der Knotenperiode des Mondes abgeleitet werden kann. In Analogie zu der Vermutung, daß für unsere beiden Perioden N_1 und N_2 die Differenz der Schwingungszahlen durch die doppelte Knotenperiode des Mondes definiert ist, prüfen wir zunächst, welche Perioden sich ergeben, deren Frequenzen sich um den Reziprokwert der einfachen Knotenperiode von ν_1 und ν_2 unterscheiden. Es ist :

$$1 : \Omega = 1 : 18.6 = 0.05376$$

und damit folgt

aus ν_1 :	0.85732 + 0.05376 = 0.91108 ,	$T = 1.0976$ Jahre
	0.85732 - 0.05376 = 0.80356 ,	= 1.2445 Jahre
aus ν_2 :	0.83044 + 0.05376 = 0.88420 ,	$T = 1.1310$ Jahre
	0.83044 - 0.05376 = 0.77668 ,	= 1.2875 Jahre

Die zweite dieser Perioden erweist sich nun vollkommen identisch mit dem rein empirisch abgeleiteten Wert. Nebenbei sei bemerkt, daß die beiden, mit ν_2 gekoppelten Perioden an die bekannten Wittingschen Störungen erinnern; doch dürfen hieraus auf keinen Fall Schlüsse betreffs des Nachweises des Mondeinflusses gezogen werden. Denn diese Perioden ändern sich nur sehr langsam mit der zugehörigen Schwebung. Überhaupt ändert sich mit dem Abgehen von der konstanten Wanachschen Mittelperiode 1.185 Jahre die ganze weitere Periodenanalyse, wodurch die bisherigen Nebenperioden illusorisch werden.

Ist einmal der exakte Wert für die Schwingungsdauer (1.2445) gefunden, so bereitet die Ableitung von Phase und Amplitude bei geeigneter Anordnung der Reste R_1 keine Schwierigkeit. Man findet aus 37 vollen Umläufen sehr sicher :

$$0^{\circ}043 \sin \left(\frac{2\pi t}{1.2445} + 250^{\circ}3 \right) . \quad (37)$$

Ein weiteres Kriterium für die Realität dieser Periode folgt aus dem Umstand, daß sich bei den früheren, über den kleineren Zeitraum 1900 - 1935 erstreckten Rechnungen Phase und Amplitude nahe übereinstimmend ergeben haben. Übrigens wurde vorsichtshalber auch die Periode 1.2875 und für den kürzeren Zeitraum 1900 - 1935 eine kleinere Periode angesetzt, beidemal mit negativem Erfolg. Bemerkenswert ist, daß trotz der fast vollkommenen mittleren Sinuskurve der relativ großen Amplitude $0^{\circ}043$ diese Schwingung und die Reste R_1 um die Jahre 1895 und 1925 diametrale Phase aufweisen (siehe Tabelle 5).

Bei der früheren Darstellung 25) des Chandlerschen Radiusvektors auf Grund des Materiales 1890 - 1930 waren rein deduktiv und hypothetisch die doppelte und einfache Knotenperiode eingeführt worden und es fragt sich daher, ob ein Zusammenhang dieser Analyse mit der Periode 37) nachgewiesen werden kann. Die beiden Perioden N_1 und 37) liefern, für sich allein betrachtet, bei vorausgesetzter gleicher Amplitude b die Schwebung:

$$2b \cos \left(2\pi \frac{N_1 - N_2}{2} t + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \right) \sin \left(2\pi \frac{N_1 + N_2}{2} t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) = \quad 38)$$

$$= 2b \cos \left(\frac{2\pi t}{2\Omega} - 120^\circ \right) \sin \left(\frac{2\pi t}{N_2} + 130^\circ \right)$$

Sie stimmt in der Schwingungsdauer vollständig, in der Phase annähernd mit der Periode N_2 zusammen. Aus der variablen Amplitude folgt aber analog 33) die Periode im Radiusvektor: $\cos \left(\frac{2\pi t}{\Omega} + 120^\circ \right)$, die auch in Phase recht gut mit dem zweiten periodischen Glied in 25) übereinstimmt. Schließlich bemerkt man sofort, daß die beiden Perioden in 25) ebenso wie N_2 und 37) annähernd im gleichen Amplitudenverhältnis 2 : 1 stehen.

Es muß aber betont werden, daß auch die Periode 37) noch keineswegs einen sicheren Beweis für einen Zusammenhang zwischen Polbewegung und Mondbewegung liefert. Vielmehr erfolgte die Gleichsetzung der Schwebungsperiode in der Chandlerbewegung und der doppelten Knotenperiode des Mondes hypothetisch oder, wenn man will, sogar rein fiktiv. Die theoretischen Schwierigkeiten des Nachweises einer kosmischen Periode in der Polbahn wurden schon von Schweydar hervorgehoben. Wie aber das Maximum 1947 nachträglich bestätigte, liegt die Schwebungsperiode derart nahe der doppelten Knotenperiode, daß deren Beibehaltung gerechtfertigt erscheint, solange die wahre Ursache nicht erkannt ist. Wir bezeichnen deshalb die Periode 37) indifferent als "Seitenperiode" M_2 , wobei der Index auf die kleinere Amplitude hinweist. Eine der beiden Perioden N muß nämlich die Newcombsche Periode der freien Nutation, die andere aber die "Seitenperiode" M_1 repräsentieren.

Weil nun letztere aus der Newcombschen Periode durch Kombination mit der doppelten Knotenperiode hervorgeht, andererseits M_2 aus N_1 durch Kombination mit der einfachen Knotenperiode abgeleitet werden konnte, liegt die Auffassung nahe, daß N_1 , die kürzeste der drei in Frage stehenden Perioden, mit der freien Nutation identisch ist. Vollständig zwingend ist dieser Gedankengang aber nicht. Ordnet man nämlich die drei Perioden nach ihrer Schwingungsdauer an:

N_1	:	$\tau = 1.1664$ Jahre,	$\nu = 0.85732$	
N_2	:	1.2042 "	0.02688	→ 2Ω
			0.83044	
			0.02688	→ 2Ω
M_2	:	1.2445 "	0.80356	

so erscheint aus Symmetriegründen die Auffassung von N_2 als Newcombsche Periode wahrscheinlicher. Dann aber wären die beiden äusseren Wellen streng symmetrisch gelegene "Seitenbänder" verschiedener Amplitude. Die Entscheidung zwischen diesen beiden Möglichkeiten ist daher nur auf theoretischem Wege möglich, oder wenn sich noch weitere empirische Gesichtspunkte ergeben.

Die Periode M_2 ist in Tabelle 5 berechnet. Zieht man sie von den Resten R_1 ab, so bleiben die Reste R_2 . Bevor wir aber die Untersuchung fortsetzen, empfiehlt sich ihre Ausdehnung auf die Kooperation der Sternwarten.

8. Die Einbeziehung der Kooperation der Sternwarten 1890 - 1900

Bei dem Versuch der Extrapolation der bisherigen Ergebnisse auf die Zeit vor 1900 verlassen wir den sicheren Boden des internationalen Breiten - dienstes und es sind daher einige prinzipielle Bemerkungen am Platze. Ältere langjährige Beobachtungsreihen einzelner Stationen, wie die von Pulkowo oder Greenwich eignen sich sehr wohl für eine Bestimmung der mittleren Chandler - schen Periode und wohl auch für eine Ableitung ihrer mittleren Amplitude, wenn sie auch nicht den Genauigkeitsgrad des Breitendienstes erreichen. We - sentlich ungünstiger liegen aber die Verhältnisse bei dem Versuch, aus den ver - schiedensten, vielfach nicht einmal ein halbes Jahr andauernden Kombinationen oft recht ungünstig verteilter Stationen die Polkoordinaten abzuleiten. Sicher hat Albrecht ¹⁵⁾ aus dem sporadischen Material das Beste herausgeholt. Aber die Hauptschwierigkeit, aus kurzen Beobachtungsreihen halbwegs verlässliche Mittelwerte für die Stationpolhöhen abzuleiten, bleibt bei dem dauernden Wech - sel des Koordinatensystems bestehen. Namentlich die ersten Jahre sind recht unsicher. Es sei dies gleich an der ersten Kombination gezeigt. Diese umfaßt die Stationen Prag ($\lambda = - 14^{\circ}25'$), Berlin ($\lambda = - 13^{\circ}24'$) und Bethlehø ($\lambda = + 75^{\circ}23'$). Für die x - Koordinate ist Bethlehø beinahe ohne Einfluß, während Prag und Berlin praktisch auf demselben Meridian liegen. Nun nimmt z.B. von Jänner - August 1900 in Prag die Polhöhe um $0^{\circ}61$ und in Berlin um $0^{\circ}37$ zu. Wie soll bei einer derartigen Spannung von $0^{\circ}24$ die Amplitude der Pol - bahn sicher berechnet werden? Da ferner 1891 und 1892 auch zwei Lücken be - stehen, ist es auf jeden Fall empfehlenswert, die Reihe erst etwa ab 1893.0 zu benützen.

Unsere bisherigen Erfahrungen berechtigen uns, die Jahresperiode ¹⁶⁾ auch in diesem Zeitraum unverändert zu verwenden. Wir ziehen also von den Albrechtschen Werten der x - Koordinate in den einzelnen Jahrzehntel die Be - träge ab:

-0	-	$0^{\circ}31$		-5	+	$0^{\circ}31$
-1	-	78		-6	+	78
-2	-	95		-7	+	95
-3	-	76		-8	+	76
-4	-	28		-9	+	28

Die Ausgangswerte und die Chandlerschen x - Werte sind in Tabelle 4) gegeben. Diese Tabelle umfaßt alle 10 Jahre, um auch das ältere Material trotz seiner Fragwürdigkeit zu Vergleichszwecken heranziehen zu können. Eine nochmalige Überprüfung der bisherigen Resultate auf Grund des Materials der Kooperation

15) Th. Albrecht: Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariation ..., Zentrabureau der Int. Erdmessung, Berlin 1898 und 1900 (2 Hefte)

der Sternwarten wird aber nicht vorgenommen. Die drei Perioden N_1 , N_2 und M_2 werden lediglich nach rückwärts extrapoliert und erst die Reste R_2 ab 1895 in die weitere Diskussion einbezogen.

Tabelle 4

Berechnung der Chandlerschen x - Koordinate 1890 - 1900

t	x	x_{Ch}	t	x	x_{Ch}
1890.0	- 277	- 246	1895.0	+ 15	+ 46
1	- 271	- 193	1	+ 3	+ 81
2	- 194	- 99	2	- 7	+ 88
3	- 66	+ 10	3	- 11	+ 65
4	+ 62	+ 90	4	+ 8	+ 36
5	+ 188	+ 157	5	+ 43	+ 12
6	+ 251	+ 173	6	+ 71	- 7
7	+ 216	+ 121	7	+ 18	- 77
8	+ 93	+ 17	8	- 43	- 119
9	- 55	- 83	9	- 95	- 123
1891.0	(- 207)	- 176	1896.0	- 115	- 84
1	(- 267)	- 189	1	- 111	- 33
2	(- 267)	- 172	2	- 84	+ 11
3	(- 207)	- 131	3	- 23	+ 53
4	(- 57)	- 29	4	+ 53	+ 81
5	+ 90	+ 59	5	+ 139	+ 108
6	+ 203	+ 125	6	+ 181	+ 103
7	+ 264	+ 169	7	+ 162	+ 67
8	+ 262	+ 186	8	+ 91	+ 15
9	+ 196	+ 168	9	- 8	- 36
1892.0	+ 73	+ 104	1897.0	- 107	- 76
1	- 68	+ 10	1	- 186	- 108
2	- 219	- 124	2	- 216	- 121
3	- 274	- 198	3	- 177	- 101
4	- 243	- 215	4	- 77	- 49
5	- 70	- 101	5	+ 51	+ 20
6	+ 87	+ 9	6	+ 153	+ 75
7	(+ 183)	+ 88	7	+ 204	+ 109
8	+ 203	+ 127	8	+ 225	+ 149
9	+ 171	+ 143	9	+ 148	+ 120
1893.0	+ 107	+ 138	1898.0	+ 53	+ 84
1	+ 12	+ 90	1	- 65	+ 13
2	- 73	+ 22	2	- 172	- 77
3	- 135	- 59	3	- 202	- 126
4	- 162	- 134	4	- 174	- 146
5	- 90	- 121	5	- 105	- 136
6	- 43	- 121	6	+ 27	- 51
7	+ 19	- 76	7	+ 158	+ 63
8	+ 73	- 3	8	+ 199	+ 123
9	+ 109	+ 81	9	+ 151	+ 123
1894.0	+ 118	+ 149	1899.0	+ 91	+ 122
1	+ 104	+ 182	1	+ 26	+ 104
2	+ 81	+ 176	2	- 38	+ 57
3	+ 52	+ 128	3	- 70	+ 6
4	- 6	+ 22	4	- 80	- 52
5	- 30	- 61	5	- 104	- 135
6	- 47	- 125	6	- 80	- 158
7	- 52	- 147	7	- 17	- 112
8	- 34	- 110	8	+ 63	- 13
9	- 1	- 29	9	+ 12	- 16

9. Die numerische Durchführung der Analyse.
Die vermutliche Dämpfung der freien Nutation

Die numerische Durchführung der Analyse der x - Koordinate der Polbahn ist in Tabelle 5) übersichtlich zusammengestellt. Sie erstreckt sich über den gesamten Zeitraum 1890 - 1948, also über 58 Jahre. Wie schon in Punkt 6 ausgeführt wurde, ist das Material des Breitendienstes 1900 - 1948 wegen der genäherten Reduktion auf das Krümmungszentrum in 4 - Jahresabschnitte zerlegt worden; lediglich für die Kooperation 1890 - 1900 wurden 2 fünfjährige Abschnitte gewählt. Die Ausgangsreihe bilden die früher berechneten Chandlerschen x - Werte. In der 2. und 3. Spalte sind die beiden Perioden N_1 und N_2 berechnet. Auf ihre Summe sind in Spalte 4 die x_{Ch} abgestimmt; die Reduktionsgröße ist am Kopf vermerkt. Als 5. Spalte folgt die Hauptschwebung $s = (N_1 + N_2)$. Nach ihrer Subtraktion in Spalte 6 verbleiben die Reste R_1 . Zieht man von diesen die in Spalte 7 ausgewiesene Periode M_2 ab, so ergeben sich die neuen Reste R_2 der 8. Reihe.

Diese Reste zeigen nun ein sonderbares Verhalten. Sie tragen manchmal rein zufälligen Charakter, oder weisen längere Reihen von Zeichenfolgen auf, wie man sie aus den noch vorhandenen Unregelmäßigkeiten der Jahresperiode erwarten darf. Dann aber tritt wieder durch mehrere Jahre ein periodisches Verhalten zutage, wobei es natürlich in Anbetracht der kürzeren Zeitabschnitte und der bereits stark in Erscheinung tretenden Unregelmäßigkeiten ganz unmöglich ist, eine abermalige Bestimmung der Schwingungsdauer zu versuchen. Besonders stark treten diese Periodizitäten um die Zeit der Extrema der Hauptschwebung S auf. Am schlechtesten wird die Darstellung am Beginn der Kooperation. Statt des zu erwartenden Minimum zeigt die Chandlersche Amplitude dort einen verhältnismäßig großen Wert, der sich durch die Subtraktion unserer drei harmonischen Glieder kaum verringert. Sicherlich ist dieser Umstand teilweise auf die schon hervorgehobene Fragwürdigkeit der älteren Albrechtschen Koordinaten zurückzuführen; aber ebenso sicher haben wir dort mit größeren Resten zu rechnen.

Die geschilderten Verhältnisse legen den Gedanken nahe, ob sich in den Resten R_2 vielleicht eine Dämpfung der freien Nutation bemerkbar macht, d.h. ob sie durch eine allmähliche Abnahme der Amplitude einer der beiden Komponenten von S erklärt werden können. Für die Zeit der Kooperation würden sich nun diese Reste verringern, wenn die Amplitude von N_2 größer oder - zumindest in den ersten Jahren - die Amplitude von N_1 kleiner wäre. Um das Maximum 1909 verlangen die Reste für beide Perioden eine Amplitudenvergrößerung. Um das Minimum 1928 würde sich die Darstellung mit einer größeren Amplitude von N_1 oder einer kleineren Amplitude von N_2 verbessern, während beim zweiten Maximum 1947 die Reste für beide Perioden eine Amplitudenverringerng erfordern würden. Ein eindeutiges Verhalten in den gedachten Sinne zeigt mit-

hin allein die Periode N_2 . Die verwendete Amplitude 0,083 ist in der ersten Hälfte des Zeitraums 1890 - 1948 zu klein, hingegen in der zweiten Hälfte zu groß und es bleibt daher zu untersuchen, ob sich hieraus ein plausibler Dämpfungsfaktor ableiten läßt.

Zu diesem Zwecke bestimmen wir für die einzelnen Abschnitte von je 4 Jahren die Verbesserung der Amplitude a_2 auf Grund der Fehlergleichungen:

$$u \sin \left(\frac{2\pi t}{N_2} + 95.8 \right) = R_2 \quad (39)$$

und finden bei Ausschaltung der ersten Jahre der Kooperation für die Zeitintervalle (in 0,001) :

1895 - 1900	: t = - 2,5	u = + 60.3
1900 - 1904	+ 2.0	+ 32.4
1904 - 1908	+ 6.0	- 13.0
1908 - 1912	+ 10.0	+ 39.7
1912 - 1916	+ 14.0	+ 11.0
1916 - 1920	+ 18.0	+ 1.3
1920 - 1924	+ 22.0	+ 16.3
1924 - 1928	+ 26.0	- 23.5
1928 - 1932	+ 30.0	- 30.4
1932 - 1935	+ 33.5	+ 10.0
1936 - 1940	+ 38.0	- 12.7
1940 - 1944	+ 42.0	- 44.8
1944 - 1948	+ 46.0	- 24.7

Setzt man jetzt für die Amplitude von N_2 :

$$c = (0,083 + u) = a_0 e^{-\beta t} \quad (40)$$

so ergeben sich die Fehlergleichungen :

$$\log a_0 - 0.434 \beta t - \log c = 0 \quad (41)$$

für die beiden Unbekannten a_0 und β . a_0 ist dabei die Amplitude für die Epoche 1900 . 0 ($t = 0$). Ausgleichung liefert :

$$a_0 = 0,119, \quad \beta = 0.018. \quad (42)$$

Für die Halbwertzeit oder die Zeit, in der die Amplitude auf die Hälfte sinkt, folgt : $T = 38$ Jahre ($T = \frac{1}{\beta} \ln 2$).

Die Richtigkeit dieser Überlegung vorausgesetzt, müßte also die Frage, welche der beiden Perioden N_1 und N_2 die freie Nutation repräsentiert, zugunsten der letzteren entschieden werden. Erfolgt kein weiterer Stoß auf die Erdachse, so müßte im Jahre 2014 die Amplitude der freien Nutation bereits unter 0,014 gesunken sein und wäre kaum mehr nachweisbar. Umgekehrt müßte sie im Jahre 1862 noch 0,238 betragen haben.

In Tabelle 5 sind in der 9. Spalte die Koeffizienten der Fehlergleichung 39) gegeben und die letzten Reduktionen mit den aus der Ausgleichung hervorgegangenen Korrekturen in der folgenden Reihe berechnet. Diese Korrekturen u werden bis 1895 in jährlichen Abständen, von da ab für unsere vierjährigen Abschnitte als konstant eingeführt (Einheit 0,001) :

1890.5	c = 141	u = + 58	1914.0	c = 92	u = + 9
1.5	139	+ 56	18.0	86	+ 3
2.5	136	+ 53	22.0	80	- 3
3.5	134	+ 51	26.0	74	- 9
4.5	131	+ 48	30.0	69	- 14
7.5	124	+ 41	33.5	64	- 19
1902.0	115	+ 32	38.0	59	- 24
6.0	106	+ 23	42.0	55	- 28
10.0	99	+ 16	46.0	51	- 32

Die neuen Reste :

$$R_3 = R_2 - u \sin \left(\frac{2\pi t}{N_2} + 96^\circ \right) \quad (43)$$

gelten jetzt als definitiv. Denn es ist keine durchlaufende Periodizität mehr erkennbar. Hingegen verraten sie die beträchtliche Unsicherheit der Jahresperiode durch größere Reihen mit Zeichenfolge und zeitweises Hervortreten einer jährlichen Fluktuation. Die Reste könnten ohne Zweifel stark herabgedrückt werden, wenn man das harmonische Glied der erzwungenen, jährlichen Schwingung für kleinere Zeitabschnitte getrennt ansetzt. Aber gerade dies würde den Wert der Analyse beeinträchtigen, weil die Realität rein empirischer Perioden allein aus der Länge der zugrundeliegenden Zeitabschnitte bekräftigt werden kann. Auffallend ist noch immer das Anwachsen der Reste um die Zeiten der Extrema der Hauptschwebung; es gilt dies nicht nur für die ersten Jahre der Kooperation, sondern auch um die Jahre 1908, 1927 und 1945. Für den Zeitraum 1890 - 1895 ließe sich die Darstellung durch Einbeziehung in die Bestimmung der Dämpfung verbessern. Dadurch würde die Halbwertzeit auf 33 Jahre sinken. Berechtigte Bedenken gegen die kurze Halbwertzeit werden im folgenden Abschnitt vorgebracht. Es sei hier lediglich daran erinnert, daß die Frage der Dämpfung der freien Nutation von höchster Bedeutung für das Problem der Viskositätskonstante der Erde ist. Die vierjährigen Abschnitte der Reste R_3 weisen noch kleinere Summen auf, aus denen zweite Korrekturen für die Chandlerschen x - Werte folgen, die additiv zu den Korrekturen 36) treten. Da sie aber nur maximal 0%005 betragen, sind sie bloß am Schluß der Reihe R_3 vermerkt, aber nicht mehr weiter berücksichtigt.

Im Zusammenhang mit der Frage der Dämpfung betrachten wir noch die früher abgeleiteten beiden Hauptamplituden 32). Bei der Erweiterung des Bestimmungszeitraumes über 1935 hinaus bis 1948 nimmt nämlich die Amplitude a_2 um 0%01 ab. Dabei verschiebt sich der Mittelpunkt des Geltungsbereiches von 1917.5 auf 1924.0. Für diese beiden Epochen finden wir aus der letzten kleinen Tabelle für die variable Amplitude a die Werte 0%085 und 0%077, d.h. eine Abnahme um 0%008. Dies würde sogar für die Wahrscheinlichkeit einer größeren Dämpfung sprechen. Daß die Werte beidemal kleiner sind als die entsprechenden Amplituden a_2 , kann eine Folge der Ausgleichung bei vorausgesetzter Konstanz von a_1 und a_2 sein. Ebenso ist es nicht verwunderlich, daß bei dieser Erweiterung des Bestimmungszeitraumes auch die Amplitude a_1 abnimmt. Denn bei der Annäherung an das Maximum 1947 nähern sich auch die Phasen der beiden Schwingungen N_1 und N_2 .

Eine Dämpfung müßte sich aber nicht nur in der Amplitude der freien Nutation, sondern in der Schwingungsdauer der mittleren Chandlerschen Bewegung ausdrücken. Gemäß 42) besteht Amplitudengleichheit der beiden Perioden N_1 und N_2 nur um das Jahr 1920. Dieser Umstand begünstigt die Ausbildung der Schwere 31). Nullstelle und Phasensprung dieser Schwebung werden daher beim Minimum 1928 viel deutlicher in Erscheinung treten, als dies beim vorhergehenden Minimum am Beginn der Kooperation möglich wäre. Je mehr aber die Amplitude der einen der beiden harmonischen Komponenten überhand nimmt, desto mehr muß sich die Schwingungsdauer der Summenkurve S der Periode mit der größeren Amplitude annähern. Ausgehend von dem Wert 1.2042 müßte die Dauer der mittleren Chandlerschen Schwingung allmählich bis auf 1.1664 Jahre abnehmen. In diesem Sinne spricht aber das vorliegende Material eher gegen das Bestehen einer Dämpfung. Wie wir bereits in 4 gesehen haben, verraten die beiden älteren Beobachtungsreihen von Greenwich und Pulkowo keine Abweichung vom Wanachschen Mittelwert.

Vielleicht aber dürfen wir in dem kleineren Mittelwert aus den letzten 13 Umläufen einen Hinweis für die Richtigkeit dieser Vermutung erblicken.

Zum Schluß sei noch an das Verhältnis der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{N}$ für die gedämpfte und ungedämpfte freie Schwingung erinnert. Bezeichnet ω_g die Kreisfrequenz der gedämpften, ω_0 die der ungedämpften Eigenschwingung, so gilt :

$$\omega_g = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \doteq \omega_0 - \frac{\beta}{2\omega_0} \quad 44)$$

und man erkennt sofort, daß der Unterschied weit innerhalb der Unsicherheit in der Bestimmung von N selbst gelegen ist. Man darf also N_2 mit der freien ungedämpften Eigenschwingung identifizieren.

Tabelle 5 : Die Durchführung der Analyse

1890.0 - 1895.0

	x _{Ch}	N ₁	N ₂	x	S	R ₁	M ₂	R ₂	Koeff.	u	R ₃
				+ 2							
1890.0	-246	+23	-20	-244	+ 3	-247	-36	-211	0.242	-14	-197
1	-193	-21	+23	-191	+ 2	-193	-43	-150	276	+16	-166
2	- 99	-60	+60	- 97	- 0	- 97	-39	- 58	719	+42	-100
3	+ 10	-81	+81	+ 12	- 0	+ 12	-25	+ 37	970	+56	- 19
4	+ 90	-79	+80	+ 92	+ 1	+ 91	- 5	+ 96	961	+56	+ 40
5	+157	-54	+58	+159	+ 4	+155	+16	+139	694	+40	+ 99
6	+173	-16	+20	+175	+ 4	+171	+33	+138	242	+14	+124
7	+121	+28	-21	+123	+ 7	+116	+42	+ 74	259	-15	+ 89
8	+ 17	+64	-59	+ 19	+ 5	+ 14	+41	- 27	707	-41	+ 14
9	- 83	+82	-80	- 81	+ 2	- 83	+29	-112	966	-56	- 56
1891.0	-176	+76	-80	-174	- 4	-170	+10	-180	966	-54	-126
1	-189	+49	-59	-187	- 10	-177	-12	-165	707	-40	-125
2	-172	+ 7	-21	-170	- 14	-156	-30	-126	259	-15	-111
3	-131	-35	+21	-129	- 14	-115	-41	- 74	259	+14	- 88
4	- 29	-69	+59	- 27	- 10	- 17	-42	+ 25	707	+40	+ 15
5	+ 59	-83	+80	+ 61	- 3	+ 64	-32	+ 96	966	+54	+ 42
6	+125	-73	+80	+127	+ 7	+120	-15	+135	986	+55	+ 80
7	+169	-43	+60	+171	+ 17	+154	+ 7	+147	719	+40	+107
8	+186	+ 0	+23	+188	+ 23	+165	+26	+139	276	+15	+124
9	+168	+43	-20	+170	+ 23	+147	+40	+107	242	-14	+121
1892.0	+104	+73	-58	+106	+ 15	+ 91	+43	+ 48	694	-37	+ 85
1	+ 10	+83	-80	+ 12	+ 3	+ 9	+35	- 26	961	-51	+ 25
2	-124	+70	-81	-122	- 11	-111	+19	-130	970	-51	- 79
3	-198	+34	-60	-196	- 26	-170	- 2	-168	719	-38	-130
4	-215	- 7	-23	-213	- 30	-183	-23	-160	276	-15	-145
5	-101	-49	+20	- 99	- 29	- 70	-38	- 32	242	+13	- 45
6	+ 9	-76	+57	+ 11	- 19	+ 30	-43	+ 73	682	+36	+ 37
7	+ 88	-82	+79	+ 90	- 3	+ 93	-38	+131	956	+51	+ 80
8	+127	-65	+81	+129	+ 16	+113	-23	+136	974	+52	+ 84
9	+143	-30	+61	+145	+ 31	+114	- 3	+117	731	+39	+ 78
1893.0	+138	+14	+24	+140	+ 38	+102	+18	+ 84	292	+15	+ 69
1	+ 90	+54	-19	+ 92	+ 35	+ 57	+35	+ 22	225	-11	+ 33
2	+ 22	+79	-57	+ 24	+ 22	+ 2	+43	- 41	682	-35	- 6
3	- 59	+81	-79	- 57	+ 2	- 59	+40	- 99	956	-49	- 50
4	-134	+60	-81	-132	- 21	-111	+27	-138	974	-50	- 88
5	-121	+23	-61	-119	- 38	- 81	+ 7	- 88	731	-37	- 51
6	-121	-21	-26	-119	- 47	- 72	-14	- 58	309	-16	- 42
7	- 76	-60	+17	- 74	- 43	- 31	-32	+ 1.	208	+11	- 10
8	- 3	-81	+56	- 1	- 25	+ 24	-42	+ 66	669	+34	+ 32
9	+ 81	-79	+79	+ 83	0	+ 83	-41	+124	951	+49	+ 75
1894.0	+149	-54	+81	+151	+ 27	+124	-30	+154	978	+47	+107
1	+182	-14	+62	+184	+ 48	+136	-12	+148	743	+36	+112
2	+176	+30	+26	+178	+ 56	+122	+ 9	+113	309	+15	+ 98
3	+128	+64	-17	+130	+ 47	+ 83	+28	+ 55	208	-10	+ 65
4	+ 22	+82	-56	+ 24	+ 26	- 2	+40	- 42	669	-32	- 10
5	- 61	+76	-78	- 59	- 2	- 57	+42	- 99	945	-45	- 54
6	-125	+49	-82	-123	- 33	- 90	+34	-124	982	-47	- 77
7	-147	+ 7	-63	-145	- 56	- 89	+17	-106	755	-36	- 70
8	-110	-36	-27	-108	- 63	- 45	- 5	- 40	326	-16	- 24
9	- 29	-70	+16	- 27	- 54	+ 27	-25	+ 52	191	+ 9	+ 43
	-198	-87	- 4	- 98	- 91	- 7	-10	+ 3		+24	- 21

1895.0 - 1900.0

	x _{Ch}	N ₁	N ₂	x	S	R ₁	M ₂	R ₂	Koeff.	u	R ₃
	- 0										
1895.0	+ 46	-83	+54	+ 46	- 29	+ 75	-39	+114	0.656	+27	+ 87
1	+ 81	-79	+78	+ 81	- 1	+ 82	-43	+125	945	+39	+ 86
2	+ 88	-43	+82	+ 88	+ 39	+ 49	-36	+ 85	982	+40	+ 45
3	+ 65	- 0	+63	+ 65	+ 63	+ 2	-21	+ 23	755	+31	- 8
4	+ 36	+43	+27	+ 36	+ 70	- 34	- 0	- 34	326	+13	- 47
5	+ 12	+73	-14	+ 12	+ 59	- 47	+21	- 68	174	- 7	- 61
6	- 7	+83	-53	- 7	+ 30	- 37	+36	- 73	643	-26	- 47
7	- 77	+70	-78	- 77	- 8	- 69	+43	-112	940	-39	- 73
8	-119	+36	-82	-119	- 46	- 73	+39	-112	985	-40	- 72
9	-123	- 7	-64	-123	- 71	- 52	+25	- 77	766	-31	- 46
1896.0	- 84	-49	-28	- 84	- 77	- 7	+ 5	- 12	342	-14	+ 2
1	- 33	-76	+14	- 33	- 62	+ 29	-16	+ 45	174	+ 7	+ 38
2	+ 11	-82	+53	+ 11	- 29	+ 40	-33	+ 73	643	+26	+ 47
3	+ 53	-64	+78	+ 53	+ 14	+ 39	-42	+ 81	940	+39	+ 42
4	+ 81	-28	+82	+ 81	+ 54	+ 27	-41	+ 68	985	+40	+ 28
5	+108	+14	+64	+108	+ 78	+ 30	-29	+ 59	777	+40	+ 19
6	+103	+54	+30	+103	+ 84	+ 19	-10	+ 29	358	+32	- 3
7	+ 67	+79	-13	+ 67	+ 66	+ 1	+12	- 11	156	- 6	- 5
8	+ 15	+81	-52	+ 15	+ 29	- 14	+30	- 44	629	-26	- 18
9	- 36	+60	-78	- 36	- 18	- 18	+41	- 59	934	-38	- 21
1897.0	- 76	+21	-82	- 76	- 61	- 15	+42	- 57	988	-41	- 16
1	-108	-23	-64	-108	- 87	- 21	+32	- 53	777	-40	- 13
2	-121	-60	-30	-121	- 90	- 31	+15	- 46	358	-32	- 14
3	-101	-81	+13	-101	- 68	- 33	- 7	- 26	156	+ 6	- 32
4	- 49	-79	+51	- 49	- 28	- 21	-26	+ 5	616	+25	- 20
5	+ 20	-54	+77	+ 20	+ 23	- 3	-40	+ 37	927	+38	- 1
6	+ 75	-14	+82	+ 75	+ 68	+ 7	-43	+ 50	990	+41	+ 9
7	+109	+30	+65	+109	+ 95	+ 14	-35	+ 49	788	+32	+ 17
8	+149	+65	+31	+149	+ 96	+ 53	-19	+ 72	375	+15	+ 57
9	+120	+82	-12	+120	+ 70	+ 50	+ 2	+ 48	139	- 6	+ 54
1898.0	+ 84	+76	-51	+ 84	+ 25	+ 59	+23	+ 36	616	-25	+ 61
1	+ 13	+49	-77	+ 13	- 28	+ 41	+38	+ 3	927	-38	+ 41
2	- 77	+ 7	-82	- 77	- 75	- 2	+43	- 45	990	-41	- 4
3	-126	-36	-65	-126	-101	- 25	+38	- 63	788	-32	- 31
4	-146	-70	-32	-146	-102	- 44	+23	- 67	391	-16	- 51
5	-136	-83	+10	-136	- 73	- 63	- 3	- 60	122	+ 5	- 65
6	- 51	-73	+50	- 51	- 23	- 28	-18	- 10	602	+24	- 34
7	+ 63	-43	+76	+ 63	+ 33	+ 30	-35	+ 65	921	+38	+ 27
8	+123	- 0	+82	+123	+ 82	+ 41	-43	+ 84	993	+41	+ 43
9	+123	+43	+66	+123	+109	+ 14	-40	+ 54	799	+33	+ 21
1899.0	+122	+73	+32	+122	+105	+ 17	-27	+ 44	391	+16	+ 28
1	+104	+83	-10	+104	+ 73	+ 31	- 7	+ 38	122	- 5	+ 43
2	+ 57	+69	-50	+ 57	+ 19	+ 38	+14	+ 24	602	-24	+ 48
3	+ 6	+35	-76	+ 6	- 41	+ 47	+32	+ 15	914	-37	+ 52
4	- 52	- 7	-83	- 52	- 90	+ 38	+42	- 4	995	-41	+ 37
5	-135	-49	-67	-135	-116	- 19	+41	- 60	809	-33	- 27
6	-158	-76	-34	-158	-110	- 48	+31	- 79	407	-17	- 62
7	-112	-82	+ 9	-112	- 73	- 39	+12	- 51	105	+ 4	- 55
8	- 13	-64	+49	- 13	- 15	+ 2	- 9	+ 11	588	+24	- 13
9	- 16	-28	+76	- 16	+ 48	- 64	-28	- 36	914	+37	- 73
	- 22	-207	+117	- 22	- 90	+ 68	-10	+ 78		+58	+ 20

1904.0 - 1908.0

	x _{Ch}	N ₁	N ₂	x	S	R ₁	M ₂	R ₂	Koeff.	u	R ₃	
				+ 18								
1904.	05	- 83	- 1	-61	- 65	- 62	- 3	-13	+ 10	0.731	-17	+ 27
	12	-107	-31	-76	- 89	-107	+ 18	+ 2	+ 16	921	-21	+ 37
	19	-112	-58	-83	- 94	-141	+ 47	+17	+ 30	999	-23	+ 53
	25	-100	-73	-80	- 82	-153	+ 71	+28	+ 43	961	-22	+ 65
	32	-114	-83	-66	- 96	-149	+ 53	+37	+ 16	799	-18	+ 34
	40	- 86	-78	-40	- 68	-118	+ 50	+43	+ 7	485	-11	+ 18
	48	- 59	-61	- 7	- 41	- 68	+ 27	+41	- 14	087	- 2	- 12
	56	- 19	-31	+27	- 1	- 4	+ 3	+33	- 30	326	+ 7	- 37
	67	+ 30	+17	+65	+ 48	+ 82	- 34	+13	- 47	788	+18	- 65
	78	+ 83	+59	+83	+101	+142	- 41	-10	- 31	996	+23	- 54
	89	+ 85	+82	+73	+103	+155	- 52	-30	- 22	883	+20	- 42
	97	+108	+80	+51	+126	+131	- 5	-40	+ 35	616	+14	+ 21
1905.	05	+ 73	+64	+21	+ 91	+ 85	+ 6	-43	+ 49	259	+ 6	+ 43
	12	+ 31	+40	- 9	+ 49	+ 31	+ 18	-39	+ 57	105	- 2	+ 59
	19	- 59	+12	-38	- 41	- 26	- 15	-32	+ 17	454	-10	+ 27
	25	- 64	-16	-59	- 46	- 75	+ 29	-22	+ 51	707	-16	+ 67
	32	-100	-45	-76	- 82	-121	+ 39	- 7	+ 46	914	-21	+ 67
	40	-121	-70	-83	-103	-153	+ 50	+10	+ 40	1.000	-23	+ 63
	48	-124	-82	-76	-106	-158	+ 52	+25	+ 27	0.914	-21	+ 48
	56	-112	-79	-56	- 94	-135	+ 41	+37	+ 4	669	-15	+ 19
	67	- 36	-52	-13	- 18	- 65	+ 47	+43	+ 4	156	- 4	+ 8
	78	+ 34	- 7	+34	+ 52	+ 27	+ 25	+36	- 11	407	+ 9	- 20
	89	+109	+39	+70	+127	+109	+ 18	+19	- 1	839	+19	- 20
	97	+132	+66	+82	+150	+148	+ 2	- 0	+ 2	988	+23	- 21
1906.	05	+105	+81	+81	+123	+162	- 39	-15	- 24	970	+22	- 46
	12	+ 94	+82	+68	+112	+150	- 38	-28	- 10	819	+19	- 29
	19	+ 69	+71	+46	+ 87	+117	- 30	-38	+ 8	559	+13	- 5
	25	+ 30	+53	+23	+ 48	+ 76	- 28	-42	+ 14	276	+ 6	+ 8
	32	- 37	+27	- 7	- 19	+ 20	- 39	-42	+ 3	087	- 2	+ 5
	40	-117	- 9	-40	- 99	- 49	- 50	-36	- 14	485	-11	- 3
	48	-160	-43	-66	-142	-109	- 33	-30	- 3	799	-18	+ 15
	56	-184	-68	-81	-166	-149	- 17	- 9	- 8	914	-21	+ 13
	67	-147	-83	-78	-129	-161	+ 32	+15	+ 17	940	-22	+ 39
	78	-100	-70	-50	- 82	-120	+ 38	+34	+ 4	602	-14	+ 18
	89	- 32	-32	- 6	- 14	- 38	+ 24	+43	- 19	070	- 2	- 17
	97	+ 45	+ 3	+27	+ 63	+ 30	+ 33	+41	- 8	326	+ 7	- 15
1907.	05	+112	+36	+57	+130	+ 93	+ 37	+33	+ 4	682	+16	- 12
	12	+138	+62	+75	+156	+137	+ 19	+22	- 3	899	+21	- 24
	19	+131	+78	+83	+149	+161	- 12	+ 7	- 19	996	+23	- 42
	25	+127	+83	+81	+145	+164	- 19	- 6	- 13	974	+22	- 35
	32	+107	+78	+69	+125	+147	- 22	-20	- 2	829	+19	- 21
	40	+ 11	+60	+44	+ 29	+104	- 75	-33	- 42	530	+12	- 54
	48	- 60	+30	+12	- 42	+ 42	- 84	-41	- 43	139	+ 3	- 46
	56	-108	- 6	-23	- 90	- 29	- 61	-43	- 18	276	- 6	- 12
	67	-178	-51	-63	-160	-114	- 46	-33	- 13	755	-17	+ 4
	78	-249	-79	-82	-231	-161	- 70	-14	- 56	990	-23	- 33
	89	-174	-80	-75	-156	-155	- 1	+10	- 11	906	-21	+ 10
	97	- 85	-64	-56	- 67	-120	+ 53	+25	+ 28	669	-15	+ 43
		-1.273	-149	-278	-409	-427	+ 18	-52	+ 70		+76	+146
											-	3

1908.0 - 1912.0

	x_{Ch}	N_1	N_2	x	S	R_1	M_2	R_2	Koeff.	u	R_3
				+ 10							
1908.05	+ 5	-35	-26	+ 15	- 61	+ 76	+37	+ 39	0.309	- 5	+ 44
12	+ 85	- 4	+ 4	+ 95	0	+ 95	+42	+ 53	0.52	+ 1	+ 52
19	+169	+26	+34	+179	+ 60	+119	+42	+ 77	407	+ 7	+ 70
25	+202	+50	+56	+212	+106	+106	+38	+ 68	669	+11	+ 57
32	+230	+70	+74	+240	+144	+ 96	+29	+ 67	891	+14	+ 53
40	+210	+82	+83	+220	+165	+ 55	+14	+ 41	999	+16	+ 25
48	+160	+79	+78	+170	+157	+ 13	- 3	+ 16	934	+15	+ 1
56	+ 71	+61	+59	+ 81	+120	- 39	-20	- 19	707	+11	- 30
67	- 64	+20	+17	- 54	+ 37	- 91	-37	= 54	208	+ 3	- 57
78	-196	-28	-30	-186	- 58	-128	-43	- 85	358	- 6	- 79
89	-283	-67	-66	-273	-133	-140	-36	-104	799	-13	- 91
97	-261	-82	-81	-251	-163	- 88	-25	- 63	974	-16	- 47
1909.05	-261	-81	-82	-251	-163	- 88	- 8	- 80	982	-16	- 64
12	-177	-68	-70	-167	-138	- 29	+ 7	- 36	848	-14	- 22
19	-135	-45	-50	-125	- 95	- 30	+21	- 51	602	-10	- 41
25	- 62	-21	-27	- 52	- 48	- 4	+31	- 35	326	- 5	- 30
32	+ 64	+10	+ 3	+ 74	+ 13	+ 61	+40	+ 21	035	+ 1	+ 20
40	+168	+44	+36	+178	+ 80	+ 98	+43	+ 55	438	+ 7	+ 48
48	+211	+69	+64	+221	+133	+ 88	+40	+ 48	766	+12	+ 36
56	+233	+82	+80	+243	+162	+ 81	+30	+ 51	961	+15	+ 36
67	+184	+75	+79	+194	+154	+ 40	+ 9	+ 31	956	+15	+ 16
78	+ 54	+43	+53	+ 64	+ 96	- 32	-15	- 17	643	+10	- 27
89	-100	- 4	+12	- 90	+ 8	- 98	-34	- 64	139	+ 2	- 66
97	-173	-39	-23	-163	- 62	-101	-42	- 59	276	+ 4	- 55
1910.05	-185	-65	-53	-175	-118	- 57	-43	- 14	643	-10	- 4
12	-205	-80	-73	-195	-153	- 42	-38	- 4	875	-14	+ 10
19	-247	-83	-82	-237	-165	- 72	-29	- 43	990	-16	- 27
25	-240	-76	-82	-230	-158	- 72	-18	- 54	985	-16	- 38
32	-189	-58	-71	-179	-129	- 50	- 3	- 47	857	-14	- 33
40	- 81	-28	-48	- 71	- 76	+ 5	+14	- 9	573	- 9	0
48	+ 25	+ 7	-16	+ 35	- 9	+ 44	+29	+ 15	191	- 3	+ 18
56	+129	+42	+19	+139	+ 61	+ 78	+39	+ 39	225	+ 4	+ 35
67	+200	+75	+60	+210	+135	+ 75	+43	+ 32	719	+12	+ 20
78	+204	+82	+82	+214	+164	+ 50	+33	+ 17	982	+16	+ 1
89	+165	+62	+78	+175	+140	+ 35	+14	+ 21	934	+15	+ 6
97	+ 69	+34	+59	+ 79	+ 93	- 14	- 3	- 11	707	+11	- 22
1911.05	- 29	- 1	+30	- 19	+ 29	- 48	-20	- 28	358	+ 6	- 34
12	-101	-32	- 0	- 91	- 32	- 59	-31	- 28	000	0	- 28
19	-159	-58	-30	-149	- 88	- 61	-40	- 21	358	- 6	- 15
25	-219	-74	-52	-209	-126	- 83	-43	- 40	629	-10	- 30
32	-205	-83	-72	-195	-155	- 40	-42	+ 2	866	-14	+ 16
40	-193	-78	-83	-183	-161	- 22	-34	+ 12	995	-16	+ 28
48	-192	-60	-79	-182	-139	- 43	-20	- 23	951	-15	- 8
56	- 92	-31	-62	- 82	- 93	+ 11	- 4	+ 15	743	-12	+ 27
67	+ 21	+17	-21	+ 31	- 4	+ 35	+19	+ 16	259	- 4	+ 20
78	+130	+60	+24	+140	+ 84	+ 56	+36	+ 20	292	+ 5	+ 15
89	+219	+82	+64	+229	+146	+ 83	+43	+ 40	766	+12	+ 28
97	+212	+80	+80	+222	+160	+ 62	+40	+ 22	961	+15	+ 7
	-629	-29	-51	-149	- 80	- 69	+102	-171		-12	-159
											+ 3

1916.0 - 1920.0

	x_{Ch}	N_1	N_2	x	S	R_1	M_2	R_2	Koeff.	u	R_3
				- 5							
1916.05	-144	-81	-46	-149	-127	- 22	-24	+ 2	0.559	- 2	+ 4
12	-134	-67	-68	-139	-135	- 4	-35	+ 31	819	- 2	+ 33
19	-159	-45	-81	-164	-126	- 38	-41	+ 3	970	- 3	+ 6
25	-166	-20	-83	-171	-103	- 68	-43	- 25	998	- 3	- 22
32	-126	+12	-75	-131	- 63	- 68	-40	- 28	906	- 3	- 25
40	- 45	+44	-54	- 50	- 10	- 40	-30	- 10	656	- 2	- 8
48	+ 1	+70	-24	- 4	+ 46	- 50	-16	- 34	292	- 1	- 33
56	+ 64	+82	+ 9	+ 59	+ 91	- 32	+ 1	- 33	105	0	- 33
67	+152	+75	+52	+147	+127	+ 20	+23	- 3	629	+ 2	- 5
78	+178	+43	+79	+173	+122	+ 51	+39	+ 12	951	+ 3	+ 9
89	+143	- 4	+80	+138	+ 76	+ 62	+43	+ 19	966	+ 3	+ 16
97	+ 91	-39	+64	+ 86	+ 25	+ 61	+37	+ 24	777	+ 2	+ 22
1917.05	- 9	-66	+38	- 14	- 28	+ 14	+26	- 12	454	+ 1	- 13
12	- 20	-80	+ 9	- 25	- 71	+ 46	+13	+ 33	105	0	+ 33
19	- 83	-83	-21	- 88	-104	+ 16	- 2	+ 18	259	- 1	+ 19
25	-136	-75	-45	-141	-120	- 21	-15	- 6	545	- 2	- 4
32	-123	-58	-67	-128	-125	- 3	-28	+ 25	809	- 2	+ 27
40	-104	-27	-81	-109	-108	- 1	-39	+ 38	978	- 3	+ 41
48	- 94	+ 9	-81	- 99	- 72	- 27	-43	+ 16	978	- 3	+ 19
56	- 58	+42	-68	- 63	- 26	- 37	-40	+ 3	819	- 2	+ 5
67	+ 26	+75	+31	+ 21	+ 44	- 23	-26	+ 3	375	- 1	+ 4
78	+ 58	+82	+16	+ 53	+ 98	- 45	- 5	- 40	191	+ 1	- 41
89	+102	+62	+58	+ 97	+120	- 23	+19	- 42	694	+ 2	- 44
97	+136	+32	+77	+131	+109	+ 22	+32	- 10	927	+ 3	- 13
1918.05	+105	- 1	+83	+100	+ 82	+ 18	+41	- 23	999	+ 3	- 26
12	+ 41	-32	+76	+ 36	+ 44	- 8	+43	- 51	921	+ 3	- 54
19	+ 29	-59	+60	+ 24	+ 1	+ 23	+40	- 17	719	+ 2	- 19
25	+ 7	-74	+39	+ 2	- 35	+ 37	+33	+ 4	469	+ 1	+ 3
32	- 40	-83	+10	- 45	- 73	+ 28	+22	+ 6	122	0	+ 6
40	- 88	-78	-24	- 93	-102	+ 9	+ 9	0	292	- 1	+ 1
48	-143	-60	-53	-148	-113	- 35	-12	- 23	643	- 2	- 21
56	-106	-30	-75	-111	-105	- 6	-28	+ 22	899	- 3	+ 25
67	- 70	+19	-82	- 75	- 63	- 12	-41	+ 29	993	- 3	+ 32
78	- 26	+61	-64	- 31	- 3	- 28	-42	+ 14	766	- 2	+ 16
89	+ 45	+82	-24	+ 40	+ 58	- 18	-30	+ 12	292	- 1	+ 13
97	+ 90	+80	+10	+ 85	+ 90	- 5	-16	+ 11	122	- 0	+ 11
1919.05	+134	+64	+43	+129	+107	+ 22	+ 1	+ 21	515	+ 2	+ 19
12	+115	+39	+65	+110	+104	+ 6	+16	- 10	788	+ 2	- 12
19	+123	+10	+79	+118	+ 89	+ 29	+29	- 0	956	+ 3	- 3
25	+155	-17	+83	+150	+ 66	+ 84	+37	+ 47	1.000	+ 3	+ 44
32	+116	-45	+77	+111	+ 32	+ 79	+42	+ 37	0.927	+ 3	+ 34
40	+ 76	-70	+58	+ 71	- 12	+ 83	+42	+ 41	694	+ 2	+ 39
48	+ 18	-82	+30	+ 13	- 52	+ 65	+35	+ 30	358	+ 1	+ 29
56	- 43	-79	- 4	- 48	- 83	+ 35	+22	+ 13	052	0	+ 13
67	-131	-52	-49	-136	-101	- 35	- 1	- 34	588	- 2	- 32
78	-113	- 7	-78	-118	- 85	- 33	-23	- 10	934	- 3	- 7
89	-118	+40	-81	-123	- 41	- 82	-39	- 43	978	- 3	- 40
97	- 37	+67	-67	- 42	- 0	- 42	-43	+ 1	809	- 2	+ 3
	-311	-324	-231	-551	-555	+ 4	-57	+ 61		-10	+ 71
											1

1920.0 - 1924.0

	x_{Ch}	N_1	N_2	x	S	R_1	M_2	R_2	Koeff.	u	R_3
				- 51							
1920.05	+ 58	+82	-42	+ 7	+ 40	- 33	-40	+ 7	0.500	+ 2	+ 5
12	+117	+82	-13	+ 66	+ 69	- 3	-32	+ 29	156	+ 0	+ 29
19	+104	+70	+17	+ 53	+ 87	- 34	-21	- 13	208	- 1	- 12
25	+172	+53	+42	+121	+ 95	+ 26	- 8	+ 34	500	- 2	+ 36
32	+192	+26	+64	+141	+ 90	+ 51	+ 7	+ 44	777	- 2	+ 46
40	+193	-10	+80	+142	+ 70	+ 72	+23	+ 49	961	- 3	+ 52
48	+162	-43	+82	+111	+ 39	+ 72	+35	+ 37	990	- 3	+ 40
56	+115	-69	+70	+ 64	+ 1	+ 63	+42	+ 21	848	- 3	+ 24
67	+ 50	-83	+35	- 1	- 48	+ 47	+40	+ 7	423	- 1	+ 8
78	- 14	-69	-12	- 65	- 81	+ 16	+26	- 10	139	+ 0	- 10
89	- 48	-31	-54	- 99	- 85	- 14	+ 5	- 19	656	+ 2	- 21
97	- 75	+ 4	-75	-126	- 71	- 55	-13	- 42	906	+ 3	- 45
1921.05	- 45	+38	-83	- 96	- 45	- 51	-28	- 23	1.000	+ 3	- 26
12	- 39	+63	-78	- 90	- 15	- 75	-37	- 38	0.940	+ 3	- 41
19	+ 12	+78	-63	- 39	+ 15	- 54	-42	- 12	755	+ 2	- 14
25	+ 64	+83	-43	+ 13	+ 40	- 27	-43	+ 16	515	+ 2	+ 14
32	+ 96	+78	-14	+ 45	+ 64	- 19	-38	+ 19	174	+ 1	+ 18
40	+167	+59	+19	+116	+ 78	+ 38	-27	+ 65	225	- 1	+ 66
48	+167	+28	+50	+116	+ 78	+ 38	-12	+ 50	602	- 2	+ 52
56	+151	- 7	+73	+100	+ 66	+ 34	+ 5	+ 29	875	- 3	+ 32
67	+117	-52	+83	+ 66	+ 31	+ 35	+27	+ 8	998	- 3	+ 11
78	+ 51	-79	+66	- 0	- 13	+ 13	+41	- 28	799	- 2	- 26
89	+ 12	-79	+28	- 39	- 51	+ 12	+42	- 30	342	- 1	- 29
97	+ 18	-63	- 6	- 33	- 69	+ 36	+35	+ 1	070	+ 0	+ 1
1922.05	- 45	-34	-39	- 96	- 73	- 23	+22	- 45	469	+ 1	- 46
12	- 41	- 3	-63	- 92	- 66	- 26	+ 8	- 34	755	+ 2	- 36
19	- 15	+27	-78	- 66	- 51	- 15	- 7	- 8	940	+ 3	- 11
25	+ 16	+51	-83	- 35	- 32	- 3	-20	+ 17	999	+ 3	+ 14
32	+ 41	+71	-79	- 10	- 8	- 2	-31	+ 29	951	+ 3	+ 26
40	+ 90	+83	-62	+ 39	+ 21	+ 18	-40	+ 58	743	+ 2	+ 56
48	+119	+78	-34	+ 68	+ 44	+ 24	-43	+ 67	407	+ 1	+ 66
56	+156	+61	0	+105	+ 61	+ 44	-38	+ 82	000	+ 0	+ 82
67	+188	+19	+45	+137	+ 64	+ 73	-22	+ 95	545	- 2	+ 97
73	+117	- 9	+64	+ 66	+ 55	+ 11	-10	+ 21	777	- 2	+ 23
81	+ 94	-43	+80	+ 43	+ 37	+ 6	+ 7	- 1	966	- 3	+ 2
89	+ 60	-68	+82	+ 9	+ 14	- 5	+23	- 28	988	- 3	- 25
98	- 8	-82	+67	- 59	- 15	- 44	+36	- 80	809	- 2	- 78
1923.05	- 23	-79	+42	- 74	- 37	- 37	+42	- 79	500	- 2	- 77
14	- 36	-62	+ 9	- 87	- 53	- 34	+42	- 76	105	+ 0	- 76
23	- 70	-28	-30	-121	- 58	- 63	+33	- 96	358	+ 1	- 97
31	- 47	+ 7	-58	- 98	- 51	- 47	+20	- 67	719	+ 2	- 69
39	- 48	+42	-77	- 99	- 35	- 64	+ 2	- 66	927	+ 3	- 69
48	- 17	+70	-83	- 68	- 13	- 55	-16	- 39	996	+ 3	- 42
56	+ 21	+82	-73	- 30	+ 9	- 39	-31	- 8	875	+ 3	- 11
64	+ 86	+79	-50	+ 35	+ 29	+ 6	-40	+ 46	602	+ 2	+ 44
73	+115	+60	-14	+ 64	+ 46	+ 18	-43	+ 61	174	+ 1	+ 60
81	+132	+30	+20	+ 81	+ 50	+ 31	-38	+ 69	292	- 1	+ 70
89	+125	- 6	+51	+ 74	+ 45	+ 29	-27	+ 56	616	- 2	+ 58
98	+ 91	-44	+75	+ 40	+ 31	+ 9	-10	+ 19	906	- 3	+ 22
	+2898	+461	-62	+399	+399	0	-194	+194		+ 1	+193
											- 4
				+399							

1924.0 - 1928.0

	x _{Ch}	N ₁	N ₂	x	S	R ₁	M ₂	R ₂	Koeff.	u	R ₃
				- 6							
1924.06	+ 56	-69	+83	+ 50	+ 14	+ 36	+ 8	+ 28	1.000	- 9	+ 37
14	+ 31	-82	+76	+ 25	- 6	+ 31	+24	+ 7	0.921	- 8	+ 15
23	- 11	-78	+53	- 17	- 25	+ 8	+37	- 29	643	- 6	- 23
31	- 22	-60	+24	- 28	- 36	+ 8	+43	- 35	292	- 3	- 32
39	- 55	-31	-10	- 61	- 41	- 20	+41	- 61	122	+ 1	- 62
48	- 82	+ 9	-46	- 88	- 37	- 51	+32	- 83	559	+ 5	- 88
56	- 62	+43	-70	- 68	- 27	- 41	+18	- 59	848	+ 8	- 67
64	- 7	+68	-82	- 13	- 14	+ 1	+ 2	- 1	990	+ 9	- 10
73	+ 10	+82	-78	+ 4	+ 4	0	-18	+ 18	945	+ 9	+ 9
81	+ 35	+79	-61	+ 29	+ 18	+ 11	-32	+ 43	731	+ 7	+ 36
89	+ 65	+61	-32	+ 59	+ 29	+ 30	-41	+ 71	391	+ 4	+ 67
98	+ 89	+28	+ 6	+ 83	+ 34	+ 49	-43	+ 92	070	- 1	+ 93
1925.06	+ 98	- 7	+39	+ 92	+ 32	+ 60	-37	+ 97	469	- 4	+101
14	+ 54	-42	+65	+ 48	+ 23	+ 25	-26	+ 51	788	- 7	+ 58
23	+ 44	-70	+81	+ 38	+ 11	+ 27	- 8	+ 35	978	- 9	+ 44
31	- 21	-82	+81	- 27	- 1	- 26	+ 9	- 35	978	- 9	- 26
39	+ 13	-79	+67	+ 7	- 12	+ 19	+25	- 6	809	- 7	+ 1
48	- 45	-59	+38	- 51	- 21	- 30	+38	- 68	454	- 4	- 64
56	- 70	-30	+ 4	- 76	- 26	- 50	+43	- 93	052	0	- 93
64	- 33	+ 6	-30	- 39	- 24	- 15	+41	- 56	358	+ 3	- 59
73	- 28	+44	-62	- 34	- 18	- 16	+31	- 47	743	+ 7	- 54
81	+ 7	+69	-79	+ 1	- 10	+ 11	+17	- 6	951	+ 9	- 15
89	+ 31	+82	-83	+ 25	- 1	+ 26	0	+ 26	995	+ 9	+ 17
98	+ 26	+78	-70	+ 20	+ 8	+ 12	-19	+ 31	839	+ 8	+ 23
1926.06	+ 76	+60	-45	+ 70	+ 15	+ 55	-32	+ 87	545	+ 5	+ 82
14	+ 26	+31	-13	+ 20	+ 18	+ 2	-41	+ 43	156	+ 1	+ 42
23	- 1	- 9	+24	- 7	+ 15	- 22	-43	+ 21	292	- 3	+ 24
31	- 19	-43	+54	- 25	+ 11	- 36	-36	0	656	- 6	+ 6
39	- 53	-68	+75	- 59	+ 7	- 66	-25	- 41	906	- 8	- 33
48	- 68	-82	+83	- 74	+ 1	- 75	- 7	- 68	999	- 9	- 59
56	- 63	-79	+75	- 69	- 4	- 65	+10	- 75	899	- 8	- 67
64	- 65	-61	+53	- 71	- 8	- 63	+26	- 89	643	- 6	- 83
73	- 31	-28	+19	- 37	- 9	- 28	+38	- 66	225	- 2	- 64
81	- 20	+ 7	-16	- 26	- 9	- 17	+43	- 60	191	+ 2	- 62
89	- 6	+42	-48	- 12	- 6	- 6	+41	- 47	573	+ 5	- 52
98	+ 48	+70	-73	+ 42	- 3	+ 45	+30	+ 15	883	+ 8	+ 7
1927.06	+ 65	+82	-83	+ 59	- 1	+ 60	+15	+ 45	998	+ 9	+ 36
14	+157	+79	-78	+151	+ 1	+150	- 2	+152	945	+ 9	+143
23	+ 83	+59	-58	+ 77	+ 1	+ 76	-20	+ 96	694	+ 6	+ 90
31	+ 82	+30	-28	+ 76	+ 2	+ 74	-33	+107	342	+ 3	+104
39	+ 48	- 6	+ 6	+ 42	0	+ 42	-41	+ 83	070	- 1	+ 84
48	+ 12	-44	+43	+ 6	- 1	+ 7	-42	+ 49	515	- 5	+ 54
56	- 20	-70	+68	- 26	- 2	- 24	-36	+ 12	819	- 7	+ 19
64	- 28	-82	+82	- 34	0	- 34	-24	- 10	982	- 9	- 1
73	- 53	-78	+80	- 59	+ 2	- 61	- 6	- 55	961	- 9	- 46
81	- 50	-60	+64	- 56	+ 4	- 60	+11	- 71	766	- 7	- 64
89	- 18	-31	+36	- 24	+ 5	- 29	+27	- 56	438	- 4	- 52
98	- 7	+ 9	- 1	- 13	+ 8	- 21	+39	- 60	017	0	- 60
	+218	-312	+233	- 70	- 79	+ 9	+77	- 68		-24	- 44
											+ 1

1940.0 - 1944.0

	x_{Ch}	N_1	N_2	x	S	R_1	M_2	R_2	Koeff.	u	R_3
				- 34							
1940.06	+ 24	+59	-17	- 10	+ 42	- 52	-28	- 24	0.208	+ 6	- 30
14	- 44	+30	-49	- 78	- 19	- 59	-13	- 46	588	+16	- 62
22	- 26	- 6	-72	- 60	- 78	+ 18	+ 4	+ 14	866	+24	- 10
30	- 62	-40	-83	- 96	-123	+ 27	+21	+ 6	995	+28	- 22
39	- 74	-69	-78	-108	-147	+ 39	+35	+ 4	934	+26	- 22
47	- 3	-82	-59	- 37	-141	+104	+42	+ 62	707	+20	+ 42
56	+ 13	-78	-27	- 21	-105	+ 84	+42	+ 42	326	+ 9	+ 33
64	- 42	-60	+ 7	- 76	- 53	- 23	+34	- 57	087	- 2	- 55
73	+ 34	-27	+44	- 0	+ 17	- 17	+20	- 37	530	-15	- 22
80	+ 48	+ 4	+66	+ 14	+ 70	- 56	+ 5	- 61	799	-22	- 39
89	+ 49	+43	+82	+ 15	+125	-110	-14	- 96	985	-28	- 68
97	+ 90	+68	+81	+ 56	+149	- 93	-29	- 64	970	-27	- 37
1941.07	+121	+83	+60	+ 87	+143	- 56	-41	- 15	719	-20	+ 5
14	+103	+79	+35	+ 69	+114	- 45	-43	- 2	423	-12	+ 10
22	+ 97	+61	+ 1	+ 63	+ 62	+ 1	-39	+ 40	017	- 0	+ 40
30	+ 45	+32	-32	+ 11	0	+ 11	-29	+ 40	391	+11	+ 29
39	+ 41	- 7	-64	+ 7	- 71	+ 78	-12	+ 90	766	+21	+ 69
47	+ 3	-42	-80	- 31	-122	+ 91	+ 5	+ 86	961	+27	+ 59
56	- 42	-70	-82	- 76	-152	+ 76	+23	+ 53	985	+28	+ 25
64	- 31	-82	-69	- 65	-151	+ 86	+36	+ 50	829	+23	+ 27
71	- 28	-81	-48	- 62	-129	+ 67	+42	+ 25	573	+16	+ 9
79	- 0	-65	-16	- 34	- 81	+ 47	+42	+ 5	191	+ 5	- 0
88	+ 53	-34	+23	+ 19	- 11	+ 30	+35	- 5	276	- 8	+ 3
96	+ 30	+ 0	+53	- 4	+ 53	- 57	+22	- 79	643	-18	- 61
1942.07	+ 82	+48	+79	+ 48	+127	- 79	- 1	- 78	956	-27	- 51
14	+ 91	+69	+83	+ 47	+152	-105	-15	- 90	998	-28	- 62
22	+ 95	+82	+73	+ 61	+155	- 94	-30	- 64	883	-25	- 39
30	+ 67	+80	+51	+ 33	+131	- 98	-40	- 58	616	-17	- 41
39	+ 46	+60	+16	+ 12	+ 76	- 64	-43	- 21	191	- 5	- 16
47	+ 5	+31	-17	- 29	+ 14	- 43	-39	- 4	208	+ 6	- 10
56	- 58	- 9	-52	- 92	- 61	- 31	-26	- 5	629	+18	- 23
64	-112	-43	-74	-146	-117	- 29	-10	- 19	891	+25	- 44
71	-107	-65	-83	-141	-148	+ 7	+ 5	+ 2	995	+28	- 26
79	- 66	-81	-79	-100	-160	+ 60	+21	+ 39	951	+27	+ 12
86	- 50	-82	-64	- 84	-146	+ 62	+32	+ 30	777	+22	+ 8
96	+ 29	-64	-30	- 5	- 94	+ 89	+42	+ 47	358	+10	+ 37
1943.06	+104	-28	+13	+ 70	- 15	+ 85	+41	+ 44	156	- 4	+ 48
14	+160	+ 7	+45	+126	+ 52	+ 74	+33	+ 41	545	-15	+ 56
23	+200	+45	+72	+166	+117	+ 49	+18	+ 31	866	-24	+ 55
31	+170	+70	+83	+136	+153	- 17	+ 1	- 18	995	-28	+ 10
39	+181	+82	+79	+147	+161	- 14	-17	+ 3	951	-27	+ 30
47	+119	+79	+63	+ 85	+142	- 57	-31	- 26	755	-22	- 4
56	+ 37	+59	+31	+ 3	+ 90	- 87	-41	- 46	375	-11	- 35
65	+ 29	+24	- 7	- 5	+ 17	- 22	-43	+ 21	087	+ 2	+ 19
72	- 56	- 6	-36	- 90	- 42	- 48	-38	- 10	438	+12	- 22
81	- 96	-44	-66	-130	-110	- 20	-25	+ 5	799	+22	- 17
90	- 21	-72	-82	- 55	-154	+ 99	- 7	+106	985	+28	+ 78
98	- 49	-83	-81	- 83	-164	+ 81	+10	+ 71	970	+27	+ 44
	+1189	-125	-307	-443	-432	- 11	-43	+ 32		+102	- 70
											+ 2

1944.0 - 1948.0

	x _{Ch}	N ₁	N ₂	x	S	R ₁	M ₂	R ₂	Koeff.	u	R ₃
				- 55							
1944.06	+ 28	-78	-65	- 27	-143	+116	+25	+ 91	0.788	+25	+ 66
14	+ 81	-60	-39	+ 26	- 99	+125	+37	+ 88	469	+15	+ 73
23	+103	-26	- 1	+ 48	- 27	+ 75	+43	+ 32	017	+ 1	+ 31
31	+148	+ 9	+32	+ 93	+ 41	+ 52	+41	+ 11	391	-13	+ 24
39	+225	+43	+60	+170	+103	+ 67	+32	+ 35	719	-23	+ 58
48	+260	+71	+79	+205	+150	+ 55	+16	+ 39	956	-31	+ 70
56	+213	+82	+82	+158	+164	- 6	- 1	- 5	993	-32	+ 27
64	+191	+79	+71	+136	+150	- 14	-18	+ 4	857	-27	+ 31
72	+ 57	+61	+48	+ 2	+109	-107	-31	- 76	573	-18	- 58
81	- 92	+27	+12	-147	+ 39	-186	-41	-145	139	- 4	-141
89	- 89	- 7	-23	-144	- 30	-114	-43	- 71	276	+ 9	- 80
98	-134	-45	-57	-189	-102	- 87	-36	- 51	682	+22	- 73
1945.06	- 92	-70	-76	-147	-146	- 1	-24	+ 23	921	+29	- 6
14	- 86	-82	-83	-141	-165	+ 24	- 8	+ 32	1.000	+32	- 0
22	- 43	-79	-75	- 98	-154	+ 56	+ 9	+ 47	0.906	+29	+ 18
31	+ 6	-59	-51	- 49	-110	+ 61	+26	+ 35	616	+20	+ 15
40	+120	-24	-17	+ 65	- 41	+106	+39	+ 67	208	+ 7	+ 60
48	+154	+10	+17	+ 99	+ 27	+ 72	+43	+ 29	208	- 7	+ 36
55	+177	+42	+45	+122	+ 87	+ 35	+41	- 6	545	-17	+ 11
64	+191	+70	+72	+136	+142	- 6	+31	- 37	866	-28	- 9
72	+211	+82	+83	+156	+165	- 9	+17	- 26	995	-32	+ 6
81	+166	+78	+78	+111	+156	- 45	- 2	- 43	934	-30	- 13
89	+ 66	+60	+59	+ 11	+119	-108	-19	- 89	707	-23	- 66
97	+ 87	+30	+30	+ 32	+ 60	- 28	-32	+ 4	358	-11	+ 15
1946.06	- 53	- 9	- 9	-108	- 18	- 90	-42	- 48	105	+ 3	- 51
14	- 88	-43	-42	-143	- 85	- 58	-43	- 15	500	+16	- 31
22	- 98	-69	-67	-153	-136	- 17	-37	+ 20	809	+26	- 6
31	-145	-82	-82	-200	-164	- 36	-23	- 13	985	+32	- 45
39	-100	-79	-81	-155	-160	+ 5	- 7	+ 12	970	+31	- 19
48	- 69	-58	-53	-124	-121	- 3	+12	- 15	755	+24	- 39
56	+ 56	-27	-35	+ 1	- 62	+ 63	+28	+ 35	423	+14	+ 21
64	+ 75	+ 7	- 1	+ 20	+ 6	+ 14	+38	- 24	017	+ 1	- 25
72	+169	+42	+32	+114	+ 74	+ 40	+43	- 3	391	-13	+ 10
81	+197	+70	+64	+142	+134	+ 8	+40	- 32	766	-25	- 7
89	+206	+82	+80	+151	+162	- 11	+30	- 41	961	-31	- 10
97	+206	+79	+82	+151	+161	- 10	+16	- 26	990	-32	+ 6
1947.06	+127	+59	+68	+ 72	+127	- 55	- 3	- 52	819	-26	- 26
14	+ 36	+28	+43	- 19	+ 71	- 90	-20	- 70	515	-16	- 54
22	- 25	- 6	+10	- 80	+ 4	- 84	-33	- 51	122	- 4	- 47
31	-124	-44	-27	-179	- 71	-108	-42	- 66	326	+10	- 76
39	-173	-70	-57	-228	-127	-101	-42	- 59	682	+22	- 81
47	-156	-82	-76	-211	-158	- 53	-36	- 17	921	+29	- 46
56	- 89	-78	-83	-144	-161	+ 17	-22	+ 39	998	+32	+ 7
64	- 20	-60	-73	- 75	-133	+ 58	- 6	+ 64	883	+28	+ 36
72	+ 48	-30	-51	- 7	- 81	+ 74	+11	+ 63	616	+20	+ 43
80	+144	+ 4	-20	+ 89	- 16	+105	+26	+ 79	242	+ 8	+ 71
88	+227	+39	+14	+172	+ 53	+119	+38	+ 81	174	- 6	+ 87
97	+256	+69	+50	+201	+119	+ 82	+43	+ 39	602	-19	+ 58
	+2555	-44	-43	- 85	- 87	+ 2	+114	-112		+17	-129
											+ 3

10. Kritische Zusammenfassung
und theoretischer Ausblick

Das Ergebnis der vorliegenden numerischen Untersuchung läßt sich in folgenden Sätzen zusammenfassen: Zieht man von der x - Koordinate der empirischen Bahn des Rotationspoles der Erde die mittlere Jahresperiode :

$$x_J = 0,095 \sin (2\pi t + 198,6) \quad (45)$$

der erzwungenen Schwingung ab, so verbinden sich in der verbleibenden "Chandlerbewegung" die Unregelmäßigkeiten dieser jährlichen Welle mit der gedämpften Newcombschen Periode der freien Nutation:

$$N = 0,119 e^{-0,018t} \sin (\frac{2\pi t}{T_{204}} + 96^\circ) \quad (46)$$

Diese bisher N_2 genannte Schwingung ist im Rythmus der Mondknotenperiode oder einer andern, äußerst nahe gelegenen Periode moduliert, derart, daß die bei den symmetrischen Seitenbänder :

$$0,083 \sin (\frac{2\pi t}{T_{166}} + 11^\circ) + 0,043 \sin (\frac{2\pi t}{T_{244}} + 250^\circ) \quad (47)$$

entstehen, deren Amplituden sich annähernd wie 2 : 1 verhalten. Sämtliche Phasenkonstante sind auf die Epoche $t_0 = 1900,0$ bezogen. Weil in dem der Analyse zugrundeliegenden Zeitraum 1900 - 1948 die mittlere Amplitude der freien Nutation fast ebenso groß ist wie die Amplitude der ersten Seitenperiode M_1 (bisher N_1 genannt), ergeben diese beiden Schwingungen ein reines Schwebungsphänomen mit der mittleren Chandlerschen Periode 1.185 Jahre, die mithin gar nicht primär in den Polkoordinaten vorhanden ist. Diese Schwebung folgt mit großer Sicherheit aus dem Phasensprung von 180° an der Nullstelle 1928. An der vorhergehenden Nullstelle 1890/1 der Schwebung ist von einem Phasensprung nichts zu merken, weil daselbst die Amplitude der freien Nutation noch stark überwiegt. Eine weitere Folge der Schwebung ist die scheinbare sprunghafte Verkürzung der Chandlerschen Periode nach 1923. Die Verkürzung ist umso stärker, je mehr man die Nullstelle 1928 einengt. Die mittlere Chandlersche Periode von 1.132 Jahren, die z.B. Wahl aus dem Zeitraum 1922.7 - 1938.0 findet, hat demnach nichts mit der sogenannten ersten Wittingschen Störung W_1 zu tun. Die Wittingschen Störungen scheinen sich überhaupt nur fallweise aus kürzeren Intervallen und vor allem nur nach Abzug eines harmonischen Gliedes der Periode 1.185 zu ergeben. Der Wechsel in den Wittingschen Störungen mit der Epoche 1922.7 ist demnach eine notwendige Folge der scheinbar sprunghaften Verkürzung der Hauptperiode. Die Extrapolation der Ergebnisse auf die Kooperation der Sternwarten läßt am Anfang der Reihe viel zu wünschen übrig. Es liegt dies zum Teil in der wesentlich größeren Unsicherheit der älteren, Albrechtschen Polkoordinaten, zum Teil vielleicht in dem Umstand, daß der obige Dämpfungsfaktor zu klein ist. Aus letzterem folgt eine Halbwertszeit von 38 Jahren, die auf 33 Jahre sinkt, wenn man auch die Jahre

1890 - 1895 in die Ausgleichung einbezieht.

Dies ist in wesentlichen Zügen das Bild, das sich aus der vorliegenden Untersuchung ergeben hat und es bleibt noch zu prüfen, wieweit es sich mit den bisherigen sicheren Ergebnissen und theoretischen Erwägungen vereinbaren läßt. Zunächst hat man sich schon frühzeitig bemüht, die Chandlersche Bewegung harmonisch zu analysieren und so das Gesetz der Polbewegung aufzudecken. Mit Recht warnte aber Schweydar ¹⁶⁾ vor "dem Bestreben, die verwickelte Bewegung der Pole durch eine Reihe von harmonischen Funktionen der Zeit darzustellen. Diese Entwicklung hat nur interpolatorischen Wert für den betrachteten Zeitraum und kann zur Aufdeckung der Ursachen wenig beitragen, ja sie kann zu Irrtümern in der Deutung führen." Diese Zweifel sind z.B. bei Kimuras Interpolationsformel ²¹⁾ am Platze. Je größer aber der betrachtete Zeitraum wird und je geringer gleichzeitig die Zahl der zur befriedigenden Darstellung erforderlichen harmonischen Glieder ist, desto mehr gewinnt natürlich das Resultat an Wahrscheinlichkeit. Wenn dabei noch so markante Erscheinungen wie der Phasensprung eine ausreichende Erklärung finden, so darf man das Ergebnis wohl für gesichert halten.

Die begrifflich scharfe Trennung der Chandlerschen Periode von der Newcombschen Periode der freien Nutation verdanken wir Wanach ¹⁷⁾. Erstere ist veränderlich, letztere als die durch die Elastizität der Erde verlängerte Eulersche Periode ihrem Wesen nach konstant. Für die Polbewegung dürfen wir jedenfalls die beiden äquatorealen Trägheitsmomente der Erde als gleich voraussetzen. Dann erfolgt die kräftefreie Bewegung der Rotationsachse in einer Kreisbahn um den sogenannten ungestörten Trägheitspol. Sind ferner x, y die Koordinaten des Rotationspoles, ξ, η die Koordinaten des wahren Trägheitspoles und schließlich $\frac{2\pi}{N}$ die Newcombsche Winkelgeschwindigkeit, so gelten die bekannten Differentialgleichungen der Polbewegung (Darwin und Sommerfeld) :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{N}(y - \eta); \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{2\pi}{N}(x - \xi) \quad 48)$$

und man erkennt, daß in der Polbewegung neben der freien Nutation eine durch die Bewegung des Trägheitspoles bedingte erzwungene Schwingung auftritt. Der wichtigste Fall einer Verlagerung der Trägheitsachsen betrifft die jahreszeitlichen Massentransporte auf der Erdoberfläche. Beschreibt unter ihrem Einfluß der Trägheitspol eine reine Kreisschwingung von Jahresperiode im selben Sinne, in dem die freie Nutation und die Erdrotation erfolgt, so wird die erzwungene Schwingung des Rotationspoles eine gleichgerichtete jährliche Kreisschwingung, deren Amplitude im Verhältnis $1 : (N - 1)$ vergrößert ist. So erklärt sich die Jahresperiode ⁴⁵⁾. Das Zentrum der freien Schwingung liegt dabei, bezogen auf den Mittelpunkt der Bahn des Trägheitspoles, diesem stets diametral gegenüber. Hingegen bleibt bei dieser und anderen, einem einfachen

16) W. Schweydar : Zur Erklärung der Bewegung der Rotationspole der Erde, Sitzungsber.d.Preuss.Akad.d.Wiss., 1919, 1.Halbband, Seite 357 - 366.

17) B.Wanach : Die Chandlersche und die Newcombsche Periode der Polbewegung, Neue Folge der Veröffentl.d.Zentralbureaus der Internationalen Erdmessung, Nr.34, Berlin 1919

mathematischen Gesetz folgenden Bewegungen des Trägheitspoles, die freie Nutation nicht nur in ihrer Schwingungsdauer gänzlich unberührt, sondern auch in Amplitude und Phase konstant, wobei allerdings diese beiden Konstanten bereits von den Parametern der Bahn des Trägheitspoles abhängen.

Die durch die meteorologischen Massentransporte bedingte Bahn des Trägheitspoles kann aber natürlich nur im Mittel über längere Zeitabschnitte eine ideale Kreisform besitzen. In Wirklichkeit werden die beträchtlichen Unregelmäßigkeiten im Ablauf der Witterung in ihrer Auswirkung auf die Trägheitsachsen der Erde immer nur mit mäßiger Genauigkeit durch eine endliche Zahl harmonischer Glieder erfassbar sein, deren Parameter sich häufig sprunghaft oder stetig ändern. Jede derartige Änderung bewirkt aber im allgemeinen eine Änderung der Amplitude und Phase der freien Schwingung und im extremen Fällen kann die Unterscheidung von freier und erzwungener Bewegung des Rotationspoles überhaupt sinnlos werden. Daher liegt die Annahme nahe, daß die gesamte Chandlersche Bewegung mit ihren scheinbaren Schwankungen in der Periode und der starken Variabilität der Amplitude einfach auf die Unregelmäßigkeiten in der jährlichen Bewegung des Trägheitspoles zurückzuführen ist. Die Chandlersche Bewegung wäre dann identisch mit der freien Nutation, die in ihrer Schwingungsdauer unverändert bleibt, während ihre Amplitude und Phase in einer durch die Form und Größe der Massentransporte bedingten Weise selbst mit der Periode N veränderlich sind.

Schweydar hat nun in der oben zitierten Arbeit ¹⁷⁾ aus langjährigen Mittelwerten der Luftdruckverteilung eine mittlere Bahn des Trägheitspoles und die zugehörige Bahn des Rotationspoles berechnet und den Schluß gezogen, daß die Luftmassenverschiebungen die Chandlerbewegung nach Form und Größe im wesentlichen zu erklären vermögen. Obwohl die von Wanach aus den Polhöhenbeobachtungen berechneten Jahresbahnen des Trägheitspoles und auch ihre mehrjährigen Mittelwerte beträchtlich von Schweydars Ergebnis abweichen, hat sich diese Auffassung bei den Theoretikern durchgesetzt. Denn sie vermag gleichzeitig das scheinbare Fehlen einer Dämpfung der freien Schwingung zu deuten: die freie Schwingung läuft gleichsam neben der jährlichen Bewegung her, aus der sie stets neue Impulse erfährt. Eine weitere, wichtige Folgerung dieser Auffassung besteht nach Wanach darin, daß die mittlere Chandlersche Periode schon deshalb nicht mit der Newcombschen Periode der freien Schwingung identifiziert werden darf, weil jeder derartigen Mittelbildung die stillschweigende Voraussetzung zugrundeliegt, daß der Phasenwinkel der freien Schwingung konstant ist.

Trotzdem hält Wanach seinen Mittelwert 1.185 noch immer für den plausibelsten. Das würde aber dafür sprechen, daß auch die Inkonzanz der Amplitude nur zum geringeren Teil aus den Unregelmäßigkeiten der Jahresbahn des Trägheitspoles zu erklären ist, und der Möglichkeit weiterer gesetzmäßiger Einflüsse Raum geben. Es darf daher die Vorstellung, daß trotz der Unregelmäßigkeiten der Luftmassentransporte die klare Scheidung von freier und erzwungener Schwingung noch ihren berechtigten Sinn hat, von der herrschenden theoretischen Meinung nicht als gänzlich absurd beiseitegeschoben werden. Vielmehr bleibt es noch immer denkbar, daß sich die kräftefreie Nutation von einer streng gesetzmäßigen Komponente der erzwungenen Schwingung klar abhebt und die Wirkungen der Unregelmäßigkeiten im Kreislauf der jährlichen Massentransporte auf die ohnehin recht beträchtlichen Residuen der Polkoordinaten beschränkt bleiben. Eigentlich müßte ja schon die ideale Kreisform der mitt-

leren Jahresschwingung zu denken geben, deren Parameter sich nun schon durch 50 Jahre als konstant erweisen. Damit dürfte die Berechtigung der vorliegenden Arbeit überhaupt und des Festhaltens an der kreisförmigen freien Schwingung im besonderen hinlänglich erwiesen sein.

Auf diesem Standpunkt erhebt sich aber sofort wieder die Frage nach der Dämpfung der freien Nutation, resp. nach der Energiequelle, die die Bewegung aufrecht hält. Die Antwort kann leider nicht eindeutig gegeben werden. Es läßt sich mit der Annahme einer Dämpfung die Darstellung verbessern; aber es dürfte kaum angehen, mit dem errechneten Dämpfungsfaktor die freie Nutation auch nur bis zum Jahre 1800 nach rückwärts zu verfolgen. Dazu ist die Halbwertszeit zu klein. Die freie Nutation kann daher kaum die Wirkung eines einmaligen Stoßes sein. Vielleicht darf man in der abgeleiteten Modulation der freien Schwingung einen Hinweis auf eine noch nicht erkannte langperiodische Schwebung erblicken. Da um 1890 offenbar das Maximum bereits überschritten ist, müßte die Schwingungsdauer dieser Schwebung mindestens 120 Jahre betragen. Die Frage der Dämpfung erledigt sich dann von selbst: die Newcombsche Bewegung wird unter dem Einfluß der äußeren Kräfte periodisch aufgeschaukelt und sie nähert sich derzeit hinsichtlich der langperiodischen Schwebung einem Wellental. Der Ausdruck 46) hat daher nur vorläufigen Charakter. Nebenbei sei bemerkt, daß unserer Halbwertszeit von 33 - 38 Jahren nach den Untersuchungen Freys ¹⁾ ein Viskositätskoeffizient von 10^{20} bis 10^{21} CGS entspricht. Ungefähr von dieser Größenordnung müßte der Zähigkeitskoeffizient auch sein, falls die Chandlerbewegung eine bloße Begleiterscheinung der jährlichen Polschwankung ist. Denn die aus der unregelmäßigen Bewegung des Trägheitspoles folgenden fortlaufenden Impulse müssen rasch abklingen, da sonst Anhäufungen zu befürchten sind. Unter diesem Gesichtspunkt erscheint der Wert 10^{21} als obere Grenze des Viskositätskoeffizienten.

Damit sind wir bei der schwierigsten Frage, der Erklärung der merkwürdigen Schwingungsvorgänge angelangt. An sich ist es weiter nicht verwunderlich, wenn in der Polbahn mehrere harmonische Glieder aufscheinen. Einerseits können in den meteorologischen Massentransporten noch weitere Gesetzmäßigkeiten stecken und andererseits verlagert die Deformation der Erde durch die äusseren Kräfte periodisch den Trägheitspol. Ein tieferes Eingehen auf die Deutungsmöglichkeiten der Seitenperioden hat aber eine weitere Klarstellung der Wechselbeziehung zwischen dem Rotationspol und dem wahren Trägheitspol zur Voraussetzung.

11. Die Deutungsmöglichkeiten
für die Seitenperioden

Bekanntlich besteht die freie Nutation oder besser die kräftefreie Präzession der elastischen Erde in einer Kreisschwingung um den ungestörten Trägheitspol mit der Newcombschen Winkelgeschwindigkeit $\beta = \frac{2\pi}{N}$, wenn wir die beiden äquatorealen Trägheitsmomente als gleich voraussetzen. Als ungestörte Gestalt der Erde gilt dabei jene, die sie bei Abwesenheit äusserer Kräfte in dem fiktiven Falle haben würde, daß die Rotationsachse mit der Figuren- oder polaren Hauptträgheitsachse zusammenfällt. Die Bewegung der Rotationsachse im Erdkörper bewirkt eine aus der geänderten Zentrifugalkraft erklär- bare elastische Deformation und in weiterer Folge eine Verlagerung der Trägheitsachsen. Diese " sekundäre " Bewegung des wahren Trägheitspoles kann bezüglich des ungestörten Trägheitspoles durch die Koordinaten ξ_s und η_s beschrieben werden und es gilt :

$$\xi_s = KX, \quad \eta_s = KY$$

mit

$$\kappa = 1 - \frac{\beta}{\alpha} \doteq 0.3$$

49)

worin α die Eulersche Winkelgeschwindigkeit der freien Nutation der starren Erde bedeutet. Im elastischen Erdkörper kreist der sekundär verlagerte Trägheitspol mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie der Rotationspol und die Differentialgleichungen der kräftefreien Bewegung lauten :

$$\frac{dx}{dt} = +\beta y = +\alpha (y - \eta_s)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\beta x = -\alpha (x - \xi_s)$$

50)

Sie stehen mit den Gleichungen 48) scheinbar in Widerspruch. Die Darwin-Sommerfeldschen Differentialgleichungen sind aber unter ganz anderen Voraussetzungen abgeleitet worden. Hier handelt es sich nämlich um das Problem des Einflusses von Massenverlagerungen unter der aufrecht gehaltenen Annahme, daß äussere Kräfte nicht vorhanden sind. Jeder Massentransport wirkt nun direkt auf den Impuls der Erdrotation und indirekt auf die Hauptträgheitsachsen ein. Die direkte Wirkung tritt hinter der indirekten umso mehr zurück, je länger die Periode des Massentransportes ist, und die indirekte Wirkung beschränkt sich im wesentlichen auf den Einfluß der entsprechenden Deviationsmomente E und F um die x - und y - Achse, die vermöge der einfachen Gleichungen :

$$(A - C) \xi = F; \quad (B - C) \eta = E, \quad 51)$$

in denen A, B, C die Hauptträgheitsmomente der ungestörten Erde sind, die " primäre " Bahn des wahren Trägheitspoles beschrieben. Die Gleichungen 48)

gelten dann bei Vernachlässigung der direkten Drehkraft und der zeitlichen Änderung der Deviationsmomente.

Setzt man unter den für 48) geltenden Voraussetzungen für die primäre Bewegung des Trägheitspoles eine kreisförmige Schwingung der Periode P mit der Winkelgeschwindigkeit $\gamma = \frac{2\pi}{P}$ an:

$$\xi = r \sin \gamma t \quad \eta = r \cos \gamma t \quad (52)$$

so führt das in der Wanachschen Form gegebene Integral der Differentialgleichungen 48) :

$$\begin{aligned} x = & \left[x_0 - \beta \int_0^t (\xi \sin \beta t + \eta \cos \beta t) dt \right] \cos \beta t + \\ & + \left[y_0 - \beta \int_0^t (\eta \sin \beta t - \xi \cos \beta t) dt \right] \sin \beta t, \end{aligned} \quad (53)$$

in dem die Integrationskonstanten x_0 und y_0 die Koordinaten des Rotationspoles zur Zeit $t = 0$ bedeuten, auf die Lösung:

$$x = R \sin(\beta t - \varphi_0) - \frac{\beta r}{\gamma - \beta} \sin \gamma t \quad (54)$$

mit:

$$x_0 = R \sin \varphi_0, \quad (y_0 + \frac{\beta r}{\gamma - \beta}) = R \cos \varphi_0.$$

Im Resonanzfall $P = N$ ($\gamma = \beta$) wird die Amplitude der erzwungenen Schwingung unendlich groß. Soll diese Amplitude mindestens $2r$ sein, so muß:

$$2N = 2.4^a > P > 0.8^a = \frac{2}{3} N. \quad (55)$$

Setzen wir in 52) für P unsere beiden Seitenperioden an, so wird

$$\frac{\beta}{\gamma - \beta} = \frac{0.83044}{0.02688} = 31, \quad (56)$$

und es genügt zur Erklärung der im Rotationsvektor auftretenden Seitenperioden ein Wert von $r < 0.003$!

Ganz ebenso setzt sich schließlich der Einfluß der äusseren Kräfte aus einer direkten und indirekten Wirkung zusammen. Es handelt sich hier um die Gezeitenkräfte, die in ihrer Wirkung auf die ganze Erde bekanntlich die Präzession und Nutation der Erdachse im Raume hervorbringen. Erzeugt die Deformation der Erde durch die Flutkräfte die Deviationsmomente E_2 und F_2 , so treten an Stelle der berühmten Eulerschen Gleichungen der Rotation die Relationen:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} - \beta(y - \eta) = & -\frac{\Delta_1}{C} \left(1 + \frac{\beta}{\omega}\right) + \frac{D_1}{C\omega} \left(1 + \frac{\beta}{\omega}\right) \\ \frac{dy}{dt} + \beta(x - \xi) = & -\frac{\Delta_2}{C} \left(1 + \frac{\beta}{\omega}\right) + \frac{D_2}{C\omega} \left(1 + \frac{\beta}{\omega}\right), \end{aligned} \quad (57)$$

wenn man, wie es in der Theorie üblich ist, die Glieder 2. Ordnung vernachlässigt, und $A - B = 0$ setzt. In diesen Gleichungen bedeuten D_1 , D_2 und D_3 die Komponenten des Drehmomentes der äusseren Kräfte um die Achsen unseres mit der Erde verbundenen Koordinatensystems und:

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & \frac{dF_2}{dt} - \omega E_2 \\ \Delta_2 = & \frac{dE_2}{dt} + \omega F_2. \end{aligned} \quad (58)$$

Der Einfluß der meteorologischen Luftmassentransporte ist in ihnen linkerhand durch die zugehörigen Koordinaten des Trägheitspoles erfaßt. Die Entwicklungen Tisserands (*Méc. céleste*, Band 2) und Schweyders lehren nun, daß sowohl in der direkten wie auch in der indirekten Wirkung der äusseren Kräfte nur die nahezu eintägigen Glieder eine Rolle spielen. Namentlich die periodische Verlagerung des Trägheitspoles durch die eintägigen Deformationen ist recht beträchtlich, doch ihre Periode zu kurz und das Massensystem der Erde zu träge, um auf derartige Einflüsse zu reagieren. Die Mondknotenperiode, die in der erzwungenen Nutation der Erdachse in Erscheinung tritt, ist in den Rotationsgleichungen 57) theoretisch nicht nachweisbar.

Die beiden Seitenperioden sind daher weder direkt noch als Seitenbänder einer langperiodischen Schwebung theoretisch leicht erklärbar. Eine langperiodische Modulation der jahreszeitlichen Massentransporte kommt schon deshalb nicht in Frage, weil die Seitenperioden nicht symmetrisch zur Jahresperiode liegen. Die enge Koppelung mit der Periode der freien Nutation ist unverkennbar. Aber unter diesem Gesichtspunkt ist, wie wir gesehen haben, der Resonanzfall so nahe gegeben, daß sich die bisherigen theoretischen Entwicklungen als ungenügend erweisen. Will man jedoch die Glieder 2. Ordnung einbeziehen, so werden die Verhältnisse für die elastische Erde schon schwer überblickbar. Die direkten und indirekten Einflüsse überlagern sich in sehr komplizierter Weise mit den sekundären Rückwirkungen der verlagerten Rotationsachse auf den wahren Trägheitspol. Bemerkenswert bleibt, daß eine ganz geringfügige Modulation der Amplitude der sekundären Schwingung des Trägheitspoles zur Erklärung der harmonischen Komponenten in der Chandlerbewegung ausreichen würde. In dieser Hinsicht verdient die Periode der Mondknoten trotz des negativen Ergebnisses der bisherigen Theorie erhöhte Aufmerksamkeit.

Abschliessend kann daher festgestellt werden, daß der Nachweis weiterer Gesetzmäßigkeiten in der empirischen Bahn des Rotationspoles das Problem der Polhöhenchwankung in ein neues Licht gerückt hat und daß die derzeitigen theoretischen Vorstellungen einer Revision bedürfen. Sollte daher vorliegende Arbeit die theoretische Diskussion des Problems wieder in Fluß bringen, so ist damit ihr wesentlicher Zweck erfüllt.

Zusammenfassung

Die bisherigen harmonischen Analysen der überaus verwickelten Polbahn erweisen sich in zweierlei Hinsicht als unzulänglich. Bei den älteren Versuchen war nämlich das verfügbare Beobachtungsmaterial noch zu klein. Die neueren Periodogramme leiden aber an dem Mangel, daß bei der Wahl der zu analysierenden Zeitabschnitte keine Rücksicht auf möglicherweise bestehende Schwebungsphänomene genommen wurde, was notwendig zu Fehlurteilen führen muß. Vorliegende Untersuchung versucht in vorsichtigem, dauerndem Wechsel induktiver und deduktiver Gesichtspunkte diesem Mangel zu begegnen. Sie erstreckt sich in allmählicher Erweiterung über den Zeitraum 1890 - 1948. Für den ursprünglichen Zeitraum 1900 - 1938 beschränkt sie sich auf die drei durchlaufend beobachteten Stationen Mizusawa, Carloforte und Ukiah, was auch wegen ihrer ziemlich symmetrischen Verteilung empfehlenswert erschien. Um aber die lokalen Einflüsse von Jahresperiode auszuschalten, wurden in Verfeinerung des Ansatzes von Kimura die mittleren Jahresperioden getrennt für die drei Stationen abgeleitet und nachträglich in ihre lokale und polare Komponente zerlegt, wobei allerdings für erstere hypothetisch Phasengleichheit vorausgesetzt werden musste. Die erhaltene erzwungene Jahresschwingung des Rotationspoles der Erde erwies sich auch für den anschließenden Zeitraum 1900 - 1938 als recht gut übereinstimmend und durfte daher mit konstanter Phase und Amplitude der aus der sogenannten Kooperation der Sternwarten 1890 - 1900 hervorgehenden Polbahn aufgezwungen werden. Für den Zeitraum 1900 - 1938 konnten die individuellen Jahresperioden von den Schwankungen der Stationspolhöhen in Abzug gebracht und aus den Differenzen jener Teil der Polbahn berechnet werden, den man allgemein als Chandlerbewegung bezeichnet. Für den vorhergehenden und nachfolgenden Abschnitt konnten lediglich die gegebenen Polkoordinaten von dem jährlichen Glied befreit werden. Das Material ist demnach nicht streng einheitlich, was sich aber in der Folge nicht weiter unliebsam bemerkbar machte, weil der Hauptteil der lokalen Erscheinungen durch das z - Glied abgeschöpft wird.

Die weitere Analyse beschränkt sich gänzlich auf die x - Koordinate der Chandlerbewegung, da sich bisher stets nicht nur die jährliche erzwungene Schwingung, sondern auch das Hauptglied der Chandlerbewegung mit hinreichender Genauigkeit als kreisförmig ergeben hat. Besser gesagt ist es bisher noch nie gelungen, eine wenn auch schwache Elliptizität eines dieser beiden Glieder einwandfrei nachzuweisen. Die erste Aufgabe bestand in einer Neubestimmung der mittleren Dauer der Chandlerschen Periode bei besonderer Beachtung auf die sprunghafte Verkürzung dieser Periode, die sich scheinbar mit der Epoche 1922.7, dem Zeitpunkt des Übergangs auf ein streng zur Mitternacht symmetrisches Beobachtungsprogramm, einstellte. Aus den Nullstellen der x - Werte liess sich nachweisen, daß diese Verkürzung nur eine vorüber -

gehende Erscheinung ist, die sich bei Verstärkung des Effektes immer mehr auf einen kleineren Zeitraum einengen lässt, dessen Mitte ungefähr auf den Beginn des Jahres 1928 fällt. Aus den übrigen Umläufen konnte der Wanachsche Mittelwert so nahe bestätigt werden, daß ein Abgehen von ihm zwecklos erschien. Hält man willkürlich die erste Nullstelle fest und rechnet mit dem Wanachschen Mittelwert 1.185 Jahre durch, so erkennt man als Ursache der vorübergehenden Verkürzung einen Phasensprung von 180° um 1928.2 herum, der darauf hindeutet, daß die Chandlerbewegung ein Schwebungsphänomen ist.

Parallel mit dieser Feststellung musste eine neuerliche Untersuchung der Veränderlichkeit der Chandlerschen Amplitude erfolgen. Hier konnte der Verfasser an ältere eigene Versuche anknüpfen, die dem Nachweis der Knotenperiode Ω des Mondes in den Polkoordinaten gewidmet waren. Die gewonnene Darstellung des veränderlichen Radiusvektors der Chandlerbewegung läßt erkennen, daß das Minimum des harmonischen Hauptgliedes von der Periode 2Ω mit der Epoche des Phasensprunges 1928 zusammenfällt. Auch gestattete sie die Voraussage eines Maximums für 1947, die sich bei Bekanntwerden der jüngsten Resultate des Breitendienstes als zutreffend erwies. Der Phasensprung und die Periode 2Ω in der Chandlerschen Amplitude hängen somit offensichtlich zusammen und deuten darauf hin, daß die Chandlerbewegung in erster Annäherung eine reine Schwebung ist, hervorgerufen durch zwei in ihrer Periode nur um 0.04 Jahre auseinanderliegende Schwingungen gleicher Amplitude. Die bisher mit der Newcombschen Periode der freien Nutation identifizierte mittlere Chandlerperiode ist demnach gar nicht primär in den Polkoordinaten enthalten. Nach der Ermittlung der Phasenkonstanten für die beiden zunächst mit N_1 und N_2 bezeichneten Perioden mit der Schwingungsdauer 1.1664, resp. 1.2042 Jahre konnten die zugehörigen Amplituden im Ausgleichswege abgeleitet werden. Es ergab sich vollständige Gleichheit innerhalb der Unsicherheitsgrenzen bei einergleichzeitigen Abnahme im Falle der Ausdehnung des ersten Bestimmungszeitraums 1900 - 1935 bis zum Jahre 1948. Die numerische Rechnung wurde mit der Amplitude 0.083 durchgeführt. Die Nullstellen dieser Schwebung liegen genau 37.2 Jahre auseinander, sodaß eine zweite Nullstelle gerade auf das erste Jahr der Kooperation der Sternwarten fällt. Letztere Nullstelle läßt sich aber ebensowenig erkennen, wie die ältere Interpolationsformel für den Radiusvektor der Chandlerbewegung eine Ausdehnung auf die Kooperation gestattete.

Die numerische Durchbrechung erforderte vorerst eine Entscheidung in der Frage des Koordinatensystems. Denn sowohl die Albrechtschen Koordinaten der Kooperation wie auch die provisorischen Werte Carneras für die letzten 10 Jahre sind auf andere Koordinatensysteme bezogen als die aus bloss drei Stationen abgeleitete Chandlerbewegung 1900 - 1938 und auch bei dieser macht sich bereits die Verringerung der mittleren Stationspolhöhen störend bemerkbar. Eine säkulare Polwanderung, die sich übrigens aus der soeben erwähnten Abnahme der Mittelwerte der Polhöhen in Übereinstimmung mit Wanach ableiten ließ, möglicherweise systematische Einflüsse beim Wechsel des Deklinationssystems und schliesslich vorübergehende Störungen, wie z.B. jene in den Jahren 1919 - 24, die vermutlich durch eine Schollenbewegung von Carloforte zu erklären ist, machen ein strenges Festhalten des Koordinatenursprungs unmöglich, wenn man einen allzu exzentrischen Verlauf der Polbahn vermeiden will. Alle diese Nebenerscheinungen lassen sich ausschliessen, indem man jeweils 4 - Jahresabschnitte durch Addition einer Konstanten in ihren Summen

auf die zugehörigen Summen der Schwebungsperiode $S = N_1 + N_2$ abstimmt. Damit sind die Polkoordinaten mit grosser Annäherung auf das Krümmungszentrum bezogen.

Zieht man von den Chandlerschen x - Werten die Schwebungsperiode ab, so zeigt sich in den Resten noch eine Periode von 1.2445 Jahren mit der Amplitude 0.043, die als Seitenperiode M_2 bezeichnet wird. Die drei Perioden N_1 , N_2 und M_2 liegen streng symmetrisch zueinander, indem sich ihre Schwingungszahlen jeweils um den Reziprokwert der doppelten Knotenperiode unterscheiden. Es liegt mithin nahe, die mittlere Periode N_2 mit der Newcombschen Periode der freien Nutation gleichzusetzen. Eine Stütze findet diese Auffassung in dem Umstand, daß sich die neuen Reste merklich verringern lassen, wenn man für N_2 einen Dämpfungsfaktor ansetzt. Man erhält eine Halbwertszeit von nur 38 Jahren, die sogar auf 33 Jahre sinkt, wenn man auch die ersten Jahre der Kooperation in die Untersuchung einbezieht. Die Frage der Dämpfung ist von hoher geophysikalischer Bedeutung. Sie steht im engem Zusammenhang mit dem Problem der Viskositätskonstante der Erde und mit der Frage nach der Energiequelle für die freie Nutation. Wegen der kurzen Halbwertszeit kann aber der abgeleitete Ausdruck nur provisorische Bedeutung haben. Wahrscheinlicher ist eine weitere langperiodische Schwebung, die sich derzeit einem Wellental nähert. Sowohl die Dämpfung wie auch eine zusätzliche langperiodische Schwingung vermögen das merkwürdige Verhalten der Polkoordinaten in den ersten Jahren der Kooperation teilweise zu erklären. Ein anderer Teil der scheinbaren Unstimmigkeit läßt sich aber auf die Unsicherheit der Koordinaten selbst zurückführen.

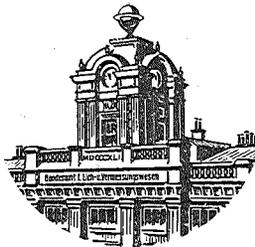
Die Periode N_2 der freien Nutation ist von zwei symmetrischen Seitenbändern flankiert, die aber nicht gleiche Amplitude aufweisen, sondern im angenäherten Amplitudenverhältnis 2 : 1 stehen. Bei gleicher Amplitude könnte man an eine im Rythmus der einfachen Knotenperiode erfolgende Modulation der freien Nutation denken. Unverkennbar ist die Koppelung dieser Perioden mit N_2 ; ein Zusammenhang mit den jährlichen Luftmassentransporten scheint demnach ausgeschlossen. Andererseits aber bietet die bisherige Theorie keinen Fingerzeig für das Auftreten einer kosmischen Periode in der Chandlerbewegung. Die beiden Seitenperioden liegen nun so nahe bei N_2 , daß der Resonanzfall fast vollständig gegeben zu sein scheint. Demnach würde eine ganz geringfügige Modulation der sekundären Bewegung des wahren Trägheitspoles zur Erklärung genügen. Unter diesem Gesichtspunkt müßte aber die Theorie noch weiter entwickelt werden. Die direkten und indirekten Einflüsse auf die Rotations- und Trägheitsachse der elastischen Erde überlagern sich aber in äusserst komplizierter Weise mit den sekundären Rückwirkungen der verlagerten Rotationsachse, so daß hier der Theorie noch eine sehr schwierige Aufgabe erhebt.

Sonderheft 8
der Österreichischen Zeitschrift
für Vermessungswesen

Zur Analyse der
Laplaceschen Widersprüche

von

Karl Ledersteger, Wien



Herausgeber, Eigentümer und Verleger:
Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen
Gruppe Vermessungswesen
Wien, VIII., Friedrich-Schmidt-Platz 3

WIEN 1949

Druck: Bundesamt für Eich- u. Vermessungswesen (Landesaufnahme), Wien

Bekanntlich wurden bei den älteren Triangulierungen für die geodätische Festlegung des Netzes 1. Ordnung für gewöhnlich die astronomischen Daten für Breite, Länge und das Azimut einer Ausgangsseite im sogenannten Triangulierungshauptpunkt unverändert auf die gewählte Referenzfläche übernommen. Dann ergeben sich in den übrigen Netzpunkten die Komponenten der relativen Lotabweichung, wenn man die astronomisch beobachteten Größen φ' , λ' und α' mit den entsprechenden geodätischen Werten φ , λ und α des rein geometrisch ausgeglichenen Netzes vergleicht:

$$(\varphi' - \varphi), (\lambda' - \lambda), (\alpha' - \alpha). \quad 1)$$

Die Doppelbestimmung der Ostwestkomponente der Lotabweichung:

$$\eta - (\lambda' - \lambda) \cos \varphi = (\alpha' - \alpha) \cotg \varphi \quad 2)$$

liefert die Laplacesche Kontrollgleichung:

$$(\alpha' - \alpha) - (\lambda' - \lambda) \sin \varphi = 0, \quad 3)$$

die zumeist einen Widerspruch w ergibt. Diese Widersprüche werden bei den neueren Triangulierungen vermieden, wenn man die Laplaceschen Bedingungen in irgend einer Form in die Netzausgleichung einführt. Sie dienen hauptsächlich zur Kontrolle der Azimutübertragung durch die Dreieckswinkel, was am einfachsten durch die Aufnahme des sogenannten "Laplaceschen Azimutes" unter die Netzbedingungen geschieht.

Die Laplaceschen Widersprüche sind in erster Linie Funktionen der astronomischen Beobachtungsfehler und der geodätischen Netzfehler. Bei den modernen Großraumtriangulierungen darf aber der Einfluß der absoluten Lotabweichung im Fundamentalpunkt nicht vernachlässigt werden. Unter "absoluten" Lotabweichungen verstehen wir dabei das Minimalssystem der Lotabweichungen, das natürlich eine Funktion des zugrundeliegenden Netzverbandes ist. In aller Strenge würden absolute Lotabweichungen ein über die ganze Erde erstrecktes Triangulierungsnetz zur Voraussetzung haben.

Um allgemeine Ausdrücke für die Laplaceschen Widersprüche zu gewinnen, setzen wir ein ausgeglichenes geodätisches Netz voraus und denken uns nachträglich jeden Laplaceschen Punkt i durch eine differentielle Verschiebung und Verdrehung des Netzes um die zugehörigen Komponenten der relativen Lotabweichung:

$$d\varphi_i = (\varphi'_i - \varphi_i), \quad d\lambda_i = (\lambda'_i - \lambda_i), \quad d\alpha_i = (\alpha'_i - \alpha_i) \quad 4)$$

der Reihe nach zum Ursprung gemacht. Damit ist zunächst die Sonderstellung des Triangulierungshauptpunktes aufgehoben. Für diese Transformation verwenden wir die Helmertschen Differentialgleichungen der geodätischen Linie:

$$d\varphi_k = \cos l_{ik} d\varphi_i + \varphi_{ik} \cdot k - \cos \varphi_i \sin l_{ik} d\alpha_i$$

$$d\lambda_k = d\lambda_i + \operatorname{tg} \varphi_k \sin l_{ik} d\varphi_i + l'' \cos \varphi_i \sec \varphi_k \cdot k + \frac{1}{\varrho^2} \varphi_{ik} \sec \varphi_k d\alpha_i$$

$$d\alpha_k = \sin l_{ik} \sec \varphi_k d\varphi_i + l' \cos \varphi_i \operatorname{tg} \varphi_k \cdot k + \cos l_{ik} \cos \varphi_i \sec \varphi_k d\alpha_i \quad 5)$$

$$\text{mit: } \varphi_{ik} = b' - \frac{l''^2}{4\varrho^2} \sin(\varphi_i + \varphi_k), \quad l_{ik}'' = (\lambda_k - \lambda_i)''$$

$$b' = (\varphi_k - \varphi_i)''$$

und beschränken uns sofort auf die Laplaceschen Widersprüche. Ist $i = h$ der Hauptpunkt, so geht im laufenden Punkt k der Widerspruch:

$$\left(w_{hk} = (\alpha'_k - \alpha_k) - (\lambda'_k - \lambda_k) \sin \varphi_k \right) \quad 6)$$

über in:

$$w_{ik} = (\alpha'_k - \alpha_k - d\alpha_k) - (\lambda'_k - \lambda_k - d\lambda_k) \sin \varphi_k.$$

Da der Netzmaßstab natürlich unverändert bleibt ($k = 0$), wird:

$$w_{ik} = \underline{w_{hk}} - A_{ik} d\varphi_i - B_{ik} d\alpha_i + d\lambda_i \sin \varphi_k$$

mit:

$$A_{ik} = \sin l_{ik} \sec \varphi_k (1 - \sin^2 \varphi_k) \quad 7)$$

$$B_{ik} = \cos l_{ik} \cos \varphi_i \sec \varphi_k - \frac{1}{\varrho^2} \varphi_{ik} \operatorname{tg} \varphi_k.$$

Für den weiteren Übergang zur absoluten Lage, die unabhängig vom jeweiligen Ausgangspunkt i stets dieselbe sein muß, wird das Netz um die negativen Komponenten der absoluten Lotabweichung verschoben, wodurch die astronomischen Ausgangswerte übergeführt werden in:

$$\varphi_i' \rightarrow \varphi_i - \varphi_i' - \underline{\Delta \varphi_i}, \quad \lambda_i' \rightarrow \lambda_i - \lambda_i' - \Delta \lambda_i, \quad \alpha_i' \rightarrow \alpha_i - \alpha_i' - \Delta \alpha_i.$$

Die zugehörige Änderung der Laplaceschen Widersprüche:

$$\bar{w}_{ik} = w_{ik} + A_{ik} \cdot \underline{\Delta \varphi_i} + B_{ik} \cdot \Delta \alpha_i - \Delta \lambda_i \sin \varphi_k \quad 8)$$

darf nur bei kleinen Distanzen vernachlässigt werden. Denn nur bei kleinen gegenseitigen Abständen der beiden Punkte i und k ist genügend nahe:

$$A_{ik} = 0, \quad B_{ik} = 1, \quad \sin \varphi_k = \sin \varphi_i,$$

sodaß $(B_{ik} \Delta \alpha_i - \Delta \lambda_i \sin \varphi_k)$ wegen der theoretischen Beziehung:

$$(\Delta \alpha_i - \Delta \lambda_i \sin \varphi_i) = 0 \quad 9)$$

unterdrückt werden kann. Abstrahiert man also für den Augenblick von allen astronomischen und geodätischen Fehlern und setzt fiktiv voraus, daß dann alle $w_{ik} = 0$ sind, so würden allein schon aus der Breitenverschiebung beim Übergang zum absoluten System Widersprüche \bar{w}_{ik} entstehen, die wir demnach als "theoretische" Widersprüche bezeichnen dürfen.

Nunmehr wenden wir uns den Fehlereinflüssen zu. Die astronomischen Fehler im Ausgangspunkt i erzeugen nun geodätische Fehler in den übrigen Netzpunkten. Die astronomischen Verbesserungen $\delta\varphi_i', \delta\lambda_i'$ und $\delta\alpha_i'$ ziehen in den Gegenpunkten k die Verbesserungen:

$$\begin{aligned} d\lambda_k &= \delta\lambda_i' + \sin l_{ik} \operatorname{tg} \varphi_k \delta\varphi_i' + \frac{1}{2} \varphi_{ik} \operatorname{sec} \varphi_k \delta\alpha_i' \\ d\alpha_k &= \sin l_{ik} \operatorname{sec} \varphi_k \delta\varphi_i' + \cos l_{ik} \cos \varphi_i \operatorname{sec} \varphi_k \delta\alpha_i' \end{aligned} \quad 10)$$

nach sich. Mithin treten an Stelle der Widersprüche w_{ik} die verbesserten Werte:

$$\bar{w}_{ik} = (\alpha_k' + \delta\alpha_k' - \alpha_k - d\alpha_k) - (\lambda_k' + \delta\lambda_k' - \lambda_k - d\lambda_k) \sin \varphi_k$$

oder:

$$\begin{aligned} \bar{w}_{ik} &= w_{ik} + (\delta\alpha_k' - \delta\lambda_k' \sin \varphi_k) - A_{ik} \delta\varphi_i' - B_{ik} \delta\alpha_i' + \\ &\quad + \delta\lambda_i' \sin \varphi_k \end{aligned} \quad 11)$$

und zusammen mit 8):

$$\begin{aligned} \bar{w}_{ik} &= w_{ik} + D_k' + A_{ik} (\Delta\varphi_i - \delta\varphi_i') + B_{ik} (\Delta\alpha_i - \delta\alpha_i') - \\ &\quad - (\Delta\lambda_i - \delta\lambda_i') \sin \varphi_k, \end{aligned} \quad 12)$$

wobei:

$$(\delta\alpha_k' - \delta\lambda_k' \sin \varphi_k) = D_k' \quad 13)$$

gesetzt ist. Leichte Umformung ergibt im Hinblick auf 9) schliesslich:

$$\begin{aligned} w_{ik} &= w_{ik} + D_k' + A_{ik} (\Delta\varphi_i - \delta\varphi_i') - (1 - B_{ik}) (\Delta\alpha_i - \delta\alpha_i') - \\ &\quad - (\Delta\lambda_i - \delta\lambda_i') (\sin \varphi_k - \sin \varphi_i) - D_i' \end{aligned} \quad 14)$$

und man erkennt, daß die meridionale Lotabweichungskomponente überhaupt nicht vom astronomischen Breitenfehler getrennt werden kann, während die astronomischen Längen- und Azimutfehler nur in der Verbindung D' auftreten.

Der Ausdruck 14) ist noch nicht vollständig, weil die rein geodätischen Netzfehler noch nicht berücksichtigt sind. Um auch diese zu erfassen, machen wir die fiktive Annahme, daß Geoid und Referenzfläche identisch sind, daß es also keine Lotabweichungen gibt, und daß die astronomischen Beobachtungen fehlerfrei sind. Zunächst erkennt man sofort, daß ein einheitlicher Fehler im Maßstab des Netzes $ds = k \cdot s$ ohne Einfluß auf den Laplaceschen Widerspruch ist. Denn wegen 5) wird der Koeffizient von k in dem Ausdruck $(d\alpha - d\lambda \sin \varphi)$ Null. Wir dürfen also den mittleren Netzmaßstab als richtig voraussetzen. Dann können geodätische Fehler lediglich durch Ungleichmäßigkeiten im Maßstab und vor allem durch fehlerhafte Dreieckswinkel entstehen. Selbstverständlich sind Azimutfehler beim

Ausgleich flächenhafter Netze viel weniger zu befürchten als bei langen Dreiecksketten, bei denen infolge einer merklichen Krümmung nicht nur beträchtliche Richtungsfehler, sondern auch Lagefehler in Breite und Länge entstehen können, die nicht mehr vernachlässigt werden dürfen. Azimutfehler können auch beim Zusammenschluß benachbarter Netze auftreten, namentlich wenn die Verbindungsnaht zu kurz ist. Wegen der vorausgesetzten Richtigkeit des Netzmaßstabes werden gewöhnlich die geodätischen Längen- und Breitenfehler gegenüber den Azimutfehlern vernachlässigt. Um allen Möglichkeiten gerecht zu werden, wollen wir von dieser Einschränkung absehen.

Die geodätischen Fehler sind natürlich relative Größen. Sie ändern sich mit der jeweiligen Wahl des Ursprungs i , in dem die fehlerfrei vorausgesetzten astronomischen Daten als Ausgangswerte fungieren. Dementsprechend müssen die geodätischen Verbesserungen doppelte Indizes tragen und die verbesserten Widersprüche werden:

$$\begin{aligned}\bar{w}_{ik} &= w_{ik} - (d\alpha_{ik} - d\lambda_{ik} \sin \varphi_k) = & 15) \\ &= w_{ik} - D_{ik}.\end{aligned}$$

Die Größen D_{ik} können in Dreiecksketten mit wachsendem Abstand vom Ursprung systematisch zunehmen; in flächenhaften Netzen werden sie einen mehr zufälligen Charakter tragen.

Eine allgemeine Relation zwischen den Größen D_{ik} gewinnt man leicht auf folgendem Wege. Seien im System des willkürlichen Punktes j die D_{jk} gegeben. Um dann den Übergang auf das System des Ursprungs i vorzunehmen, muß gemäß den obigen Voraussetzungen das Netz um die Beträge $d\varphi_{ji}$, $d\lambda_{ji}$ und $d\alpha_{ji}$ verschoben und verdreht werden. Analog 6) und 7) geht dadurch im Punkte k der Widerspruch $w_{jk} = D_{jk}$ über in:

$$w_{ik} = D_{ik} = D_{jk} - A_{ik} d\varphi_{ji} - B_{ik} d\alpha_{ji} + d\lambda_{ji} \sin \varphi_k.$$

Dieselbe Umformung wie in 14) führt weiter auf:

$$D_{ik} = D_{jk} - D_{ji} - A_{ik} d\varphi_{ji} + (1 - B_{ik}) d\alpha_{ji} + d\lambda_{ji} (\sin \varphi_k - \sin \varphi_j)^{16)}$$

Bis auf kleine Korrekturen ist also:

$$D_{ik} = D_{jk} - D_{ji}. \quad 16 a)$$

Durch Superposition von 14) und 15) sind endlich die vollständigen Ausdrücke gewonnen, die natürlich verschwinden müssen, weil alle Verbesserungen berücksichtigt sind:

$$\begin{aligned}\bar{w}_k &= 0 = w_{ik} + (D'_k - D_{jk}) - (D'_i - D_{ji}) + A_{ik} (\Delta \varphi_i - \delta \varphi'_i + d\varphi_{ji}) & 17) \\ &- (1 - B_{ik}) (\Delta \alpha_i - \delta \alpha'_i + d\alpha_{ji}) - (\Delta \lambda_i - \delta \lambda'_i + d\lambda_{ji}) (\sin \varphi_k - \sin \varphi_i).\end{aligned}$$

Man erkennt jetzt, daß die Reihe der w_{ik} im allgemeinen einen von Null verschiedenen Mittelwert, d.h. ein mehr oder minder systematisches Verhalten aufweist. Weil die astronomischen Fehlergrößen D'_k sich wie zufällige Fehler verhalten, wird ihre Summe umso eher verschwinden, je größer das System der Laplaceschen Punkte ist. Für die Summe der geodätischen Fehlergrößen D_{ik} gilt dies hingegen nicht. Ist nämlich z.B. im System des Punktes j zu-

fällig die zugehörige Summe $\sum_k D_{jk} = 0$, so folgt aus 16a):

$$\sum_{k \neq j}^n D_{jk} = -n \cdot D_{jj} \quad 18)$$

Mithin könnten die Summen $\sum_k D_{jk}$ für alle j nur verschwinden, wenn es überhaupt keine geodätischen Fehler gäbe. Innerhalb des geschlossenen Systems Laplacescher Punkte ist daher eine Trennung der astronomischen und geodätischen Fehler gänzlich unmöglich und man setzt am besten:

$$\delta \varphi_k = \delta \varphi'_k - d \varphi_{jk}, \quad \delta \lambda_k = \delta \lambda'_k - d \lambda_{jk}, \quad \delta \alpha_k = \delta \alpha'_k - d \alpha_{jk}. \quad 19)$$

Jetzt wird:

$$D_k = (\delta \alpha_k - \delta \lambda_k \sin \varphi_k) = D'_k - D_{jk}$$

und man kann 17) vereinfacht schreiben:

$$w_{jk} = D_j - D_k - A_{jk} (\Delta \varphi_j - \delta \varphi_j) + (1 - B_{jk})(\Delta \alpha_j - \delta \alpha_j) + (\Delta \lambda_j - \delta \lambda_j) (\sin \varphi_k - \sin \varphi_j). \quad 17 \text{ a)}$$

Die Freiheit in der Wahl von j gestattet die zusätzliche Annahme:

$$\sum_k^n D_k = 0. \quad 20)$$

Im arithmetischen Mittelwert der w_{jk} tritt demnach die Größe D_j in Erscheinung, allerdings noch verfälscht durch den Einfluß der Lotabweichungsglieder. Der Einfluß der azimutalen Komponente ist auch bei großer Ausdehnung des Netzes meist ziemlich klein. Hingegen können die Koeffizienten der beiden anderen Glieder beträchtliche Werte erreichen, wobei die A_{jk} für die westlichen und östlichen Randpunkte, der Koeffizient $(\sin \varphi_k - \sin \varphi_j)$ aber für die nördlichen und südlichen Randpunkte größere Zeichenfolgen und damit größere Mittelwerte aufweist.

Um diese Verhältnisse zahlenmäßig zu belegen, greifen wir aus dem kürzlich ¹⁾ berechneten großen europäischen Lotabweichungssystem 30 möglichst gut verteilte Laplacesche Punkte heraus. Das geodätische System stellt eine Erweiterung der preussischen Landesaufnahme auf dem Besselschen Ellipsoid dar. Um den hier eingeführten Voraussetzungen vollends gerecht zu werden, sind im eigentlichen Fundamentpunkt Kauenberg die alten, mit den geodätischen Ausgangswerten übereinstimmenden astronomischen Daten verwendet. Ein kleiner Fehler in der absoluten Länge von Palermo konnte berichtigt werden. Tabelle 1 enthält alle für die Rechnung erforderlichen Daten, d.h. die geographischen Koordinaten der Punkte, die ursprünglichen Lotabweichungskomponenten, die Reihe der Widersprüche w_{hk} , ferner die Ausgleichsergebnisse, nämlich die Komponenten der absoluten Lotabweichung, genauer gesagt die Größen $(\Delta \varphi - \delta \varphi)$, $(\Delta \lambda - \delta \lambda)$, $(\Delta \alpha - \delta \alpha)$ und die restlichen Laplaceschen Widersprüche w_k . Letztere fallen, wie noch näher ausgeführt wird, mit den negativen Fehlergrößen D_k

1) K.Ledersteger: Der schrittweise Aufbau des europäischen Lotabweichungssystems und sein bestanschließendes Ellipsoid, Sonderheft 3 der Oesterreichischen Zeitschrift f.Vermessungswesen, Wien 1948, Seite 124 ff.

zusammen. Geringe Unterschiede müssen in aller Strenge schon deshalb auftreten, weil unsere bloß 30 Stationen natürlich eine etwas verschiedene Lösung ergeben müßten. In den drei Tabellen 2 sind dann für die beiden Randpunkte Dziedzinka ($i = 1$) und Desierto ($i = 26$), sowie für die Station Ragusa ($i = 21$), die durch besonders große absolute Lotabweichung auffällt, die einzelnen Glieder der Reihen w_{ik} ausgewiesen. Die Größen D_k für die übrigen Punkte sind selbstverständlich ebenso durch Mittelbildung aus den von den Lotabweichungsgliedern befreiten Widersprüchen W_{ik}' gewonnen, wie in diesen drei Fällen.

2.)

Eine Ausgleichung der Lotabweichungen unter Beibehaltung des geometrisch ausgeglichenen Netzes ist bekanntlich nur so durchführbar, daß man durch eine differentielle Verschiebung und Verdrehung des Netzes eine möglichst weitgehende Annäherung der geodätischen an die astronomischen Koordinaten anstrebt. Diese günstigste Endlage des Netzes ist selbstverständlich unabhängig vom Ausgangssystem, während die Verschiebungsgrößen am besten auf das System des Fundamentalpunktes bei Zwischenschaltung des Schwerpunkts der astronomischen Punkte bezogen werden. Wir kehren somit zu diesem System zurück. Sind $d\varphi_h$, $d\lambda_h$ und $d\alpha_h$ die für den Triangulierungshauptpunkt gültigen Verschiebungselemente, so geht in den übrigen Punkten k der ursprüngliche Laplacesche Widerspruch w_{hk} in den Restwiderspruch:

$$W_k = W_{hk} - (d\alpha_k - d\lambda_k \sin \varphi_k) \quad 21)$$

über.

Die Berechnung der Verschiebungsgrößen ist aber an exaktere mathematische Definitionen gebunden und wir haben daher unsere Aufmerksamkeit dieser prinzipiellen Frage zuzuwenden. Im Hinblick auf die obige Vorstellung von der günstigsten Lage des Netzes auf der vorgegebenen Referenzfläche wurde im Eingang des ersten Abschnittes das "Absolutsystem" mit dem Minimalssystem der Lotabweichungen:

$$\Sigma (\xi^2 + \eta^2) = \min \quad 22)$$

identifiziert. Jedoch wurde bei der Ableitung der Gleichungen 17) und 17 a) von dieser Minimumbedingung kein Gebrauch gemacht, sondern lediglich angenommen, daß im Absolutsystem nach Berücksichtigung der astronomischen und geodätischen Fehler alle Laplaceschen Widersprüche verschwinden:

$$\bar{W}_k = (\Delta\alpha - \Delta\lambda \sin \varphi_k) = 0 \quad 23)$$

T a b e l l e 1

k. Station :	φ	λ	$(\varphi' - \varphi)$	$(\lambda' - \lambda)$	$(\alpha' - \alpha)$	w_{hk}	$(\Delta\varphi - \delta\varphi)$	$(\Delta\lambda - \delta\lambda)$	$(\Delta\alpha - \delta\alpha)$	w_k^*
1. Dzedzinka	55° 42' 17.25	27° 30' 03.42	- 5.94	- 5.37	- 3.21	+ 1.23	- 3.64	- 2.84	- 3.67	- 1.32
2. Wittenberg	54 49 03.64	17 56 33.97	- 4.87	+ 3.43	+ 7.07	+ 4.27	- 2.65	+ 5.44	+ 5.95	+ 1.51
3. Röst	54 39 49.19	9 53 09.33	- 7.17	+ 0.66	+ 6.06	+ 5.52	- 5.08	+ 2.27	+ 4.42	+ 2.57
4. Borkowo	53 23 22.51	21 58 17.98	- 5.54	- 5.63	+ 2.21	+ 6.73	- 3.28	- 3.34	+ 1.35	+ 4.10
5. Rauenberg	52 27 12.02	13 22 04.93	0.00	0.00	0.00	0.00	+ 2.16	+ 1.87	- 1.34	- 2.82
6. Potsdam	52 22 53.95	13 04 01.15	+ 0.86	+ 0.57	+ 1.42	+ 0.97	+ 3.01	+ 2.42	+ 0.06	- 1.86
7. Wolka Brodnicka	52 19 51.87	27 01 02.61	+ 0.25	- 3.61	- 2.23	+ 0.63	+ 2.55	- 1.05	- 2.70	- 1.87
8. Feaghmain	51 55 25.62	-10 20 54.53	- 2.77	+ 2.34	+ 9.22	+ 7.38	- 1.14	+ 3.21	+ 6.60	+ 4.07
9. Nieuport	51 07 54.34	2 45 26.28	- 4.33	+ 0.07	+ 1.46	+ 1.41	- 2.37	+ 1.72	- 0.45	- 1.79
10. Breslau	51 06 54.06	17 02 08.79	+ 1.76	+ 2.23	+ 5.93	+ 4.19	+ 3.97	+ 4.32	+ 4.85	+ 1.48
11. Bonn	50 43 44.87	7 05 54.85	- 0.07	- 6.35	- 0.10	+ 4.82	+ 1.98	- 4.70	- 1.76	+ 1.88
12. Krakau	50 03 52.48	19 57 30.17	- 0.61	+ 4.25	+ 3.07	- 0.19	+ 1.63	+ 6.51	+ 2.19	- 2.80
13. Brest	48 23 22.67	- 4 29 28.50	- 0.87	+ 4.77	+ 1.72	- 1.84	+ 0.92	+ 6.09	- 0.45	- 5.00
14. Hermannskogel	48 16 16.55	16 17 44.17	- 1.42	+ 5.94	+ 6.22	+ 1.79	+ 0.78	+ 8.09	+ 5.16	- 0.88
15. Straszahalom	48 03 51.23	21 04 27.32	- 3.21	- 2.70	+ 4.06	+ 6.07	- 0.96	- 0.35	+ 3.28	+ 3.54
16. Roman	47 02 30.30	26 52 43.24	- 0.81	- 6.96	- 1.51	+ 3.58	+ 1.49	- 4.34	- 1.94	+ 1.23
17. Bern	46 57 06.82	7 26 21.96	+ 1.84	+ 0.54	+ 1.36	+ 0.97	+ 3.90	+ 2.37	- 0.16	- 1.89
18. Puy de Dôme	45 46 23.29	2 57 52.72	+ 4.72	+ 3.63	+ 3.55	+ 0.95	+ 6.68	+ 5.35	+ 1.84	- 1.99
19. Pola	44 51 57.86	13 50 51.70	- 9.47	- 7.15	- 1.26	+ 3.78	- 7.31	- 5.00	- 2.39	+ 1.14
20. Rivesaltes	42 45 16.74	2 51 59.62	- 1.96	+ 6.27	+ 5.61	+ 1.35	+ 0.00	+ 8.11	+ 3.98	- 1.53
21. Ragusa	42 38 31.91	18 06 16.32	-21.39	-12.22	- 9.66	- 1.42	-19.17	- 9.86	-10.53	- 3.85
22. Korudschiza	41 58 43.51	25 45 12.51	+ 3.49	- 5.01	+ 3.72	+ 7.07	+ 5.78	- 2.37	+ 3.27	+ 4.85
23. Rom, Monte Mario	41 55 28.67	12 27 12.80	- 3.16	- 4.40	- 3.26	- 0.32	- 1.02	- 2.22	- 4.41	- 2.93
24. Mali Konjare	41 20 21.54	21 27 52.13	- 6.63	-18.13	- 7.64	+ 4.33	- 4.37	-15.63	- 8.32	+ 2.01
25. Guardia Vecchia	41 13 22.82	9 24 01.49	- 2.22	- 1.99	+ 2.30	+ 3.61	- 0.13	+ 0.11	+ 1.02	+ 0.94
26. Desierto	40 05 07.09	0 01 51.27	- 4.77	+10.33	+11.20	+ 4.55	- 2.87	+12.20	+ 9.51	+ 1.65
27. Palermo	38 06 51.84	13 21 15.82	+ 2.87	+ 6.79	+ 6.33	+ 2.14	+ 5.02	+ 9.10	+ 5.29	- 0.33
28. Athen	37 58 22.79	23 43 15.41	- 4.11	-18.04	- 7.00	+ 4.10	- 1.83	-15.41	- 7.53	+ 1.95
29. Tetica	37 15 07.64	- 2 24 47.69	+ 4.25	+ 7.72	+ 7.75	+ 3.08	+ 6.09	+ 9.64	+ 6.02	+ 0.19
30. Pacchino	36 41 55.43	15 05 31.92	- 6.28	+ 9.30	+ 8.88	+ 3.32	- 4.10	+11.69	+ 7.94	+ 0.95

T a b e l l e 2 a .

Dziedzinka (i = 1) .

k. Station :	W_{ik}	$+A_{ik}(\Delta\varphi_i - \delta\varphi_i)$	$-(1-B_{ik}) \cdot (\Delta\alpha_i - \delta\alpha_i)$	$-(\sin\varphi_k - \sin\varphi_i) \cdot (\Delta\lambda_i - \delta\lambda_i)$	W_{ik}'	D_k	D_i
1. Dziedzinka						+ 1.46	+ 1.46
2. Wittenberg	+ 2.51	+ 0.35	+ 0.01	- 0.02	+ 2.85	- 1.38	+ 1.47
3. Röst	+ 3.26	+ 0.64	+ 0.05	- 0.03	+ 3.92	- 2.47	+ 1.45
4. Borkowo	+ 5.28	+ 0.21	+ 0.01	- 0.07	+ 5.43	- 3.97	+ 1.46
5. Rauenberg	- 1.97	+ 0.54	+ 0.04	- 0.09	- 1.48	+ 2.94	+ 1.46
6. Potsdam	- 1.01	+ 0.55	+ 0.04	- 0.10	- 0.52	+ 1.98	+ 1.46
7. Wolka Brodnicka	- 0.45	+ 0.02	+ 0.01	- 0.10	- 0.52	+ 1.98	+ 1.46
8. Feaghmain	+ 3.94	+ 1.38	+ 0.20	- 0.11	+ 5.41	- 3.98	+ 1.43
9. Nieuport	- 1.22	+ 0.96	+ 0.10	- 0.14	- 0.30	+ 1.76	+ 1.46
10. Breslau	+ 2.52	+ 0.41	+ 0.03	- 0.14	+ 2.82	- 1.37	+ 1.45
11. Bonn	+ 2.49	+ 0.80	+ 0.08	- 0.15	+ 3.22	- 1.76	+ 1.46
12. Krakau	- 1.62	+ 0.31	+ 0.03	- 0.17	- 1.45	+ 2.92	+ 1.47
13. Brest	- 4.89	+ 1.28	+ 0.18	- 0.22	- 3.65	+ 5.11	+ 1.46
14. Hermannskogel	+ 0.18	+ 0.47	+ 0.05	- 0.23	+ 0.47	+ 0.99	+ 1.46
15. Straszahalom	+ 4.80	+ 0.27	+ 0.04	- 0.23	+ 4.88	- 3.42	+ 1.46
16. Roman	+ 2.78	+ 0.03	+ 0.04	- 0.27	+ 2.58	- 1.12	+ 1.46
17. Bern	- 1.23	+ 0.85	+ 0.10	- 0.27	- 0.55	+ 2.00	+ 1.45
18. Puy de Dôme	- 1.54	+ 1.05	+ 0.15	- 0.31	- 0.65	+ 2.10	+ 1.45
19. Pola	+ 2.12	+ 0.61	+ 0.09	- 0.34	+ 2.48	- 1.03	+ 1.45
20. Rivesaltes	- 1.07	+ 1.11	+ 0.19	- 0.42	- 0.19	+ 1.64	+ 1.45
21. Ragusa	- 2.61	+ 0.44	+ 0.10	- 0.42	- 2.49	+ 3.96	+ 1.47
22. Korudschiza	+ 6.47	+ 0.08	+ 0.10	- 0.45	+ 6.20	- 4.74	+ 1.46
23. Rom, Monte Mario	- 1.97	+ 0.70	+ 0.14	- 0.45	- 1.58	+ 3.03	+ 1.45
24. Mali Konjare	+ 3.44	+ 0.29	+ 0.10	- 0.47	+ 3.36	- 1.90	+ 1.46
25. Guardia Vecchia	+ 1.75	+ 0.85	+ 0.16	- 0.47	+ 2.29	- 0.83	+ 1.46
26. Desierto	+ 1.98	+ 1.28	+ 0.25	- 0.52	+ 2.99	- 1.55	+ 1.44
27. Palermo	+ 0.72	+ 0.70	+ 0.19	- 0.59	+ 1.02	+ 0.43	+ 1.45
28. Athen	+ 3.55	+ 0.19	+ 0.16	- 0.60	+ 3.30	- 1.85	+ 1.45
29. Tetica	+ 0.39	+ 1.45	+ 0.33	- 0.63	+ 1.54	- 0.09	+ 1.45
30. Pacchino	+ 2.11	+ 0.63	+ 0.21	- 0.65	+ 2.30	- 0.85	+ 1.45
Summe	+30.71	+18.45	+ 3.18	- 8.66	+43.68	: 30 =	+ 1.46

T a b e l l e 2 b .

Ragusa (i = 21) .

k. Station :	W_{ik}	$+A_{ik}(\Delta\varphi_i - \delta\varphi_i)$	$-(1-B_{ik})$ $(\Delta\alpha_i - \delta\alpha_i)$	$-(\sin\varphi_k - \sin\varphi_i)$ $(\Delta\lambda_i - \delta\lambda_i)$	W_{ik}'	D_k	D_{21}
1. Dziedzinka	+ 2.41	- 1.76	+ 0.39	+ 1.47	+ 2.51	+ 1.46	+ 3.97
2. Wittenberg	+ 3.67	+ 0.03	+ 0.26	+ 1.38	+ 5.34	- 1.38	+ 3.96
3. Röst	+ 3.15	+ 1.59	+ 0.31	+ 1.36	+ 6.41	- 2.47	+ 3.94
4. Borkowo	+ 7.24	- 0.77	+ 0.21	+ 1.24	+ 7.92	- 3.97	+ 3.95
5. Rauenberg	- 1.28	+ 0.96	+ 0.19	+ 1.14	+ 1.01	+ 2.94	+ 3.95
6. Potsdam	- 0.37	+ 1.03	+ 0.18	+ 1.13	+ 1.97	+ 1.98	+ 3.95
7. Wolka Brodnicka	+ 2.43	- 1.82	+ 0.23	+ 1.13	+ 1.97	+ 1.98	+ 3.95
8. Feaghmain	+ 0.37	+ 5.63	+ 0.84	+ 1.08	+ 7.92	- 3.98	+ 3.94
9. Nieuport	- 2.30	+ 3.18	+ 0.33	+ 1.00	+ 2.21	+ 1.76	+ 3.97
10. Breslau	+ 3.98	+ 0.22	+ 0.12	+ 1.00	+ 5.32	- 1.37	+ 3.95
11. Bonn	+ 2.24	+ 2.32	+ 0.22	+ 0.95	+ 5.73	- 1.76	+ 3.97
12. Krakau	+ 0.46	- 0.40	+ 0.09	+ 0.88	+ 1.03	+ 2.92	+ 3.95
13. Brest	- 7.23	+ 4.89	+ 0.49	+ 0.69	- 1.16	+ 5.11	+ 3.95
14. Hermannskogel	+ 1.83	+ 0.40	+ 0.06	+ 0.68	+ 2.97	+ 0.99	+ 3.96
15. Straszahalom	+ 7.33	- 0.66	+ 0.05	+ 0.66	+ 7.38	- 3.42	+ 3.96
16. Roman	+ 6.43	- 1.99	+ 0.10	+ 0.54	+ 5.08	- 1.12	+ 3.96
17. Bern	- 1.12	+ 2.42	+ 0.13	+ 0.53	+ 1.96	+ 2.00	+ 3.96
18. Puy de Dôme	- 2.24	+ 3.49	+ 0.21	+ 0.39	+ 1.85	+ 2.10	+ 3.95
19. Pola	+ 3.67	+ 1.01	+ 0.02	+ 0.28	+ 4.98	- 1.03	+ 3.95
20. Rivesaltes	- 1.60	+ 3.70	+ 0.20	+ 0.01	+ 2.31	+ 1.64	+ 3.95
21. Ragusa						+ 3.96	+ 3.96
22. Korudschiza	+10.63	- 1.90	+ 0.05	- 0.08	+ 8.70	- 4.74	+ 3.96
23. Rom, Monte Mario	- 0.42	+ 1.41	+ 0.03	- 0.09	+ 0.93	+ 3.03	+ 3.96
24. Mali Konjare	+ 6.85	- 0.84	+ 0.01	- 0.17	+ 5.85	- 1.90	+ 3.95
25. Guardia Vecchia	+ 2.72	+ 2.18	+ 0.07	- 0.18	+ 4.79	- 0.83	+ 3.96
26. Dasierto	+ 1.00	+ 4.55	+ 0.29	- 0.33	+ 5.51	- 1.55	+ 3.96
27. Palermo	+ 2.82	+ 1.25	+ 0.05	- 0.59	+ 3.53	+ 0.43	+ 3.96
28. Athen	+ 7.84	- 1.48	+ 0.06	- 0.61	+ 5.81	- 1.85	+ 3.96
29. Tetica	- 1.00	+ 5.35	+ 0.41	- 0.71	+ 4.05	- 0.09	+ 3.96
30. Pacchino	+ 4.72	+ 0.81	+ 0.06	- 0.79	+ 4.80	- 0.85	+ 3.95
Summe	+64.23	+34.80	+ 5.66	+13.99	+118.68	: 30 =	+ 3.96

T a b e l l e 2 c .

Desierto (1 = 26) .

k. Station :	W_{ik}	$+A_{ik}(\Delta\varphi_i - \delta\varphi_i)$	$-(1 - B_{ik}) \cdot$ $\cdot(\Delta\alpha_i - \delta\alpha_i)$	$-(\sin\varphi_k - \sin\varphi_i) \cdot$ $\cdot(\Delta\lambda_i - \delta\lambda_i)$	W_{ik}	D_k	D_{26}
1. Dzielzinka	+ 1.04	- 0.75	- 1.05	- 2.22	- 2.98	+ 1.46	- 1.52
2. Wittenberg	+ 3.11	- 0.51	- 0.64	- 2.12	- 0.16	- 1.38	- 1.54
3. Röst	+ 3.73	- 0.28	- 0.43	- 2.10	+ 0.92	- 2.47	- 1.55
4. Borkowo	+ 5.71	- 0.64	- 0.70	- 1.94	+ 2.43	- 3.97	- 1.54
5. Rauenberg	- 1.87	- 0.40	- 0.40	- 1.82	- 4.49	+ 2.94	- 1.55
6. Potsdam	- 0.94	- 0.40	- 0.39	- 1.81	- 3.54	+ 1.98	- 1.56
7. Wolka Brodnicka	- 0.07	- 0.80	- 0.85	- 1.80	- 3.52	+ 1.98	- 1.54
8. Feaghmain	+ 4.15	+ 0.32	- 0.31	- 1.75	+ 2.41	- 3.98	- 1.57
9. Nieuport	- 1.37	- 0.09	- 0.20	- 1.64	- 3.30	+ 1.76	- 1.54
10. Breslau	+ 2.42	- 0.53	- 0.44	- 1.64	- 0.19	- 1.37	- 1.56
11. Bonn	+ 2.25	- 0.22	- 0.22	- 1.59	+ 0.22	- 1.76	- 1.54
12. Krakau	- 1.85	- 0.63	- 0.49	- 1.50	- 4.47	+ 2.92	- 1.55
13. Brest	- 5.42	+ 0.15	- 0.12	- 1.27	- 6.66	+ 5.11	- 1.55
14. Hermannskogel	- 0.43	- 0.53	- 0.32	- 1.25	- 2.53	+ 0.99	- 1.54
15. Straszahalom	+ 4.25	- 0.69	- 0.47	- 1.22	+ 1.87	- 3.42	- 1.55
16. Roman	+ 2.19	- 0.88	- 0.66	- 1.07	- 0.42	- 1.12	- 1.54
17. Bern	- 2.12	- 0.25	- 0.12	- 1.06	- 3.55	+ 2.00	- 1.55
18. Puy de Dôme	- 2.61	- 0.10	- 0.05	- 0.89	- 3.65	+ 2.10	- 1.55
19. Pola	+ 0.90	- 0.49	- 0.19	- 0.75	- 0.53	- 1.03	- 1.56
20. Rivesaltes	- 2.64	- 0.10	- 0.02	- 0.43	- 3.19	+ 1.64	- 1.55
21. Ragusa	- 4.17	- 0.65	- 0.28	- 0.41	- 5.51	+ 3.96	- 1.55
22. Korudschiza	+ 4.96	- 0.93	- 0.55	- 0.30	+ 3.18	- 4.74	- 1.56
23. Rom, Monte Mario	- 3.70	- 0.46	- 0.13	- 0.30	- 4.59	+ 3.03	- 1.56
24. Mali Konjare	+ 1.71	- 0.79	- 0.38	- 0.20	+ 0.34	- 1.90	- 1.56
25. Guardia Vecchia	- 0.11	- 0.35	- 0.07	- 0.18	- 0.71	- 0.83	- 1.54
26. Desierto						- 1.55	- 1.55
27. Palermo	- 1.64	- 0.52	- 0.16	+ 0.33	- 1.99	+ 0.43	- 1.56
28. Athen	+ 1.31	- 0.91	- 0.46	+ 0.35	+ 0.29	- 1.85	- 1.56
29. Tetica	- 2.01	+ 0.10	- 0.02	+ 0.47	- 1.46	- 0.09	- 1.55
30. Paolino	- 0.47	- 0.60	- 0.21	+ 0.56	- 0.72	- 0.85	- 1.57
Summe	+ 6.31	- 12.93	- 10.33	- 29.55	- 46.50	: 30 =	- 1.55

Da nun jede weitere Verschiebung zwangsläufig in größerer Entfernung vom Ursprung merkliche theoretische Widersprüche erzeugt, ist allein das durch 17 a) bestimmte System widerspruchsfrei und daher am ehesten zur Definition des Absolutsystems geeignet. Hier erheben sich sofort zwei prinzipielle Fragen:

1.) Gibt es überhaupt für jede beliebige Referenzfläche ein widerspruchsfreies System? Es wird dies jedenfalls durch den Ansatz der Gleichung 17 a) gefordert und es ist möglich, daß dadurch die Fehlergrößen D verfälscht werden.

2.) Welche Beziehung besteht zwischen dem widerspruchsfreien Absolutsystem und dem Minimalsystem der Lotabweichungen? Aus dem erwiesenermaßen möglichen regional-systematischen Verlauf der Lotabweichungen geht zur Genüge hervor, daß namentlich für kleinere Gebiete das Minimalsystem mehr oder minder vom Absolutsystem abweichen kann. Hier aber werden sich die Fehler der Annahme $\overline{w}_k = 0$ wegen ihrer Geringfügigkeit nicht bemerkbar machen. Je größer andererseits das Lotabweichungssystem ist, umso geringer wird der Einfluß eines regional-systematischen Verlaufes sein, d.h. umso mehr wird sich das Minimalsystem dem widerspruchsfreien Absolutsystem annähern. Denn ebenso wie für die Schwerestörungen²⁾ würde für die absoluten Lotabweichungen eines über die ganze Erde ausgedehnten Triangulierungsnetzes das Minimumprinzip a priori gelten. Durch diese Überlegungen erst scheint die in der Praxis der Lotabweichungsausgleichung übliche Verbindung der Gleichungen 22) und 23) gerechtfertigt.

Eine Ableitung der absoluten Lotabweichungen direkt aus den Laplaceschen Widersprüchen, d.h. auf Grund der Gleichung 17 a) wäre daher von prinzipieller Bedeutung. Sie scheitert praktisch daran, daß die Mittelwerte der Lotabweichungsglieder in den Mittelwerten der w_{ki} stecken und demnach die Fehlergrößen D_k namentlich für die Randpunkte beträchtlich verfälschen. Führt man mit anderen Werten die Mittelwerte der w_{ki} als erste Näherungen für die D_k in die Einzelwerte ($w_{ik} + D_k$) ein, so sind diese selbst noch um Größen von der Ordnung der zu ermittelnden Lotabweichungsglieder verfälscht, sodaß das Verfahren sukzessiver Approximation wenig Erfolg verspricht. Bei vorausgesetzter Fehlerfreiheit könnte aber aus 17 a):

$$w_{hk} - (1 - B_{hk}) \Delta \alpha_h = -A_{hk} \Delta \varphi_h + \Delta \lambda_h (\sin \varphi_k - \sin \varphi_h)$$

empirisch entschieden werden, wieweit das Absolutsystem mit dem Minimalsystem übereinstimmt. In der letzten Gleichung ist das Azimutglied auf die linke Seite genommen, weil wegen der Kleinheit des Koeffizienten im allgemeinen die Einführung eines Näherungswertes genügen würde.

Wir wenden uns der Lotabweichungsausgleichung auf Grund der Bedingung 22) zu. Wegen der gleichzeitigen Annahme 23) oder der Deutung der Restwidersprüche w_k allein aus den astronomischen und geodätischen Fehlern folgt aus den Definitionsgleichungen der absoluten Lotabweichungen:

2) K.Ledersteger: Über die Minimeigenschaft der Schwerestörungen, Zeitschrift f.Geophysik, Jahrg.11, 1935, Seite 23 - 29.

$$\Delta \varphi_k = (\varphi_k' + \delta \varphi_k - \varphi_k - d\varphi_k)$$

$$\Delta \lambda_k = (\lambda_k' + \delta \lambda_k - \lambda_k - d\lambda_k)$$

$$\Delta \alpha_k = (\alpha_k' + \delta \alpha_k - \alpha_k - d\alpha_k)$$

sofort:

$$w_k^* = -D_k \quad 21 \text{ a)}$$

oder:

$$(w_{hk} + D_k) = d\alpha_k - d\lambda_k \sin \varphi_k \quad 24)$$

und speziell für den Hauptpunkt ($w_{hh} = 0$):

$$D_h = \delta \alpha_h - \delta \lambda_h \sin \varphi_h = d\alpha_h - d\lambda_h \sin \varphi_h \quad 24 \text{ a)}$$

Gleichung 24) ist natürlich nur eine andere Form von 17 a). Denn im Punkte $i = h$ ist wegen $\varphi_h = \varphi_h'$ u.s.w. auch $(\Delta \varphi_h - \delta \varphi_h) = -d\varphi_h$ u.s.w.

Nun sind andererseits dank der weitgehenden gegenseitigen Unabhängigkeit der Verschiebungsgrößen, wie sie aus den Helmertschen Differentialformeln 5) hervorgeht, die arithmetischen Mittelwerte:

$$(\varphi' - \varphi)_m = d\varphi_s, (\alpha' - \alpha)_m = d\alpha_s, (\lambda' - \lambda)_m = d\lambda_s \quad 25)$$

schon sehr gute Annäherungen für die gesuchten Unbekannten, die man aber korrekter auf den Schwerpunkt S des Systems bezieht und von diesem leicht mittels 5) auf den Hauptpunkt überträgt. Es genügt dabei, die Mittelwerte der geodätischen Längen und Breiten als Schwerpunktskoordinaten einzuführen. Aus 24) und 20) folgt jetzt aber:

$$(w_{hk})_m = d\alpha_s - d\lambda_s \sin \varphi_s, \quad 26)$$

d.h. daß damit bereits mit großer Annäherung auch der Forderung $w_k = 0$ Genüge getan ist. Es ist daher ziemlich belanglos, wie man für den zweiten Rechengang die Minimumforderung ansetzt, weil ja die astronomischen und geodätischen Fehler unbekannt sind und ohne eine zweite Netzausgleichung auch nicht teilweise eliminiert werden können. Am bequemsten scheint immer noch der Vorgang, daß man die Elemente der Verschiebung $d\varphi_s$ und $d\lambda_s$ aus der Minimumbedingung für die restlichen Lotabweichungen:

$$\Sigma [(\Delta \varphi - \delta \varphi)^2 + (\Delta \lambda - \delta \lambda)^2 \cos^2 \varphi] = \min \quad 27)$$

und sodann die Verdrehung aus der Minimumbedingung für die Restwidersprüche:

$$[w^* w^*] = \min \quad 28)$$

ermittelt.³⁾ Dies ist natürlich keine streng einheitliche Lösung und insofern

3) K.Ledersteger: Das Lotabweichungssystem der österreichisch-ungarischen Militärtriangulierung, Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst, Jahrgang 1943, Seite 78 - 105.

theoretisch nicht ganz befriedigend. Bei der Verbindung der beiden Minimumbedingungen 27) und 28) ergibt sich aber eine logische Schwierigkeit, ähnlich wie bei der begrifflichen Unterscheidung von 22) und 23). Denn sobald 23) nicht erfüllt ist, ist die Ostwestkomponente η der Lotabweichung nicht eindeutig, da ja gilt:

$$\bar{w} \cotg \varphi = \Delta\alpha \cotg \varphi - \Delta\lambda \cos \varphi = \eta_\alpha - \eta_\lambda. \quad 29)$$

Man darf also nicht eine einheitliche Lösung für die Lotabweichungsausgleichung mit dem Ansatz:

$$\Sigma (\xi^2 + \eta^2 + w^2) = \min$$

erzwingen wollen. Daran ändert auch die Einführung verschiedener Gewichte nichts, die den gänzlich heterogenen Charakter der Lotabweichungskomponenten als physikalischer Größen und der Laplaceschen Widersprüche als Fehler nicht beseitigen können. Wohl aus diesem Grunde hat bereits Helmert die Behandlung der Laplaceschen Widersprüche in der astronomisch-geodätischen Ausgleichung von der nachträglich noch offenen reinen Lotabweichungsausgleichung getrennt.

Man könnte diese Schwierigkeit durch den Ansatz:

$$\Sigma (2\xi^2 + \eta_\lambda^2 + \eta_\alpha^2) = \Sigma 2 (\Delta\varphi - \delta\varphi)^2 + (\Delta\lambda - \delta\lambda)^2 \cos^2 \varphi + (\Delta\alpha - \delta\alpha)^2 \cotg^2 \varphi = \min \quad 30)$$

umgehen, wodurch 28) überflüssig wird. Praktisch aber könnte man überhaupt jede zweite Näherung als überflüssig bezeichnen, namentlich sobald wie hier vorausgesetzt lauter Laplacesche Punkte vorliegen. Das angedeutete Verfahren soll vielmehr auch die Ausnützung des älteren astronomischen Materials, d.h. der einfachen Lotabweichungspunkte, auf denen nur zwei von den drei Bestimmungstücken astronomisch gemessen wurden, ermöglichen. Auch hier wird man bei einigem physikalischen Gefühl recht gute Ergebnisse erzielen. Am einfachsten ergänzt man die fehlenden astronomischen Beobachtungen unter Berücksichtigung des mittleren Widerspruchs:

$$(\alpha' - \alpha)_k = w_m + (\lambda' - \lambda)_k \sin \varphi_k,$$

wodurch obiger einfacher Fall rekonstruiert ist. Es setzt dies bloß voraus, daß genügend viele Laplacesche Punkte vorhanden sind, um einen ausreichend verlässlichen Mittelwert w_m ableiten zu können. ⁴⁾ Der Hauptfehler, der bei kritischen Erörterungen vielfach gemacht wird, besteht darin, daß man von Lotabweichungsausgleichungen überhaupt zuviel verlangt und daß man fehlertheoretischen Betrachtungen ein zu großes Gewicht bei der Beurteilung von Einzelfällen einräumt.

Im Zusammenhang mit dem Problem der Lotabweichungsausgleichung, das hier an sich gar nicht zur Debatte steht, sei noch Folgendes erwähnt. H. Wolf ⁵⁾ hat kürzlich derartige Näherungsverfahren wie das oben skizzierte als Spezialfall der astronomisch-geodätischen Ausgleichung mit dem Gewicht Null für die astronomischen Beobachtungen charakterisiert. Diese an sich

4) Siehe l.c. 1).

5) Helmut Wolf: Über die Behandlung der Laplace-Punkte im Zentraleuropäischen Netz, Institut für Erdmessung, Bamberg 1948.

richtige Auffassung ist geeignet, jene Verfahren in ein schiefes Licht zu rücken. Es handelt sich ja um eine nachträgliche astronomische, in erster Linie der Orientierungskontrolle dienende Überprüfung eines geodätisch bereits ausgeglichenen Netzes, wobei man lediglich aus Gründen der Arbeitsökonomie davon Abstand nimmt, das Netz nochmals aufzureissen. Wie Wolf richtig bemerkt, ist der umgekehrte Extremfall die Verwendung der Laplaceschen Azimute. Hier erhalten also die astronomischen Azimute und Längen unendlich großes Gewicht. Trotzdem ist es ohneweiters möglich und sogar empfehlenswert, ein z.B. nach der Bowleschen Methode ausgeglichenes Netz nachträglich einer Lotabweichungsausgleichung nach einem Näherungsverfahren zu unterziehen.

Betreffs der Anwendung der Laplaceschen Azimute, die durch Auflösung der Laplaceschen Gleichung nach dem geodätischen Azimut hervorgehen:

$$\alpha_2 = \alpha' - (\lambda' - \lambda) \sin \varphi \quad 31)$$

wurden bereits mehrere scharfsinnige, auf fehlertheoretischer Grundlage beruhende Untersuchungen angestellt. Nach Berroth ⁶⁾ empfiehlt sich die Verwendung dieser Relation, die er als freie astronomische Orientierung bezeichnet, erst bei einer Entfernung von über 400 km, um das hohe astronomische Gewicht zu rechtfertigen, das dabei im Verhältnis zum Gewicht der geodätischen Azimutübertragung in der Dreieckskette vorausgesetzt ist. Bei diesen Entfernungen machen sich aber bereits die absoluten Lotabweichungskomponenten im theoretischen Widerspruch bemerkbar. Die Verwendung der Laplaceschen Azimute ist also in aller Strenge daran gebunden, daß im Triangulierungshauptpunkt der absoluten Lotabweichung Rechnung getragen wird, d.h. als geodätische Ausgangswerte:

$$\varphi = \varphi' - \Delta \varphi, \lambda = \lambda' - \Delta \lambda, \alpha = \alpha' - \Delta \alpha \quad 32)$$

eingeführt werden. Ansonst werden die Laplaceschen Azimute durch die unbekanntesten absoluten Lotabweichungen mit zunehmendem Abstand vom Ursprung immer mehr verfälscht. Lotabweichungskomponenten von 5" erzeugen z.B. bei einer Breite des Hauptpunktes von $\varphi_h = 45^\circ$ in einem Längenabstand von $10^0 = 728$ km bereits einen Widerspruch von 0"61 und in einem Breitenabstand von $10^0 = 1110$ km einen Widerspruch von 0"68, resp. 0"56. Die Notwendigkeit der Kenntnis der absoluten Lotabweichung im Fundamentalpunkt ist bisher nicht immer beachtet oder zumindest nicht immer mit der nötigen Schärfe betont worden.

6) A. Berroth: Die Übertragung von Richtungen in weite Fernen, Allgemeine Vermessungsnachrichten, Jahrgang 1938, Seite 377 ff.

3.

Es wurde bereits früher darauf hingewiesen, daß innerhalb des geschlossenen Systems eine exakte Trennung des astronomischen und geodätischen Fehlers in den Größen D_k unmöglich ist. Ebenso wenig kann aus dem systematischen Gang der w_{jk} mit der geographischen Breite eine Trennung der azimutalen und longitudinalen Komponente vorgenommen werden, weil dieser Gang vorwiegend durch die absolute Lotabweichung in Länge bedingt ist. Der Gedanke aber, die Trennung auf Grund der mittleren Fehlerquadrate vorzunehmen, zeitigt bloß rein formale Lösungen. Dies ist auch bei der astronomisch-geodätischen Ausgleichung nach Helmert der Fall. Wie schon oben bemerkt, ist die Anwendung fehlertheoretischer Ergebnisse, letzten Endes also statistischer Gesetzmäßigkeiten auf Einzelwerte nicht statthaft.

Wir richten unsere Aufmerksamkeit zunächst auf die rein astronomischen Fehlergrößen D_k^* . Die soeben betonte Unmöglichkeit einer Trennung der azimutalen und longitudinalen Komponente spricht zugleich gegen die zumeist als selbstverständlich angenommene azimutale Deutung der Widersprüche. Letztere hat ihre Ursache in dem Umstand, daß die älteren Längen gewöhnlich der Albrechtschen Längenausgleichung entstammen und daher gegenüber den damaligen Azimutbestimmungen ein viel höheres Gewicht aufweisen. Dieser Sachverhalt ist aber bei den modernen, auf den Radiozeitzeichen beruhenden und zumeist einseitigen Längenmessungen und den in ihrer Genauigkeit gesteigerten modernen Azimutmessungen nicht mehr gegeben. Da bei Längenmessungen überdies die Gefahr einer systematischen Verfälschung, besonders durch eine nicht vollständig richtige Erfassung der persönlichen Gleichung gegeben ist, kann kaum mehr von einer höheren Sicherheit des Längenwertes gesprochen werden. Eine Entscheidung über die beiden Komponenten $\delta\alpha'$ und $\delta\lambda'$ wird daher im allgemeinen nur durch astronomische Neubeobachtungen möglich sein.

So ist in dem großen, im System der preussischen Landesaufnahme berechneten Lotabweichungssystem (siehe Fußnote 1) der mittlere Laplacesche Widerspruch:

$$(w_{hk})_m = + 2^{\circ}68.$$

Hier liegen aber die astronomischen Neuwerte im alten Fundamentalpunkt Kauenberg schon lange vor und es hat sich ergeben:

$$\delta\alpha' = + 3^{\circ}83, \quad \delta\lambda' = + 1^{\circ}10.$$

Während also (siehe 24 a) :

$$D_h = (d\alpha_h - d\lambda_h \cdot \sin \varphi_h) = + 2^{\circ}82,$$

ist mit den beobachteten Verbesserungen:

$$D'_h = (\delta\alpha' - \delta\lambda' \sin \varphi_h) = + 2^{\circ}96,$$

sodaß für den geodätischen Anteil an D_h bloß noch 0'14 überbleiben.

Liegt hier der Hauptanteil des Fehlers im astronomischen Azimut, so zeigte sich im Fundamentalpunkt Hermannskogel der österreichisch-ungarischen Militärtriangulierung der Hauptfehler in der durch geodätische Übertragung von der Sternwarte Wien abgeleiteten Länge. Die 16 Laplaceschen Punkte der MT ergaben einen mittleren Widerspruch:

$$(w_{hk})_m = + 3'57$$

und die Verschiebung ins Minimalsystem:

$$D_h = - 7'19 + 14'59 \sin \varphi_h = + 3'70.$$

Demgegenüber folgt aus der astronomischen Verbesserung $\delta\lambda' = - 4'93$, $D_h' = - \delta\lambda' \sin \varphi_h = + 3'68$, sodaß überhaupt kein geodätischer Fehler vorhanden scheint.

Besonders interessant erweist sich die Betrachtung des italienischen Fundamentalnetzes. Eine erste Bearbeitung ⁷⁾ ergab im Hauptpunkt Rom, Monte Mario, einen Widerspruch:

$$w_R^x = - D_R = - 1'85.$$

Trotz geänderter Auswahl und Behandlung der Stationen führte das Partialsystem Italien (siehe 1, Abschnitt 12) auf denselben Wert w_R . Diese beiden Berechnungen erscheinen aber durch die neue Monographie G. Boagas ⁸⁾ überholt. Aus dieser geht vor allem hervor, daß der große Laplacesche Widerspruch in Milano doch zurecht besteht. Die irriige Auffassung (6, Seite 505) hatte sich dadurch ergeben, daß die gegebenen Lotabweichungswerte nicht auf den Dom, sondern auf das Observatorium Brera zu beziehen sind. Unter diesem Gesichtspunkt wird das Mittel aus den 11 Widersprüchen (6, Seite 503/4) $w_m = + 2'38$, was natürlich ein Ansteigen des obigen Wertes D_R zur Folge hätte. Aus Tabelle XIII bei Boaga, Seite 136, findet man sogar aus einem etwas anderen Netz von 12 Stationen den mittleren Widerspruch + 2'77. Nun kann man aber dieser Arbeit auch entnehmen, daß das in Monte Mario tatsächlich gemessene Azimut nach S. Pietro in Vincoli um 2'57 größer ist als der geodätische Wert. Daraus folgt $\delta\alpha' = + 2'57$ und es ist auch hier wieder der Restwiderspruch oder die Größe D_R fast vollständig astronomisch zu deuten.

Die Berechnung des Lotabweichungssystems des Meridians von Paris (6, Abschnitt 16), in dem die geodätischen Ausgangswerte im Fundamentalpunkt Pantheon aus sechs um das Pantheon verteilten astronomischen Stationen durch geodätische Übertragung abgeleitet wurden, ergab daselbst einen Restwiderspruch $w^x = + 0'94$, der gänzlich aus dem Einfluß der fehlerhaften Station Mont Valerien erklärt werden kann. Der dort auftretende Widerspruch von über 7" ist natürlich rein astronomisch bedingt.

Für den Schweizer Fundamentalpunkt Bern fand sich in unserem Partialsystem (1, Seite 80) der Restwiderspruch $w_B^x = - 1'21$. Verwendet man aber statt des Neuwertes für die astronomische Länge, der durch Anschluß an die Nachbarstation Gurten gewonnen wurde, den um 2'5 kleineren Wert, der

7) K.Ledersteger: Theoretische und numerische Studien zur genäherten Ableitung eines bestanschliessenden Ellipsoides für Europa, Sitzungsberichte der Akademie d. Wiss. Wien, Math.-naturw. Klasse, 156. Bd., 1947.

Giovanni Boaga: La deviazione della Verticale in Italia, Monografie di Geofisica e di Geochimica, N.1, Milano, 1946.

8) Giovanni Boaga: La deviazione della Verticale in Italia, Monografie di Geofisica e di Geochimica, N.1, Milano, 1946.

früher aus dem gesamten Schweizer Längennetz abgeleitet worden ist:

$$\lambda'_B = 7^\circ 26' 20''0000 ,$$

so wird der Widerspruch mit $\delta\lambda' = - 2''5$ etwas überkompensiert. Dies ist besonders deshalb bemerkenswert, weil die modernen Schweizer Längenmessungen als vorbildlich zu bezeichnen sind. Trotz ihrer, derzeit kaum zu überbietenden Genauigkeit sind Differenzen von einigen Bogensekunden möglich.

Erwähnt werden mag noch die Station Straszahalom, bei der geodätische Rechnungen (1, Seite 22 und 43) darauf hinweisen, daß das astronomische Azimut um mehr als $3''$ zu groß ist. Tatsächlich ergab Straszahalom im Partialsystem Ungarn einen Restwiderspruch $w = + 3''59$, der also gleichfalls rein astronomisch gedeutet werden kann.

Die hier angeführten Beispiele beweisen also, daß vielfach der Restwiderspruch fast gänzlich aus den astronomischen Fehlern erklärt werden kann und daß dabei die Längen keineswegs den Vorzug vor den Azimuten verdienen. Wolf gibt als mittleren Fehler für die moderneren Azimutmessungen im zentraleuropäischen Netz $\pm 0''6$ und für die drahtlosen Längenbestimmungen $\pm 0''2$ an. In Wahrheit dürften die Azimute in mittleren Breiten eher genauer sein, wenn als terrestrisches Ziel ein benachbarter Netzpunkt 1.Ordnung dient; es hängt dies selbstverständlich von der Beobachtungsmethode und von der Zahl der Abende ab. Sicher aber ist der mittlere Fehler für die Längen in Anbetracht der möglichen systematischen Fehlerquellen höher zu veranschlagen.

Über den geodätischen Anteil an den Restwidersprüchen wurden bereits im Abschnitt 1 einige prinzipielle Bemerkungen gemacht. Nach den dortigen Bezeichnungen ist:

$$D_i = D'_i + \frac{1}{n} \sum_k D_{ik} \quad 33)$$

und es darf das Verschwinden der Summe rechter Hand nur als Zufall gewertet werden, es sei denn, daß es überhaupt keine geodätischen Fehler gibt. Bei einem ausgeglichenen flächenhaften Netz 1.Ordnung kann dies tatsächlich weitgehend der Fall sein. Wesentlich ungünstiger liegen die Verhältnisse bei Ketentriangulationen oder bei Netzzusammenschlüssen mit relativ kurzen Verbindungsnähten. Auch darauf wurde bereits oben hingewiesen. In derartigen Fällen erweist sich nun die Methode der Partialsysteme für die Beurteilung dieser Frage als besonders geeignet.

Ein relativ kleines Netz, wie es die einzelnen Teilsysteme repräsentieren, kann bei der Ausgleichung nach dem Minimumprinzip sehr leicht recht problematische Werte für die absoluten Lotabweichungen liefern. Es braucht ja bloß ein stark regionalsystematisches Verhalten vorzuliegen. Was diesen Punkt betrifft, darf auf den Abschnitt 18 der unter Anmerkung 1 zitierten Arbeit verwiesen werden. Trotz der damit verbundenen falschen Erfassung der absoluten Lotabweichungen treten aber im Hinblick auf die kleine Ausdehnung keine merklichen theoretischen Widersprüche auf. Aus demselben Grunde dürfen in einem derartigen Netz auch die geodätischen Fehler als klein betrachtet werden. Dann aber werden die Restwidersprüche im wesentlichen die astronomischen Fehler aufdecken, d.h. es wird genähert gelten: $w^* = - D_k$. Ist dieses Netz aber Teil eines größeren Netzverbandes und wird letzterer einer einheitlichen Lotabweichungsausgleichung unterworfen, so macht sich ein etwaiger Orientierungsfehler des Teilnetzes zum Kern des großen Netzes in einer systematischen Änderung der Restwidersprüche bemerkbar. Nach diesem

Prinzip kann eine Zerlegung der Restwidersprüche in ihre astronomische und geodätische Komponente erfolgen.

Einen derart großen Netzverband wird erst der künftige Europa-Zusammenschluß liefern. Wir dürfen aber zur Illustration des obigen Gedankens den provisorischen Zusammenschluß der europäischen Triangulationen heranziehen, der zum Zwecke der Aufstellung des europäischen Lotabweichungssystemes berechnet wurde.

Eine kleine Orientierungsdifferenz zeigt sich bereits beim Anschluß von Böhmen, Mähren und Österreich. Wir stellen die Restwidersprüche im Partialsystem (P.S.) Böhmen und Mähren den Werten im einheitlichen Lotabweichungssystem (L.A.S.) gegenüber:

	P.S.	L.A.S.	Δ
Dablitz	- 0'21	- 0'35	- 0'14
Hermannskogel	+ 0.37	- 0.88	- 1.25
Kremsmünster	- 0.60	- 1.22	- 0.62

Hier liegen aber keine einheitlichen Lotabweichungen vor. Das Beispiel soll vielmehr die Unsicherheit aufzeigen, die durch eine zu kleine Zahl Laplace-scher Punkte verursacht ist.

Das slowakische und das polnische Netz erfuhren beim Zusammenschluß keinerlei Verdrehung, die Restwidersprüche blieben fast gänzlich ungedändert. Hingegen zeigten sich bei der Anfelderung dieser Netze durch das Reichsamt für Landesaufnahme in Berlin starke systematische Restwidersprüche, die schon früher aus den beträchtlichen Orientierungsfehlern erklärt werden konnten. Auch das Partialsystem Ungarn fügte sich zwanglos in den Netzverband. Für Rumänien zeigt die Gegenüberstellung der Restwidersprüche:

	P.S.	L.A.S.	Δ
Cernautsi	- 0'26	+ 1'25	+ 1'51
Roman	- 0.25	+ 1.23	+ 1.48
Kischinew	- 1.79	- 0.28	+ 1.51
Nikolajew	+ 3.69	+ 5.26	+ 1.57
Sarata	- 4.99	- 3.50	+ 1.49
Balcic	+ 4.25	+ 5.64	+ 1.39

daß beim Zusammenschluß die geodätischen Azimute um 1'5 zu klein ausfielen. Es ließ sich dies schon im Partialsystem Rumänien in dem um 1'1 zu großen primären mittleren Laplaceschen Widerspruch erkennen und beruht auf Maßstabsverschiedenheit zwischen dem rumänischen Netz und der Längengradmessung in 48° Breite, die bei dem vorliegenden spärlichen Material nicht vorher erkannt werden konnte.

Fast dieselbe Erscheinung zeigt das bulgarische Netz:

	P.S.	L.A.S.	Δ
Tabija	- 1'33	- 0'09	+ 1'24
Tabijeto	- 3.05	- 1.98	+ 1.07
Nadlipackata	- 1.10	+ 0.04	+ 1.14
Kalakoc	- 0.64	+ 0.59	+ 1.23
Suhindolsky	+ 1.17	+ 2.33	+ 1.16
Sakar	- 1.06	+ 0.17	+ 1.23
Asanow	+ 0.40	+ 1.62	+ 1.22
Vojnica	+ 2.32	+ 3.39	+ 1.07
Kitka	- 1.82	- 0.69	+ 1.13
Korudschiza	+ 3.71	+ 4.85	+ 1.14

Auch hier legt bereits der mittlere primäre Widerspruch die Deutung durch eine etwas kleinere Verdrehung nahe. Die gute Übereinstimmung mit der Verdrehung Rumäniens beweist, daß ein Klaffen zwischen Bulgarien und Rumänien längs der Donaugrenze trotz des fehlenden Zusammenschlusses nicht zu fürchten ist.

Während Jugoslawien nahezu richtig dem Netzverband angeschlossen wurde, scheint in Italien wieder eine Verdrehung, diesmal im entgegengesetzten Sinne, auf :

	P.S.	L.A.S.	Δ
Rom, Monte Mario	- 1.81	- 2.93	- 1.12
Guardia Vecchia	+ 2.14	+ 0.94	- 1.20
Pacchino	+ 1.99	+ 0.95	- 1.04
Padua	+ 1.38	+ 0.26	- 1.12
Torino	- 1.60	- 2.86	- 1.26
Genua	- 0.00	- 1.20	- 1.20
Firenze	- 0.18	- 1.30	- 1.12
Palermo	+ 0.77	- 0.33	- 1.10

Sie ist nicht gänzlich reell, wie aus dem oben erwähnten Irrtum in Milano folgt. Ihr Auftreten ist wegen der zu kurzen Naht leicht verständlich.

Der äußerst schwache Zusammenschluß im Falle der Schweiz bedingt auch dort die kleine positive Verdrehung :

	P.S.	L.A.S.	Δ
Basel	+ 0.51	- 0.18	- 0.69
Zürich	- 0.69	- 1.39	- 0.70
Neuchatel	+ 0.61	- 0.07	- 0.68
Bern	- 1.21	- 1.89	- 0.68
Genf	- 0.11	- 0.79	- 0.68

Fast die gleichen Verhältnisse zeigt Frankreich :

	P.S.	L.A.S.	Δ
Pantheon	+ 0.51	- 0.03	- 0.54
Puy de Dome	- 1.47	- 1.99	- 0.52
Rodez	+ 0.43	- 0.09	- 0.52
Carcassone	- 1.00	- 1.51	- 0.51
Rivesaltes	- 1.02	- 1.53	- 0.51
Brest	- 4.44	- 5.00	- 0.56
Grand	- 5.23	- 5.73	- 0.50
Nizza	+ 5.73	+ 5.25	- 0.48
Marseille	+ 3.95	+ 3.45	- 0.50

Da hier die Orientierung beim Zusammenschluß auf besonders große Schwierigkeiten stieß, muß das Ergebnis als recht befriedigend bezeichnet werden. Doch darf nicht übersehen werden, daß die französische Fundamentaltriangulierung aus Dreiecksketten aufgebaut ist und daß nur für den Pariser Meridian definitive Ergebnisse vorlagen. Überdies sind Nizza und Marseille nur an das Hauptnetz angeschlossene Observatorien. All diese Umstände können bewirken, daß die Restwidersprüche des Partialsystems selbst teilweise geodätisch bedingt sind.

Aus diesen Beispielen geht zur Genüge hervor, daß mittels der Partialsysteme eines Netzverbandes eine ziemlich sichere Erfassung der geodätischen Anteile in den Fehlergrößen D ermöglicht wird. Dies gilt in erster Linie für kleinere flächenhafte Teilnetze, doch sind der Unterteilung gewisse

Schranken gesetzt. So ließe sich am Beispiel Griechenlands erhärten, daß bei zu kleiner Ausdehnung, verbunden mit relativ großen Fehlern eine halbwegs sichere Trennung der astronomischen und geodätischen Komponenten in den Widersprüchen unmöglich ist. Die fortgesetzte Zerlegung in Partialsysteme wird sich natürlich am weitesten treiben lassen, wenn alle Dreieckspunkte 1. Ordnung gleichzeitig Laplacesche Punkte sind. Ueberhaupt gelten die vorstehenden Überlegungen wohlgemerkt nur für astronomische Punkte, die zugleich dem Landesnetz 1. Ordnung angehören. Bei Einschaltungen astronomischer Punkte in das übergeordnete Netz können, verursacht durch die geringeren Seitenlängen, leicht geodätische Azimutfehler auftreten, die einen Laplaceschen Widerspruch zur Folge haben. Dies scheint z.B. bei dem neuen deutschen Fundamentalpunkt Potsdam der Fall zu sein, der in die Kette Berlin - Schubin eingerechnet wurde. Der Laplacesche Restwiderspruch - 1!86 dürfte demnach in der Hauptsache geodätischen Ursprungs sein.

Bekanntlich liefert die astronomisch-geodätische Ausgleichung nach Helmert unmittelbar Verbesserungen für die astronomischen Längen und Azimute. Weil nun das astronomische Azimut α'_{ik} der geodätischen Linie von P_i nach P_k aus der Verbindung des direkt gemessenen Azimuts α'_{io} der Dreiecksseite P_iP_o mit dem geodätischen Winkel $P_oP_iP_k$ hervorgeht, tritt als Orientierungsverbesserung streng genommen die Differenz aus der Verbesserung des gemessenen Azimuts und der geodätischen Verbesserung dieser Richtung auf. Es ist nämlich :

$$\delta\alpha'_{ik} = \delta\alpha'_{io} - v_{io} + v_{ik} \quad 34)$$

und daher die "Orientierungsverbesserung" :

$$\delta\alpha'_i = \delta\alpha'_{io} - v_{io}. \quad 35)$$

In die der Ausgleichung zugrundeliegenden Minimumbedingung :

$$\sum \frac{1}{s} \left(\frac{\sigma}{m}\right)^2 + \sum \frac{v_{ik}^2}{\mu_{v_{ik}}^2} + \sum \left(\frac{\delta\alpha'_i}{\mu_\delta}\right)^2 + \sum \left(\frac{\delta\lambda'_i}{\mu_\lambda}\right)^2 = \min \quad 36)$$

werden aber die 4 Gattungen von Unbekannten, nämlich die Orientierungsverbesserungen, die Verbesserungen der astronomischen Längen, ferner die Richtungsverbesserungen v_{ik} der einzelnen geodätischen Linien und die zugehörigen Seitenverbesserungen σ mit den aus den mittleren Fehlerquadraten abgeleiteten Gewichten eingeführt.

Will man daher, wie hier beabsichtigt, die astronomischen und geodätischen Fehleranteile in den Größen D_k gänzlich voraussetzungslos trennen, so eignen sich die Ergebnisse der vorliegenden astronomisch-geodätischen Ausgleichungen nur bedingt als Vergleichsmaterial. Trotzdem seien noch die Ergebnisse der in Heft V der "Lotabweichungen" niedergelegten "Ausgleichung des astronomisch-geodätischen Netzes 1. Ordnung nördlich der europäischen Längengradmessung in 52° Breite" zum Vergleich herangezogen. Wir leiten zu diesem Zwecke aus den auf Seite 103 des genannten Werkes zusammengestellten Verbesserungen $\delta\alpha'_i$ und $\delta\lambda'_i$ die astronomischen Fehlergrößen D^i ab und vergleichen sie mit den Restwidersprüchen unseres Partialsystems Deutschland :

	$\delta\alpha'$	$\delta\lambda'$	D'	w^x
Knivsberg	- 1.27	+ 0.45	- 1.64	+ 3.54
Rugard	- 0.64	+ 0.18	- 0.79	+ 1.95
Kiel	+ 0.06	- 0.01	- 0.07	+ 1.64
Goldapperberg	+ 1.29	- 0.45	+ 1.66	- 2.90
Wilhelmshaven	+ 0.29	- 0.02	+ 0.31	- 1.20
Springberg	+ 1.33	- 0.66	+ 1.86	- 2.18
Schönsee	+ 0.53	- 0.15	+ 0.65	- 0.31
Brocken	- 0.80	+ 0.08	- 0.86	+ 1.91
Göttingen	- 1.14	+ 0.22	- 1.31	+ 0.84
Leipzig	+ 2.80	- 0.19	- 2.95	+ 2.82

Dieses Beispiel mag genügen. Es zeigt, daß sich die D' im Vorzeichen richtig ergeben, hingegen im Absolutbetrag im allgemeinen kleiner sind als die Restwidersprüche. Dies ist im Hinblick auf die oben eingeführten Gewichte weiter nicht verwunderlich. Bemerkenswert ist noch, daß bei der Helmertschen Methode, hier sogar trotz der geringen Breitenausdehnung, überhaupt eine Trennung der Ausdrücke $D' = \delta\alpha' - \delta\lambda' \sin \varphi$ erfolgt. Es ist dies nur auf Grund der mittleren Fehlerquadrate möglich, was auch in dem aller Wahrscheinlichkeit widersprechenden konstanten Zeichenwechsel der beiden Verbesserungen zum Ausdruck kommt.

Wenn also auch nicht eine allgemein gültige Regel für die Trennung des astronomischen und geodätischen Anteils in den Größen D aufgestellt werden kann, so scheinen die obigen Beispiele doch einen recht interessanten Schluß zu gestatten. Im allgemeinen dürften nämlich die astronomischen Fehler eine viel größere Rolle spielen, als man gewöhnlich auf Grund fehlertheoretischer Betrachtungen annimmt.

Ein Wort wäre noch über die Beschränkung auf eine beliebig vorgegebene Referenzfläche zu sagen. Eine Änderung der Achse tangiert bekanntlich den Laplaceschen Widerspruch ebensowenig wie die Änderung des mittleren Netzmaßstabes. Hingegen bewirkt eine Änderung $d\mu$ der Abplattung die Änderung des Widerspruches :

$$dw = -\frac{ab}{\varphi^2} \cos^2 \varphi_m d\mu = -\frac{l'b'}{\varphi^2} \cos^3 \varphi_m d\mu. \quad (37)$$

Sie ist sehr klein; für $l' = b' = 10\,000''$, $\varphi_m = 45^\circ$ und $d\mu = +2423 \cdot 10^{-8}$, entsprechend dem Übergang vom Besselschen zum Hayfordschen Ellipsoid wird z.B. $dw = -0.004$, was wir natürlich vernachlässigen dürfen.

Vorliegende Arbeit bringt also der Hauptsache nach nicht eine definitive Lösung der erörterten Probleme, sondern bloß eine möglichst eingehende Problemanalyse. Aber auch diese Aporetik dürfte nicht ohne Nutzen sein. Sie vertieft den Einblick in den gesamten Fragenkomplex und gestattet so manche schief gestellte Frage und irrije Deutung abzuweisen.

Zusammenfassung.

1. Es werden allgemeine Ausdrücke für die Laplaceschen Widersprüche entwickelt, in denen neben den geodätischen und astronomischen Messungsfehlern die absolute Lotabweichung im Ursprung gemäß $(\Delta\alpha_i - \Delta\lambda_i \sin\varphi_i) = 0$ berücksichtigt ist. Die Reihen der Widersprüche w_{ik} zeigen stets ein systematisches Verhalten. In ihrem Mittelwert tritt neben den Fehlern des Ursprungs der Einfluß der absoluten Lotabweichung daselbst in Erscheinung, verschieden nach der Lage dieses Punktes innerhalb des Lotabweichungssystems.

2. Absolute Lotabweichung und das Minimalssystem der Lotabweichungen müssen wegen des möglichen regionalssystematischen Verhaltens dieser physikalischen Größen und auch im Hinblick auf die Ausdehnung des Lotabweichungssystems scharf auseinandergehalten werden. Die Lotabweichungsausgleichung erfolgt am einfachsten so, daß man die fehlenden Lotabweichungskomponenten mit Hilfe des genügend gesicherten Mittelwertes der Widersprüche fiktiv ergänzt und dann die einfachen arithmetischen Mittel der drei Komponenten als geodätische Korrekturen auf den Schwerpunkt bezieht. Eine Vereinigung der Laplaceschen Widersprüche und der Lotabweichungen in einer einzigen Minimumbedingung ist wegen des heterogenen Charakters dieser Größen auch bei Einführung von Gewichten, die mehr oder minder willkürlich sein müssen, theoretisch nicht einwandfrei.

3. Die Laplaceschen Widersprüche setzen sich aus einer longitudinalen und azimutalen Komponente einerseits und einer astronomischen und geodätischen Komponente andererseits zusammen. Eine direkte Trennung der Längen- und Azimutkomponente auf Grund der mittleren Fehlerquadrate zeitigt nur rein formale Lösungen, die keinen realen Wert haben, weil die Anwendung statistischer Gesetzmäßigkeiten auf Einzelfälle unstatthaft ist. Eine sichere Trennung ist daher nur auf dem Wege astronomischer Neubeobachtung möglich. Doch kann man durch Zerlegung des Netzes in Partialsysteme eine voraussetzungslose Trennung der astronomischen und geodätischen Bestandteile erzielen und so entscheiden, auf welchen Punkten die kostspieligen astronomischen Nachbeobachtungen Erfolg versprechen.

Weitere Publikationen:

I. Der Österreichische Grundkataster, 66 Seiten, 1948 Preis S 10.—
zu beziehen im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen,
Wien, VIII., Krotenthallergasse 3

II. Behelf zur Prüfung für den höheren technischen Vermessungsdienst:

Heft 1: Fortführung 1. Teil, 55 Seiten, 1949 Preis S 10.—
Heft 2: Fortführung 2. Teil, Bodenschätzung, 46 Seiten, 1949 Preis S 10.—
Heft 3: Höhere Geodäsie, 81 Seiten, 1949 Preis S 10.—
Heft 4: Triangulierung, 46 Seiten, 1949 Preis S 7.—
Heft 5: Neuvermessung, Nivellement und topographische Landesaufnahme,
104 Seiten, 1949 Preis S 16.—
Heft 6: Photogrammetrie und Kartographie Preis S 10.—

III. Dienstvorschriften des Bundesvermessungsdienstes:

Heft 1: Benennungen, Zeichen und Abkürzungen im Österr. Vermessungs-
dienst, 38 Seiten, Prov. Ausg. 1947 Preis S 5.—
Heft 2: Allg. Bestimmungen über Dienstvorschriften, Rechentafeln, Muster
und sonstige Drucksorten, 50 Seiten, Prov. Ausg. 1947 Preis S 6.50
Heft 8: Die österreichischen Meridianstreifen, 62 Seiten, 3. Aufl. 1949
Preis S 8.—
Heft 14: Fehlergrenzen und Hilfstabellen für Neuvermessungen, 16 Seiten,
2. Aufl. 1937 Preis S 2.50
Heft 15: Hilfstabellen für Neuvermessungen, 36 Seiten, 1. Aufl. 1949
Preis S 5.—
Heft 48: Behelfe für die Anlage von Oleaten bei der Neuaufnahme und
Kartenrevision, 17 Seiten, 4. Aufl. 1948 Preis S 12.—

II. und III. zu beziehen in der Amtsbücherei des
Bundesamtes für Eich- u. Vermessungswesen, Wien, I., Hohenstaufengasse 17