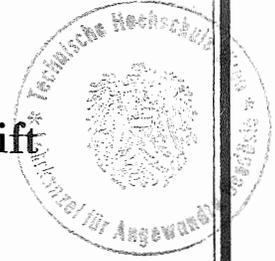


Sonderheft 5  
der Österreichischen Zeitschrift  
für Vermessungswesen



Abbildungsgesetz  
und Orientierungsaufgaben in der  
Zweimedienphotogrammetrie

von

Dipl. Ing. Dr. techn. Karl Rinner  
Gratkorn bei Graz



Herausgegeben vom Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen  
Gruppe Vermessungswesen

Eigentümer und Verleger:  
Österreichischer Verein für Vermessungswesen  
Wien, VIII., Friedrich-Schmidt-Platz 3

WIEN 1948

Bisher sind folgende Sonderhefte erschienen:

- Sonderheft 1: Festschrift Eduard Dolezal, 198 Seiten, Neuauflage 1948  
Preis S 18.—
- Sonderheft 2: Die Zentralisierung des Vermessungswesens in ihrer Bedeutung für die topographische Landesaufnahme, 40 Seiten, 1935  
wird neu aufgelegt
- Sonderheft 3: Ledersteger, Der schrittweise Aufbau des europäischen Lotabweichungssystems und sein bestanschließendes Ellipsoid  
140 Seiten, 1948 Preis S 25.—
- Sonderheft 4: Zaar, Zweimedienphotogrammetrie, 40 Seiten, 1948  
Preis S 18.—
- Sonderheft 5: Rinner, Abbildungsgesetz und Orientierungsaufgaben in der Zweimedienphotogrammetrie, 45 Seiten, 1948 Preis S 18.—

**Sonderheft 5**  
der **Österreichischen Zeitschrift**  
für **Vermessungswesen**

**Abbildungsgesetz**  
und **Orientierungsaufgaben in der**  
**Zweimedienphotogrammetrie**

von

**Dipl. Ing. Dr. techn. Karl Rinner**  
Gratkorn bei Graz



Herausgegeben vom **Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen**  
**Gruppe Vermessungswesen**

**Eigentümer und Verleger:**  
**Österreichischer Verein für Vermessungswesen**  
Wien, VIII., **Friedrich-Schmidt-Platz 3**

**WIEN 1948**

Druck: Bundesamt für Eich- u. Vermessungswesen (Landesaufnahme), Wien

## INHALTSVERZEICHNIS

I. DAS ABBILDUNGSGESETZ . . . . .	Seite 1
1. Das allgemeine Abbildungsgesetz . . . . .	" 1
2. Näherungsformeln für Aufnahmen von unter Wasser liegenden Objekten . . . . .	" 5
3. Optische Transformation des Einfallbildes in eine Perspektive . . . . .	" 8
a) Transformation durch ein optisches Zusatzsystem . . . . .	" 9
b) Transformation durch Maßstabänderung . . . . .	" 12
II. ORIENTIERUNG VON EINZELAUFNAHMEN. . . . .	" 13
1. Allgemeine Lösung . . . . .	" 13
2. Lösung mit Näherungswerten . . . . .	" 14
a) Differentialformeln für $d\xi$ , $d\eta$ , $dh$ . . . . .	" 15
b) Differentialformeln für $d\nu$ , $d\sigma_n$ , $dh$ . . . . .	" 20
c) Senkrechtaufnahmen . . . . .	" 22
3. Gefährlicher Ort . . . . .	" 23
4. Transformationsformeln . . . . .	" 23
a) Raumlage von Aufnahmeachse und Bildebene . . . . .	" 23
b) Koordinaten des Aufnahmeortes . . . . .	" 25
c) Gleichung des Lichtstrahlenbündels . . . . .	" 26
III. ORIENTIERUNG VON STEREOAUFNAHMEN. . . . .	" 27
1. Der kürzeste Abstand eines Strahlenpaares . . . . .	" 27
2. Die rechnerische Orientierung . . . . .	" 30
a) Bestimmung der Orientierungsgrößen für das Modell . . . . .	" 31
b) Bestimmung der Modellkoordinaten . . . . .	" 37
c) Einpassung des Modelles. . . . .	" 39
3. Optische Orientierung . . . . .	" 40
a) Erste Modellherstellung . . . . .	" 40
b) Die erste Modelleinpassung . . . . .	" 41
ZUSAMMENFASSUNG . . . . .	" 41
14 Textfiguren . . . . .	" 44-46

Als Zwei-Medien-Photogrammetrie wird nach K. Z a a r jener Zweig der Photogrammetrie bezeichnet, welcher die Ausmessung von Aufnahmen behandelt, die durch zwei verschieden dichte, durch eine ebene Fläche getrennte Medien hindurch erfolgt sind. Sie ist aus einer (seinerzeit vom Verfasser formulierten) Forderung der Hydrographie nach Verfahren zur Ausmessung von unter Wasser gelegenen Gegenständen aus Luftaufnahmen entstanden und wurde von K. Z a a r in [1] erstmals wissenschaftlich untersucht.

In Ergänzung zu diesen Untersuchungen werden in den folgenden Abschnitten drei Aufgaben aus der Zwei-Medien-Photogrammetrie behandelt, auf welche in [1] nicht eingegangen wurde, die allgemeine mathematische Formulierung des Abbildungsgesetzes (Abschnitt I) und die Lösung der Orientierungsaufgabe für Einzel- und für Stereoaufnahmen (Abschnitt II und III). Die hierbei gewonnenen Ergebnisse werden in einer Schlußbetrachtung zusammengefaßt.

## I. DAS ABBILDUNGSGESETZ.

Zur Erklärung der Abbildungsvorgänge werden in [1] an Stelle des aufzunehmenden Objektes „Brechungsgebilde“ eingeführt, welche als Ort der Schnittpunkte der Einfallstrahlen mit den durch die Objektpunkte gehenden Normalen zur brechenden Ebene entstehen und das aufgenommene Bild als Perspektive des Brechungsgebildes gedeutet. Diese Annahme gibt zwar Einblick in die wesentlichen Eigenschaften der Abbildung, gestattet aber nicht die mathematische Formulierung eines allgemeinen Abbildungsgesetzes. Wie im Folgenden gezeigt wird, ergibt sich diese durch Vergleich der Abbildung mit jener Perspektive, welche beim Fehlen des (das Objektiv nicht enthaltenden) zweiten Mediums entstehen würde. Die Kenntnis des Abbildungsgesetzes ermöglicht die Ausarbeitung von Vorschlägen für eine optische Transformation der Abbildung auf eine Perspektive, wodurch für die Praxis die Zwei-Medien-Photogrammetrie im wesentlichen auf die Ein-Medien-Photogrammetrie zurückgeführt wird.

Im einzelnen werden nun erst die allgemeinen Formeln für die Abbildung hergeleitet (1) und aus diesen Näherungsformeln für die von der Hydrographie geforderten Aufnahmen von unter der Wasseroberfläche liegenden Objekten entwickelt (2). Dann werden die Möglichkeiten einer optischen Transformation der Bilder (oder Aufnahmebündel) in perspektive Bilder (oder Bündel) untersucht und Vorschläge hierfür angegeben (3).

### 1. Das allgemeine Abbildungsgesetz.

$O$  sei das Aufnahmezentrum,  $\pi$  die zwischen  $O$  und dem Objekt gelegene Trennungsebene der beiden Medien,  $n$  der Brechungsquotient und  $h$  (Höhe),  $t$  (Tiefe) die Normalabstände von  $O$  und den Objektpunkten  $P$  von  $\pi$ . Die photographische Abbildung  $p^e$  der Punkte  $P$  wird durch

Strahlen vermittelt, welche in den Einfallpunkten  $P^E$  nach dem Brechungsgesetz  $\sin \alpha : \sin \beta = n$  gebrochen werden. Dabei liegen immer Einfallstrahl und gebrochener Strahl in einer Ebene durch  $h$  (Lotebene). In dieser liegt auch der die Perspektive vermittelnde Strahl, so daß das perspektive Bild  $P^C$  von  $P$  in  $\pi$  immer auf der Verbindungsgeraden der Einfallpunktes  $P^E$  mit dem Fußpunkt  $N$  von  $h$  auf  $\pi$  (Nadir) liegt. Der Betrag  $\Delta R$  der in der Richtung zum Nadirpunkt erfolgenden Verschiebung  $P^E \rightarrow P^C$  ist von  $n, h, t$  und dem Einfallswinkel  $\alpha$  abhängig und läßt sich daher als Funktion dieser Größen darstellen. Bei Kenntnis der Kammerorientierung kann aus  $\Delta R$  auch der radial zum Bildnadir liegende Abstand  $\Delta c$  zwischen dem (photographischen) Bild  $p^e$  und dem perspektiven Bildpunkt  $p^c$  berechnet werden.

Bezeichnet  $a$  den Normalabstand des Punktes  $P$  vom Einfallstrahl  $\overline{OP^E}$ , so bestehen nach Abb. 1 die Beziehungen:

$$a = \overline{PP^E} \sin (\alpha - \beta) ; \quad \overline{PP^E} = \frac{t}{\cos \beta} \quad (1a)$$

$$a = t \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)$$

Für den Normalabstand  $a^c$  des perspektiven Bildes  $P^C$  von  $\overline{OP^E}$  gilt aus Gründen der Ähnlichkeit

$$a^c = \frac{h}{h+t} \cdot a \quad (1b)$$

und aus (1a,b) läßt sich  $\Delta R$  berechnen. Es ist

$$\Delta R = \frac{a^c}{\cos \alpha} \quad (1c)$$

oder, wenn beachtet wird, daß nach dem Brechungsgesetz die Beziehungen

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{w} ; \quad w = \sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (1d)$$

gelten, schließlich:

$$\Delta R = \frac{t h}{h+t} \cdot \operatorname{tg} \alpha \left(1 - \frac{1}{w}\right) . \quad (2)$$

Nun soll der Winkel  $\Delta \alpha$  bestimmt werden, welchen der Einfallstrahl  $\overline{OP^E}$  mit dem perspektiven  $\overline{OP^C} = \overline{OP}$  einschließt. Nach Abb. 1 bestehen die Beziehungen

$$\operatorname{tg} \Delta \alpha = \frac{a^c}{\overline{OP^E} - \overline{P^E A^c}} , \quad (3)$$

$$\overline{OP^E} = \frac{h}{\cos \alpha} ; \quad a^c = \Delta R \cos \alpha ; \quad \overline{P^E A^c} = a^c \operatorname{tg} \alpha$$

und aus diesen folgt:

$$\operatorname{tg} \Delta \alpha = \frac{\Delta R \cos^2 \alpha}{h - \Delta R \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \quad (3)$$

Mit Hilfe dieses Winkels läßt sich nun die Verschiebung des Bildpunktes berechnen (Abb.2). Sind  $(x_n, y_n)$  die Bildkoordinaten des Nadirpunktes  $n$  und  $(x, y)$  die des Bildpunktes  $p^e$  und  $f$  die Bildweite, so können hieraus die Strecken  $\overline{np^e} = c$  und  $\overline{Op^e} = p$  berechnet werden:

$$c = \sqrt{(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2} ; \quad p = \sqrt{f^2 + x^2 + y^2} \quad (4a)$$

Aus dem Dreieck  $n O p^e$  (Abb. 2) folgt

$$\sin \varepsilon = \frac{p}{c} \sin \alpha \quad (4b)$$

und damit läßt sich aus dem Dreieck  $O p^c p^e$  schließlich  $\Delta c$  ermitteln.

$$\Delta c = p \frac{\sin \Delta \alpha}{\sin(\alpha + \varepsilon - \Delta \alpha)} \quad (4c)$$

Mit Hilfe der Formeln (2),(3),(4) kann zu jedem Bildpunkt  $p^e$  sein perspektives Bild  $p^c$  bestimmt, also die Abbildung auf eine Perspektive zurückgeführt werden.

Für theoretische Überlegungen ist es zweckmäßig, diese Transformation nicht in der Bildebene, sondern in  $\pi$  durchzuführen, weil dadurch die erhaltenen Formeln von den umfangreichen Relationen (4) zwischen den Punkten von  $\pi$  und ihrer Perspektive befreit werden.

Aus (2) kann auch der Abstand  $\Delta t$  des Zaar'schen Brechungsbildes  $Q$  von  $P$  abgeleitet werden. Wie aus Abb. 1 zu ersehen, ist

$$\Delta t = \frac{a}{\sin \alpha} = t \left( 1 - \frac{1}{w} \right) \quad (5)$$

in Übereinstimmung mit dem von Zaar in [1] auf anderem Weg abgeleiteten Betrag.

Nun soll die Abbildung eines beliebigen, ganz im zweiten Medium gelegenen Objektes untersucht werden. Zu diesem Zweck werden Zylinderkoordinaten mit dem Ursprung  $N$  in  $\pi$  eingeführt, so daß jeder Punkt durch seinen Normalstand  $r$  von der Geraden  $h = [O \perp \pi]$ , dem Winkel  $\varphi$  desselben mit einer willkürlich gewählten Null (Lot)-ebene durch  $h$  und seine Tiefe  $t$  gegeben wird (Abb.3). Einem Punkt  $P$  ( $r, \varphi, t$ ) entspricht in  $\pi$  das perspektive Bild  $P^c$  ( $R^c, \varphi$ ), wobei der Radiusvektor aus

$$R^c = \frac{r h}{h + t} \quad \text{oder} \quad R^c = r - \frac{r t}{h + t} = r - \Delta R^c \quad (6a)$$

zu berechnen ist, und das Einfallsbild  $P^e$  ( $R, \varphi$ ) für welches

$$R = R^c + \Delta R = r - \Delta R^c + \Delta R, \quad (6b)$$

oder nach Einsetzen von (2) schließlich folgt:

$$R = \frac{h r}{h + t} \left[ 1 + \frac{t}{r} \operatorname{tg} \alpha \left( 1 - \frac{1}{w} \right) \right]. \quad (6c)$$

Darin muß noch  $\alpha$  durch die Ausgangskordinaten und  $h$  ausgedrückt werden, was mit Hilfe der Beziehung

$$r = h \operatorname{tg} \alpha + t \operatorname{tg} \beta \quad (7)$$

erfolgen kann. Es ergibt sich für den Winkel  $\alpha$  eine Gleichung 4. Grades (siehe [1]), von deren Wurzeln aber offensichtlich nur eine einzige als praktische Lösung in Frage kommt und durch schrittweise Verbesserung einer Näherung bestimmt werden soll. Zu diesem Zweck wird (7) mit Hilfe von (1d) umgeformt:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{h} \frac{1}{1 + \frac{t}{h w}} = f(w) \quad (8a)$$

$$w = \sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \alpha} = g(\alpha). \quad (8b)$$

Eine Näherung  $\alpha_0$  wird entweder graphisch mit dem von Zaar in [1] vorgeschlagenen Gerät oder aus

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{r}{h} \quad (8c)$$

bestimmt und aus dieser der Reihe nach

$$w_0 = g(\alpha_0) \rightarrow \operatorname{tg} \alpha' = f(w_0)$$

$$w' = g(\alpha') \rightarrow \operatorname{tg} \alpha'' = f(w') \text{ usw.} \quad (8d)$$

berechnet, bis  $\operatorname{tg} \alpha^{(n)}$  genügende Genauigkeit besitzt. Dies ist dann der Fall, wenn sich bei Wiederholung des Verfahrens die letzte der geforderten Dezimalstellen von  $\operatorname{tg} \alpha$  nicht mehr ändert. Das Verfahren konvergiert im allgemeinen rasch und führt für  $\alpha < 40^\circ$  in der Regel ohne viel Rechenaufwand schon nach einmaliger Wiederholung zum Ziel. Z.B. folgt für  $h = 100 \text{ m}$ ,  $t = 10 \text{ m}$ ,  $r = 61,902 \text{ m}$

	w	tg
$\alpha_0$	1,398	0,61902
$\alpha'$	1,386	0,57770
$\alpha$		0,57735 $\alpha = 30^\circ$ .

Unter Umständen ist es von Vorteil nach Bestimmung von  $\operatorname{tg} \alpha'$  Differentialformeln zu benutzen. Bezeichnen

$$d \operatorname{tg} \alpha_0 = \operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha,$$

$$C_w = (n^2 - 1) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{w}, \quad C_\alpha = \frac{t}{r} \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{w} \right)^2, \quad (9a)$$

so ergeben sich der Reihe nach die Verbesserungen

$$d \operatorname{tg} \alpha' = C_w C_{\alpha'} d \operatorname{tg} \alpha_0; \quad d \operatorname{tg} \alpha = C_w' C_{\alpha''} d \operatorname{tg} \alpha''$$

usw. (9b)

und der gesuchte Wert ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha_0 + \sum_0^n d \operatorname{tg} \alpha. \quad (9c)$$

Dieses Verfahren ist dann bequem, wenn die Koeffizienten  $C$  als konstant angesehen werden können, also bei Vorliegen einer guten Näherung. In dem obigen Beispiel ergibt sich:

	$C_w$	$C_\alpha$	$C_w C_\alpha$	$d \operatorname{tg} \alpha$
$\alpha_0$	0,305			- 0,04132
$\alpha'$	0,288	0,028	0,0856	- 35
$\alpha''$				0
				- 0,04167 + $\operatorname{tg} \alpha_0 = \underline{0,57735}$

Aus (6a,c) folgt, daß die Beziehung zwischen dem perspektivem Bild  $P^c$  und dem Einfallsbild  $P^e$  auch als zentrische Punktverwandtschaft angesehen werden kann. Zentrum ist der Nadirpunkt  $N$  und für die Abstände entsprechender Punkte  $P^e, P^c$  von  $N$  folgt wegen  $R^c = h \operatorname{tg} \alpha$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{R}{R^c} &= 1 + \frac{\Delta R}{R^c} = 1 + \frac{t}{h+t} \left( 1 - \frac{1}{w} \right) \\ w &= \sqrt{n^2 - (n^2 - 1) \left( \frac{R^c}{h} \right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (10a)$$

Dieses ist vom Abstand  $R$  und der Tiefe  $t$  abhängig. Ebenso besteht zwischen  $P^e$  und dem Grundriß  $P'$  ( $r, \varphi$ ) eine solche Verwandtschaft. In diesem Fall wird mit  $r - R = \Delta r$ , wegen der Beziehungen (S. Abb. 1)

$$\frac{\Delta r}{t - \Delta t} = \frac{R}{h}, \quad R = h \operatorname{tg} \alpha$$

und (5) das Abstandsverhältnis

$$\frac{r}{R} = 1 + \frac{\Delta r}{R} = 1 + \frac{t}{h w} \quad (10b)$$

## 2. Näherungsformeln für Aufnahmen von unter Wasser liegenden Objekten.

Bei den für hydrographische Zwecke erforderlichen Aufnahmen von Objekten, welche unter der Wasseroberfläche liegen, beträgt die Sicht-

tiefe im allgemeinen nicht mehr als 10 m. Dagegen werden Aufnahmehöhen von mehr als 1000 m gefordert (siehe [1], [2] ), so daß das Verhältnis  $t:h$  in diesem Fall immer klein ist. Da außerdem Senkrechtaufnahmen und normal geöffnete Kammern ( $2\alpha < 60^\circ$ ) verlangt werden, ist wegen  $n = 1,3$

$$\frac{n^2 - 1}{n^2} \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \leq 0,1,$$

kann auch der Wurzelausdruck  $w$  von (8) in eine Reihe entwickelt werden. Für die den Anforderungen der Praxis reichlich genügenden Genauigkeitsforderung von  $\pm 1^c$  im Winkel  $\alpha$ ,  $\pm 5$  cm in den Abständen und der Tiefe, sowie  $10^{-4}$  in den Abstandsverhältnissen können wegen der aus den Annahmen folgenden Beziehungen

$$\frac{t}{h} \leq 0,01 \quad x = \frac{n^2 - 1}{n^2} \cdot \frac{r}{h} \leq 0,13$$

in den Reihenentwicklungen die Glieder 2. Ordnung in  $t:h$  und die Glieder 3. Ordnung in  $x$  vernachlässigt werden. Es gelten somit für den gesamten Abbildungsbereich die genügend genauen Formeln:

$$\left. \begin{aligned} w &= n + \frac{n^2 - 1}{2n} \operatorname{tg}^2 \alpha \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{r}{h} \left( 1 - \frac{1}{h} \frac{t}{h} \right) \end{aligned} \right\} \quad (11a)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta R^c &= \frac{r}{h} t \\ \Delta R &= \frac{n-1}{n} t \frac{r}{h} \left[ 1 - \frac{n+1}{n} \frac{t}{h} + \frac{n+1}{2n^2} \left( \frac{r}{h} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (11b)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{R}{R^c} &= 1 + \frac{n-1}{n} \frac{t}{h} \left[ 1 - \frac{t}{h} + \frac{n+1}{2n^2} \left( \frac{R}{h} \right)^2 \right] \\ \frac{r}{R} &= 1 + \frac{t}{nh} \left[ 1 - \frac{n^2 - 1}{2n^2} \left( \frac{R}{h} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (11c)$$

$$\Delta t = \frac{n-1}{n} t \left[ 1 + \frac{n+1}{2n^2} \left( \frac{r}{h} \right)^2 \right] \quad (11d)$$

Um eine Vorstellung von der Größenordnung der einzelnen der Reihe nach mit  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  bezeichneten Glieder der 2. Gleichung (11b) zu geben, werden diese für  $t = 10$  m,  $h = 1000$  m,  $n = 1,3$  zahlenmäßig berechnet:

$$\Delta R = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$\alpha$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\Delta R$
$0^\circ$	0,00m	0,00m	0,00m	0,00m
10	0,41	- 1	1	41
20	0,85	- 1	7	92
30	1,30	- 2	30	1,60

Hieraus ist zu ersehen, daß die Gesamtverschiebung klein ist und insbesondere der Einfluß von  $\varepsilon_2$  fast nicht bemerkbar wird, hingegen nimmt der von  $\varepsilon_3$  bei größerem  $\alpha$  beachtlich zu.

Nun soll die Gleichung des Einfallbildes einer Geraden  $g$  bestimmt werden. Bezeichnet  $r_0$  den Abstand des Grundrisses  $g'$  (in  $\bar{\pi}$ ) von  $N$ ,  $t_0$  die Tiefe des zugehörigen Fußpunktes  $S$ ,  $\gamma$  den Neigungswinkel von  $g$  (gegen  $\bar{\pi}$ ) und  $\varphi$  den von  $r_0$  an gezählten Polarwinkel, so ist

$$r = \frac{r_0}{\cos \varphi} ; \quad t = t_0 - r_0 \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \varphi \quad (12)$$

die Gleichung der gegebenen Geraden in Zylinderkoordinaten (Abb.4). Durch Einsetzen in (11b) ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta R^c \cos \varphi &= \Delta R_0^c - \frac{r_0^2}{h} \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \varphi \\ \Delta R \cos \varphi &= \Delta R_0 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \gamma \left[ r_0 \frac{\Delta R_0}{t_0} - \frac{n^2-1}{n^2} t_0 \left( \frac{r_0}{h} \right)^2 \right] + \\ &+ \operatorname{tg}^2 \varphi \frac{n^2-1}{n^2} \left( \frac{r_0}{h} \right)^2 \left( \frac{1}{2} \frac{r_0}{n} \frac{r_0}{h} t_0 - r_0 \operatorname{tg}^2 \gamma \right) - \\ &- \operatorname{tg}^3 \varphi \frac{n^2-1}{2 n^3} \left( \frac{r_0}{h} \right)^3 r_0 \operatorname{tg} \gamma . \end{aligned}$$

Darin bedeuten  $\Delta R_0$ ,  $\Delta R_0^c$  die zum Lotfußpunkt  $S$  gehörigen Werte, welche durch Einsetzen von  $t_0$ ,  $r_0$  in (11b) erhalten werden. Nun wird ein rechtwinkeliges Koordinatensystem mit dem Ursprung in  $N$  und  $\bar{NS}$  als  $x$ -Achse eingeführt (Abb.4), so daß

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi \\ y &= R \sin \varphi \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi . \end{aligned} \quad (13)$$

Unter Beachtung der durch (6b) und (12) gegebenen Beziehung folgt hieraus und (11b) als Gleichung des Einfallbildes  $g^E$  :

$$x = k_0 + k_1 \frac{y}{x} + k_2 \left( \frac{y}{x} \right)^2 + k_3 \left( \frac{y}{x} \right)^3 \quad (14a)$$

$$k_0 = R_0 = r_0 - \Delta R_0^c + \Delta R_0 \quad (14b)$$

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= -tg\gamma \left[ r_0 \left( \frac{\Delta R_0}{t_0} + \frac{r_0}{h} \right) - \frac{n^2-1}{n^2} t_0 \left( \frac{r_0}{h} \right)^2 \right] \\ k_2 &= \frac{n^2-1}{n^2} \left( \frac{r_0}{h} \right)^2 \left( \frac{1}{2} \frac{1}{n} \frac{r_0}{h} t_0 - tg^2\gamma \cdot r_0 \right) \\ k_3 &= -\frac{n^2-1}{2n^3} \left( \frac{r_0}{h} \right)^3 r_0 tg\gamma \end{aligned} \right\} \quad (14b)$$

Ist  $\gamma = 0$ , also  $g$  parallel  $\pi$ , so verschwinden die Koeffizienten  $k_1$  und  $k_3$  und es folgt die einfache Gleichung:

$$x = R_0 + \frac{n^2-1}{2n^3} \left( \frac{r_0}{h} \right)^3 t_0 \left( \frac{y}{x} \right)^2 \quad (14c)$$

Diese kann noch vereinfacht werden. Da  $k_2$  im allgemeinen gegenüber  $k_0$  sehr klein ist, kann im Glied 2. Ordnung für  $x = R_0 = r_0$  gesetzt werden und es ergibt sich in erster Näherung die Parabel:

$$x = R_0 + \frac{n^2-1}{2n^3} \cdot \frac{r_0 t_0}{h^3} y^2 \quad (14d)$$

Diese ist symmetrisch zur x-Achse, also zu der zu  $g'$  normalen Lotebene und ihr Scheitel ist um  $\Delta R_0$  vom perspektivem Bild des Lotfußpunktes verschoben. Der Abstand der Parabelpunkte von der parallel zu  $g'$  verlaufenden Scheiteltangente wird durch das quadratische Glied in (14d) gegeben.

Für  $t = 10m$ ,  $h = 1000m$  und  $r = 580m$  ( $\alpha_0 = 30^\circ$ ) folgt

$$\Delta R_0^c = 5,80 m, \quad \Delta R_0 = 1,60 m, \quad k_2 = 0,91 \cdot 10^{-6}$$

und als Gleichung des Einfallbildes:

$$x^m = 575,80 + 0,91 \cdot y^2 \text{ km.}$$

Die Ausbiegung der Parabel ist bei dieser Annahme sehr gering, die Parallelverschiebung des Bildes gegenüber dem perspektivem Bild dagegen beachtlichen. Bei Senkrechtaufnahmen mit  $f = 0,2 m$  würde die Verschiebung am Bildrand etwa 0,3 mm, die Ausbiegung etwa 0,07 mm betragen, also immerhin noch bemerkt werden, wenn bedacht wird, daß die photogrammetrische Meßgenauigkeit etwa 0,02 mm beträgt.

Denkt man sich  $\gamma$  in der Lotebene von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  verändert, so dreht sich das Einfallsbild um den Schnittpunkt von  $g$  mit  $\pi$ . Ist schließlich  $g$  normal  $\pi$ , so wird  $r = r_0$  und das Einfallsbild fällt in den Radiusvektor  $\varphi = 0$ .

### 3. Optische Transformation des Einfallbildes in eine Perspektive.

Für die optische Transformation des Einfallbildes und der

Aufnahme bestehen zwei Möglichkeiten: Die zusätzliche Einschaltung eines optischen Systemes in den Strahlengang bei der Aufnahme oder Auswertung und die Änderung des Auswertemaßstabes entsprechend der nach (10) bestehenden Verwandtschaft.

a. Transformation durch ein optisches Zusatzsystem.

Die Abweichung des Einfallbildes  $P^E$  von der Perspektive  $P^C$  kann durch die als auf der Objektseite liegende Planplatte von der Dicke  $t$  auffassbare Schicht des zweiten Mediums über  $P$  entstanden gedacht werden. Es liegt daher der Gedanke nahe, diese Abweichung durch eine entsprechende, hinter das Objektiv geschaltete Planplatte oder Linse, welche parallel zu  $\pi$  liegt, zu kompensieren (Abb.5).

Bezeichnet  $n_p$  den Brechungsquotienten einer solchen Planplatte von der Dicke  $d$ , so ist die parallel  $\pi$  liegende Komponente der hierdurch erzeugten Verschiebung bekanntlich (siehe Formel (1) und (2))

$$\Delta c_p = d ( \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta_p ) . \quad (15)$$

Die entsprechende Komponente der durch das zweite Medium erzeugten Verschiebung ist, wenn die Projektion von  $\overline{Op}^e$  auf  $h$  gleich  $f'$  gesetzt wird, nach (2)

$$\Delta c = - \frac{f' t}{h + t} ( \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta ) , \quad (16)$$

wobei das negative Vorzeichen ausdrücken soll, daß die Richtung der Verschiebung nunmehr entgegengesetzt verläuft. Aus der Kompensationsforderung

$$\Delta c + \Delta c_p = 0 \quad (17)$$

folgt eine Gleichung für die Dicke der Platte:

$$d = \frac{f' t}{h + t} \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta_p} . \quad (18a)$$

Ist  $n_p = n$ , so wird  $d$  gleich der im Bildmaßstab ausgedrückten Wassertiefe

$$d = \frac{1}{\nu} t \quad ; \quad \nu = \frac{h + t}{f'} , \quad (18b)$$

ein Ergebnis, das ohne weiteres verständlich ist. Für  $n_p \neq n$  ändert sich die erforderliche Plattendicke mit dem Einfallswinkel. Bei Verwendung des in Formel (1d) eingeführten Symbolen  $w$  folgt aus (18a):

$$d = \frac{1}{\nu} t \cdot f(\alpha); \quad f(\alpha) = \frac{\frac{w_p w}{w_p} - \frac{w_p}{w}}{\frac{w_p w}{w_p} - \frac{w_p}{w}} . \quad (18c)$$

Für die gebräuchlichen Glassorten

Crownglas	$n = 1,65$
Flintglas	$n = 1,54$

gilt die nachstehende Tabelle für  $f(\alpha)$  :

	$\alpha = 0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$
$n=1,65$	0,586	0,590	0,601	0,619	0,650
1,54	0,658	0,662	0,671	0,686	0,712

Daraus ist zu ersehen, daß die Änderung der Plattendicke  $d$  mit  $\alpha$  sehr gering ist und für die Praxis in den meisten Fällen  $f_c = 0,60$ ,  $f_p = 0,67$  gesetzt werden darf.

Für kleine Änderungen  $dn = n_p - n$  besteht auch die Differentialformel:

$$f(\alpha) = 1 - \frac{n}{w^2 (w-1)} \frac{dn}{\cos^2 \alpha} \quad (18d)$$

Das Bild eines parallel  $\pi$  liegenden ebenen Objektes ( $t = \text{konst.}$ ) kann also durch eine nach (18) konstruierte Planplatte, welche zwischen Objektiv und Bildebene geschaltet wird, mit genügender Näherung auf eine Perspektive zurückgeführt werden. Bei Objekten mit veränderlicher Tiefe muß theoretisch für jede Tiefe eine eigene Platte benutzt werden; doch führt praktisch die Verwendung von Planplatten zum Ziel, welche für mittlere Tiefen berechnet sind. Hierzu muß jedoch untersucht werden, wie groß die vernachlässigten Tiefenunterschiede sein dürfen, damit nicht unzulässige Fehler im Bild entstehen. Aus

$$\Delta c = \frac{t}{v} (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) = f(t, \alpha)$$

folgt:

$$d t_{\text{zul}} \leq t \cdot \frac{d \Delta c_{\text{zul}}}{\Delta c} \quad (19a)$$

Wird darin näherungsweise

$$\Delta c = \frac{1}{v} \Delta R = \frac{1}{v} \frac{n-1}{n} t \operatorname{tg} \alpha$$

gesetzt (S. (11b)), so ergibt sich:

$$d t_{\text{zul}} \leq \frac{n}{n-1} \operatorname{cotg} \alpha \cdot d \Delta c_{\text{zul}} \quad (19b)$$

Für die Meßgenauigkeit  $d \Delta c_{\text{zul}} = 0,02 \text{ mm}$ ,  $n = 1,3$  folgt hieraus für die in Meter ausgedrückte Zonentiefe  $dz = 2 dt$ , innerhalb welcher auf eine mittlere Tiefe korrigiert werden darf:

$$(dz_{\text{zul}})^m = \frac{v}{1000} dz_0 \quad (19c)$$

$$dz_0 = 0,173 \cdot \operatorname{cotg} \alpha$$

Zur Veranschaulichung der Größenverhältnisse werden die Tiefenzonen für verschiedene Maßstäbe nachstehend zusammengestellt.

	$\alpha = 0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$
1 : 1000	$\infty$	0,98m	0,47m	0,30m
5000	"	4,9	2,4	1,5
10000	"	9,8	4,8	3,0
15000	"	15,0	7,1	4,5
20000	"	20,0	9,5	6,0

Es zeigt sich, daß  $dz$  mit dem Einfallswinkel rasch abnimmt und für große Maßstäbe bald unmaßgeblich klein wird. Daraus folgt, daß die optische Kompensation der durch das zweite Medium erzeugten Verschiebung mit einer einzigen Planplatte bei großen Aufnahmemaßstäben nur für etwa parallel  $\pi$  liegende Objekte mit geringen Tiefenunterschieden möglich ist.

Die Korrektur kann aber auch nach erfolgter Aufnahme, bei der Wiederherstellung des Aufnahmebündels in einem Projektor erfolgen. Hierzu werden eine oder mehrere, nach (18) zu berechnenden Planplatten nun vor das Objektiv geschaltet, wobei es gleichgültig ist, an welcher Stelle des Strahlenganges dies geschieht (Abb.6). Die Zahl  $\nu$  in (18) ist nunmehr die Maßstabszahl des auszuwertenden Bildes, oder bei Verwendung von Doppelprojektoren, die des erzeugten Modelles. Die zulässigen Tiefenzonen können wieder nach (19) berechnet werden. Für die praktische Anwendung, wird man bestimmte Aufnahmehöhen und Auswertemaßstäbe festlegen und für jeden einen Plattensatz von 0,5 zu 0,5m Tiefe anfertigen. Da der Abstand, in welchem die Platten angebracht werden, ohne Einfluss ist, läßt sich durch Kombination von 2 t solcher Platten eine Tiefe von t Metern korrigieren. Die Ausmessung kann dann zonenweise erfolgen.

Für die Montage der Planplatten ist es noch von Interesse zu wissen, mit welcher Genauigkeit die Planfläche parallel zu  $\pi$  gestellt werden muß, um unzulässige Fehler zu vermeiden. Aus (18c) folgt

$$d\Delta c = d \left( \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{d\beta}{\cos^2 \beta} \right) ;$$

wegen der aus dem Brechungsgesetz sich ergebenden Beziehung

$$n \cos \beta = w \cos \alpha ; \quad \cos \alpha \, d\alpha = n \cos \beta \, d\beta$$

folgt hieraus

$$d\Delta c = \frac{d}{\cos^2 \alpha} \left( 1 - \frac{n^2}{w^2} \right) d\alpha . \quad (20a)$$

Für  $\alpha \leq 30$  wird  $w$  entwickelt und es folgt für den noch zulässigen Betrag der Plattendrehung die Beziehung:

$$d\alpha_{\text{zul}} = \rho \nu \frac{n}{n-1} \frac{1}{t} \left( \cos^2 \alpha - \frac{3}{2} \frac{n+1}{n^2} \sin^2 \alpha \right) d\Delta_{\text{zul}} . \quad (20b)$$

Bezeichnet  $d\alpha_0$  den Betrag für  $\nu = 1000$ ,  $t = 10$  m, so kann dieser für verschiedene  $n$  und  $\alpha$  tabelliert werden und es ist:

$$(\alpha_{\text{zul}})^0 = \frac{\nu}{1000 (t)^m} \cdot \alpha_0 \quad (20c)$$

$\alpha =$	$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$
$n = 1,3$	4,97	4,06	2,88	1,71
1,65	2,91	2,70	2,07	1,27
1,54	3,25	3,00	2,27	1,13

Z.B. sind für  $\nu = 25000$  und  $t = 5$  m die angegebenen Beträge zu verfünffachen.

Als Ergebnis folgt: Bei annähernd horizontal liegenden Objekten mit geringen Tiefenunterschieden ist die optische Kompensation mit den nach (18) zu konstruierenden Planplatten schon während der Aufnahme praktisch möglich. In allen übrigen Fällen kann sie bei der Auswertung durchgeführt werden, wenn die Tiefen genähert bekannt sind. Da hierbei der Strahlengang bei der Aufnahme wiederhergestellt wird, ergeben sich auch die richtigen Tiefen, so daß sich das Verfahren auch für die räumliche Auswertung eignet. Die Auswertung erfolgt dann zonenweise unter Beachtung der in (19) angegebenen zulässigen Zonentiefen.

#### b. Transformation durch Maßstabänderung.

Bezeichnet  $l : \nu_E$  den Auswertemaßstab des Einfallbildes  $P^E$ , so besitzt das perspektive Bild  $P^C$  die Maßstabszahl

$$\nu_C = \frac{R^C}{R} \cdot \nu_E = \nu_E + \Delta \nu_E \quad , \quad (21)$$

wobei  $R^C : R$  nach (10) oder (11c) zu berechnen ist. Der Maßstabsänderung  $\Delta \nu_E$  entspricht eine Änderung der Auswertehöhe im Betrage von

$$\Delta h_E = f \cdot \Delta \nu_E \quad .$$

Wird in jedem Punkt  $\nu_E$  berechnet, so ergibt die in diesem Maßstab durchgeführte Auswertung zwar die richtige Lage von  $P^C$ , aber nicht die richtige Tiefe. Diese wird wohl verbessert, ist aber noch um

$$t' = t - \Delta h_E$$

von der wahren Tiefe verschieden (siehe Abb.7).

Das Verfahren wird daher nur dann Anwendung finden, wenn lediglich Grundrißlagen zu bestimmen sind, also bei Entzerrungen. In diesem Fall wird aber zweckmäßig die Korrektur gleich so erfolgen, daß sich aus dem Einfallbild unmittelbar der Grundriß  $P'$  ergibt, ohne erst die Perspektive  $P^C$  bestimmen zu müssen. Der Tiefenfehler wird dabei offensichtlich gleich der Tiefe selbst.

Nach (10b) ist die Änderung der Maßstabszahl beim Übergang von  $P^E$  auf  $P'$

$$\Delta \nu' = \frac{\Delta r}{R} = \frac{t}{h w} \quad (22a)$$

oder nach Entwicklung des Wurzelansdruckes:

$$\Delta \nu' = \frac{t}{n h} \left[ 1 - \frac{n^2 - 1}{2 n^2} \cdot \left( \frac{R}{h} \right)^2 \right]. \quad (22b)$$

Der erhaltene Ausdruck (22a) ist gleich der aus der Ein-Medien-Photogrammetrie bekannten Formel für die durch einen Höhenunterschied  $\Delta h = -t$  gegenüber der Auswerteebene  $\pi$  erzeugte Maßstabsänderung, wenn an Stelle von  $h$  der Betrag  $(hw)$  gesetzt wird. Es gelten daher auch die in der Ein-Medien-Photogrammetrie bestehenden Formeln für die zonenweise Entzerrung hügeligen Geländes, wenn  $\pi$  als Entzerrungsebene gewählt und an Stelle von  $h$  die fingierte Höhe  $(hw) = h'$  eingeführt wird. Bei normal geöffneten Kammern kann noch näherungsweise  $w \approx n$ , also  $h' = (hn)$  gesetzt werden.

Als Ergebnis folgt: Durch Änderung des Maßstabes kann das Einfallsbild unmittelbar auf den Grundriß zurückgeführt werden. Es gelten dabei die für die Entzerrung hügeligen Geländes in der Ein-Medien-Photogrammetrie abgeleiteten Formeln, wenn die fingierte Höhe  $(wh) = h'$  eingeführt wird.

## II. ORIENTIERUNG VON EINZELAUFNAHMEN.

(Räumlicher Rückwärtsschnitt).

### 1. Allgemeine Lösung.

Die Orientierung einer Aufnahme hat die Ermittlung der Aufnahmedaten (Ort und Lage der Aufnahmekammer im Augenblick der Aufnahme) zum Ziel. Sie kann aus dem Bildinhalt erfolgen, wenn neben der inneren Orientierung der Kammer (Bildhauptpunkt und Bildweite) noch die Raumlage einer Anzahl von Paßpunkten bekannt ist.

Um festzustellen, wie groß die Anzahl sein muß, wird der Winkel  $\varepsilon_{12}$  betrachtet, den die nach 2 Paßpunkten  $P_1$   $P_2$  zielenden Einfallstrahlen bilden (Abb.8). Dieser Winkel kann aus dem Bildinhalt (bei bekannter inneren Orientierung) bestimmt und auch als Funktion der Koordinaten der Paßpunkte und der Orientierungsunbekannten (Koordinaten des Aufnahmezentrums oder Lage des Nadirpunktes im Bild und Höhe) dargestellt werden. Durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke folgt eine Bedingungs-gleichung für die Unbekannten.

Der Betrachtung wird ein Koordinatensystem zu Grunde gelegt, dessen Ursprung in  $N$  liegt und dessen  $X$ -, $Y$ -Achsen in  $\pi$  liegen. Aus den Koordinaten  $(\xi \eta h)$  des gesuchten Aufnahmeortes  $O$  und der von  $P_i$   $(x, y t)$  läßt sich nach I, 1, (8) der Einfallswinkel  $\alpha$  als Funktion dieser Werte darstellen:

$$\alpha = f(\xi \eta h, X_i Y_i t_i) \quad (i=1,2)$$

Auch die Projektion  $\varepsilon'_{1,2}$  von  $\varepsilon_{1,2}$  auf die brechende Ebene kann durch diese Werte ausgedrückt werden.

$$\mathcal{E}'_{12} = \varphi_2 - \varphi_1 \quad \text{tg } \varphi_i = \frac{y_i - \eta}{x_i - \xi}$$

Aus  $\alpha$  und  $\mathcal{E}'_{1,2}$  folgt wiederum  $\mathcal{E}_{1,2}$  und zwar gilt nach Abb. 8 die Beziehung:

$$\cos \mathcal{E}_{12} = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \mathcal{E}'_{12},$$

oder nach dem vorherigen:

$$\cos \mathcal{E}_{12} = F(\xi \eta h, x_1 x_2, y_1 y_2, t_1 t_2). \quad (1a)$$

Andererseits läßt sich  $\mathcal{E}_{1,2}$  aus den Bildkoordinaten  $x_1 y_1$  und der Bildweite  $f$  berechnen. Bezeichnet  $\mathcal{E}''_{1,2}$  die orthogonale Projektion von  $\mathcal{E}_{1,2}$  auf die Bildebene, so ist (Abb. 9)

$$\mathcal{E}''_{12} = \sigma_2 - \sigma_1 \quad \text{tg } \sigma_i = \frac{y_i}{x_i}$$

$$s_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \quad \text{tg } \gamma_i = \frac{s_i}{f}$$

$$\cos \mathcal{E}_{12} = \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 + \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \cos \mathcal{E}''_{12} \quad (1b)$$

Aus (1a) (1b) folgt eine Bedingungsgleichung für die Koordinaten  $(\xi \eta h)$  des Aufnahmeortes  $O$ .

$$\Phi_{12}(\xi \eta h, x_1 x_2, y_1 y_2, t_1 t_2, x_1 y_2, y_1 y_2, f) = 0 \quad (1c)$$

Da zur Bestimmung von  $\xi \eta h$  drei Gleichungen (1c) erforderlich sind, z.B. noch  $\Phi_{23} = 0$  und  $\Phi_{31} = 0$ , so gilt wie in der Ein-Medien-Photogrammetrie der Satz:

Die Orientierung einer einzelnen Aufnahme kann in der Zwei-Medien Photogrammetrie theoretisch durchgeführt werden, wenn drei Paßpunkte und die innere Orientierung der Aufnahme bekannt sind. Die so bestimmte Aufgabe hat jedoch mehrere Lösungen. Eine eindeutige Lösung ist erst bei mehr als 3 Paßpunkten oder bei Kenntnis einer Näherung für die Lösung möglich. Aber die zahlenmäßige Berechnung läßt sich erst bei Vorliegen einer Näherung durchführen, da schon die Ermittlung der Einfallswinkel  $\alpha$  auf praktisch nicht zu bewältigende Gleichung 4. Grades führt (s. I (1)).

## 2. Lösung mit Näherungswerten.

Mit Hilfe von Näherungswerten lassen sich aus den Differentialgleichungen der Aufgabe lineare Gleichungssysteme für die Verbesserungen der Unbekannten angeben. Die Herleitung der Systeme könnte aus den Gleichungen (1) erfolgen; es erweist sich jedoch zweckmäßiger der Ableitung eine andere Betrachtungsweise zu Grunde zu legen. Denkt man sich nämlich die

Paßpunkte P durch die Brechungspunkte Q ersetzt (s.I 1), so wird die Aufgabe auf den Rückwärtsschnitt der Ein-Medien-Photogrammetrie zurückgeführt. Allerdings sind die Tiefen T von Q

$$P (X Y t), \quad Q (X Y T = \frac{t}{w})$$

wegen  $w^2 = n^2 + (n^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \alpha$  Funktionen des gesuchten Ortes, doch folgen aus den bekannten Näherungen für diesen auch Näherungen  $T_0$ , also genäherte Brechungspunkte  $Q_0$ . Die aus den Näherungen  $O_0 Q_{10} Q_{20} Q_{30}$  gebildete Pyramide wird im allgemeinen nicht mit der aus den Bildkoordinaten  $x, y$  und  $f$  sich ergebenden (wahren) Pyramide übereinstimmen, so daß sich Unterschiede

$$d\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12} - \varepsilon_{120}$$

in den Kantenwinkeln ergeben. Die Näherungswerte  $\xi_0, \eta_0, h_0$  oder  $x_n, y_n, h_0$  werden nun so verbessert, daß diese Unterschiede verschwinden.

Im Folgenden werden die Differentialformeln für die Verbesserung des Aufnahmewertes und des Bildhauptpunktes angegeben.

a) Differentialformeln für  $d\xi, d\eta, dh$ .

Zur Bestimmung der Formeln wird erst die Änderung  $dT$  der Tiefe T von Q mit  $d\xi, d\eta, dh$  und hierauf der Zusammenhang dieser Größen mit  $d\varepsilon$  untersucht.

a<sub>1</sub>) Änderung  $dT$

Wie aus Abb. 1 ersichtlich, besteht die Beziehung

$$(h + T) \operatorname{tg} \alpha = r, \quad (2a)$$

aus welcher durch Differenzieren

$$(dh + dT) \operatorname{tg} \alpha + (h + T) d \operatorname{tg} \alpha - dr = 0 \quad (2b)$$

folgt. Aus den Gleichungen

$$T = \frac{t}{w}, \quad r^2 = (X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2$$

lassen sich die in (2b) auftretenden Differentiale  $d \operatorname{tg} \alpha, dr$  als Funktion von  $d\xi, d\eta, dh$  wie folgt darstellen:

$$d \operatorname{tg} \alpha = - \frac{w^2}{T(n^2 - 1) \operatorname{tg} \alpha} dT \cdot dr = - \frac{X - \xi}{r} d\xi - \frac{Y - \eta}{r} d\eta \quad (2c)$$

Durch Einsetzen dieser Gleichungen in (2b) folgt der gesuchte Zusammenhang zwischen Tiefenänderung von Q und Änderung des Aufnahmeortes.

$$dT = A' d\xi + B' d\eta + C' dh \quad (3a)$$

$$A' = \mu \frac{X - \xi}{r}$$

$$B' = \mu \frac{Y - \eta}{r} \quad \mu = \frac{T(n^2 - 1) \operatorname{tg} \alpha}{w^2 h + n^2 \cdot T} \quad (3b)$$

$$C' = \mu \operatorname{tg} \alpha$$

a<sub>2</sub>) Änderung dE .

Bezeichnet  $q_1$  die Strecke  $\overline{OQ_1}$ , also  $\varepsilon_{12}$  den von  $q_1$   $q_2$  eingeschlossenen Winkel und  $e_{12}$  die  $\varepsilon_{12}$  im Dreieck  $Q_1$   $Q_2$   $O$  gegenüberliegende Seite, so besteht die Gleichung (Abb. 8)

$$e_{12}^2 = q_1^2 + q_2^2 - 2 q_1 q_2 \cos \varepsilon_{12} \quad (4a)$$

und aus dieser folgend die Differentialgleichung:

$$e_{12} de_{12} - (q_1 q_2 \cos \varepsilon_{12}) dq_1 - (q_2 q_1 \cos \varepsilon_{12}) dq_2 - q_1 q_2 \sin \varepsilon_{12} d\varepsilon_{12} = 0 \quad (4b)$$

Mittels der Beziehungen

$$q_i^2 = (X_i - \xi)^2 + (Y_i - \eta)^2 + (h + T_i)^2 \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

$$e_{12}^2 = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (T_1 - T_2)^2 \quad (5a)$$

lassen sich die Differentiale  $de$ ,  $dq$  als lineare Funktionen von  $d\xi$ ,  $d\eta$ ,  $dh$  darstellen:

$$q_i dq_i = -(X_i - \xi) d\xi - (Y_i - \eta) d\eta + (h + T_i) (dh + dT_i) \quad (5b)$$

$$e_{12} de_{12} = (T_1 - T_2) (dT_1 - dT_2) .$$

Diese Gleichungen und (3) in (4b) eingesetzt ergeben die gesuchte Beziehung:

$$A_{12} d\xi + B_{12} d\eta + C_{12} dh + F_{12} d\varepsilon_{12} = 0 , \quad (6)$$

deren Koeffizienten aus dem folgendem Gleichungssystem zu berechnen sind:

$$\begin{aligned}
 \Delta q_{12} &= q_1 - q_2 \cos \varepsilon_{12} \\
 \Delta q_{21} &= q_2 - q_1 \cos \varepsilon_{12} & \Delta x_i &= x_i - \xi \\
 \Delta T_{12} &= T_1 - T_2 & \Delta y_i &= y_i - \eta \\
 \Delta T_{21} &= T_2 - T_1 & \Delta h_i &= h + T_i
 \end{aligned} \tag{7a}$$

$$\begin{aligned}
 A''_{12} &= -\Delta q_{12} \frac{\Delta x_1}{q_1} - \Delta q_{21} \frac{\Delta x_2}{q_2} \\
 B''_{12} &= -\Delta q_{12} \frac{\Delta y_1}{q_1} - \Delta q_{21} \frac{\Delta y_2}{q_2} \\
 C''_{12} &= \Delta q_{12} \frac{\Delta h_1}{q_1} + \Delta q_{21} \frac{\Delta h_2}{q_2}
 \end{aligned} \tag{7b}$$

$$\begin{aligned}
 D_{12} &= \Delta T_{21} + \Delta q_{12} \frac{\Delta h_1}{q_1} \\
 E_{12} &= \Delta T_{12} + \Delta q_{21} \frac{\Delta h_2}{q_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{12} &= A''_{12} + D_{12} A_1' + E_{12} A_2' \\
 B_{12} &= B''_{12} + D_{12} B_1' + E_{12} B_2' \\
 C_{12} &= C''_{12} + D_{12} C_1' + E_{12} C_2' \\
 F_{12} &= q_1 q_2 \sin \varepsilon_{12}
 \end{aligned} \tag{7c}$$

Für die praktische Rechnung werden mit  $\xi_0$ ,  $\eta_0$ ,  $h_0$  und den Koordinaten  $X, Y, t$  der Paßpunkte  $P_1, P_2$  erst nach I, 1, (8), Näherungen  $\alpha_0$ ,  $w_0$  und  $T_0 = \frac{t}{w_0}$  berechnet. Diese in Gleichung (5b) eingesetzt, ergeben Näherungen für  $q$ ,  $e_{12}$  mit welchen in (7) einzugehen ist.

Zur Ermittlung des Absolutgliedes  $F d\varepsilon = W$  wird entweder nach (4a)

$$\cos \varepsilon_{120} = \frac{1}{2} \left( \frac{q_{10}}{q_{20}} + \frac{q_{20}}{q_{10}} \right) - \frac{e^2_{120}}{2 q_{10} q_{20}} \tag{8a}$$

und nach (1b)  $\cos \varepsilon_{12}$  berechnet, hierauf die Differenz

$$d \cos \varepsilon_{12} = \cos \varepsilon_{12} - \cos \varepsilon_{120} \tag{8b}$$

und aus dieser

$$W_{12} = F_{12} d\varepsilon_{12} = -q_{10} q_{20} d \cos \varepsilon_{12} \tag{8c}$$

gebildet, oder dieser Wert aus der Differenz der sich aus den Koordinaten  $X, Y, T_0$  von  $Q_{10}, Q_{20}$  und aus dem Dreieck ( $q_{10}, q_{20}, \varepsilon_{12}$ ) ergebenden Seiten  $e_r$  abgeleitet. Nach (4a) ist

$$de_{12}^2 = 2 q_1 q_2 \sin \varepsilon_{12} d\varepsilon_{12} = 2 F_{12} d\varepsilon_{12},$$

so daß die nachstehende Beziehung besteht:

$$W_{12} = \frac{1}{2} de_{12}^2 \quad (9)$$

$$de_{12}^2 = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (T_{10} - T_{20})^2 - (q_{10}^2 + q_{20}^2 - 2q_{10}q_{20} \cos \varepsilon_{12})$$

Zu demselben Ergebnis (6), (7) führt auch die folgende Betrachtung: Gleichung (4a) stellt eine Bedingung für  $\xi = \xi_0 + d\xi$ ,  $\eta = \eta_0 + d\eta$ ,  $h = h_0 + dh$  dar:

$$F(\xi, \eta, h) = e_{12}^2 - q_1^2 - q_2^2 + 2 q_1 q_2 \cos \varepsilon_{12} = 0 \quad (10)$$

Die Funktion  $F$ , welche den Ort aller Punkte  $O$  definiert, aus welchen die beiden Punkte  $P_1, P_2$  unter dem gleichen Winkel  $\varepsilon_{12}$  gesehen werden, wird zwar durch die Näherung  $\xi_0, \eta_0, h_0$  nicht genau erfüllt sein; sie kann aber in der Umgebung der hiedurch bestimmten Stelle wie folgt entwickelt werden:

$$\left. \begin{aligned} F(\xi, \eta, h) &= F(\xi_0, \eta_0, h_0) + dF(\xi_0, \eta_0, h_0) = 0 \\ dF &= \frac{\partial F_0}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial F_0}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial F_0}{\partial h} dh \end{aligned} \right\} (11)$$

Ein Vergleich der mit den linearen Gliedern abgebrochenen Entwicklung (11) mit den Formeln (4), (6), (7) zeigt das Bestehen der Beziehungen (12):

$$\begin{aligned} F(\xi_0, \eta_0, h_0) &= de_{12}^2 = 2 W_{12} \\ \frac{\partial F_0}{\partial \xi} &= 2 A_{12} \quad \frac{\partial F_0}{\partial \eta} = 2 B_{12} \quad \frac{\partial F_0}{\partial h} = 2 C_{12}, \end{aligned} \quad (12)$$

d.h. Gleichung (11a) ist identisch der mit 2 multiplizierten Gleichung (6).

### a<sub>3</sub>) Bestimmung von $d\xi, d\eta, dh$

Irgend 2 Paßpunkte  $P_1, P_2$  geben Anlaß zu einer Gleichung (6). Zur Bestimmung der 3 Unbekannten  $d\xi, d\eta, dh$  werden 3 solche Gleichungen benötigt, welche aus 3 Paßpunkten  $P_1, P_2, P_3$  hergeleitet werden können.

$$A_{ik} d\xi + B_{ik} d\eta + C_{ik} dh + W_{ik} = 0$$

$$ik = 12, 23, 31 \quad (13)$$

Die Koeffizienten A, B, C, W lassen sich nach (7) bestimmen, wenn darin für die Indizes 1 und 2 die Indizes i, k eingeführt werden. Die verbesserten Koordinaten des Aufnahmeortes sind

$$\xi = \xi_0 + d\xi, \quad \eta = \eta_0 + d\eta, \quad h = h_0 + dh.$$

Liegen mehr als 3 Paßpunkte vor, so ergibt (12) ein überbestimmtes Gleichungssystem, dessen Ausgleichung nach der Forderung erfolgen müßte, die Quadratsumme der verbleibenden Bildkoordinatenfehler möglichst klein zu erhalten. Für die Praxis wird indessen die Ausgleichung nach der eine wesentlich einfachere Rechnung ermöglichenden Forderung

$$\left[ \frac{v}{w} \right] = \text{Min}$$

ein genügend genaues Ergebnis liefern.

Bemerkt sei noch, daß n Paßpunkte nur zu n „Fehlergleichungen“ (6) Anlaß geben, da von den  $\left(\frac{n}{2}\right)$  möglichen Winkeln  $\varepsilon$  lediglich n voneinander unabhängig sind.

#### a<sub>4</sub>) Bestimmung der Näherungswerte.

Bei Luftaufnahmen wird zwar die Aufnahmehöhe h in der Regel bekannt sein, nicht aber die Lage des Aufnahmeortes. Dafür kann aus Hilfseinrichtungen (mitphotographierte künstliche Horizonte, Libellen) eine Näherungslage für den Bildnadir angegeben werden, aus welchen sich  $\xi_0, \eta_0$  in einfacher Weise rechnerisch ermitteln lassen.

Bezeichnen  $x_n, y_n$  die Bildkoordinaten des Nadirpunktes n,  $\sigma_n$  den Richtungswinkel seiner Polarstrahlen (h n) und die Nadirdistanz, so bestehen die Beziehungen (Abb. 9) :

$$\left. \begin{aligned} \text{tg } \sigma_n &= \frac{x_n}{y_n} & \text{tg } \nu &= \frac{1}{f} \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \\ f &= \text{Bildweite} \end{aligned} \right\} (14)$$

Aus  $\sigma_n, \nu$  läßt sich der Einfallswinkel  $\alpha$  des nach dem Bildpunkt  $p^e$  (x y) ziehenden Strahles ermitteln. Der Richtungswinkel  $\sigma$  von (h  $p^e$ ) und der Winkel  $\gamma$  zwischen Lot und Bildachse sind durch die Gleichungen

$$\text{tg } \sigma = \frac{x}{y}, \quad \text{tg } \gamma = \frac{1}{f} \sqrt{x^2 + y^2} \quad (15a)$$

bestimmt und, wie aus Abb. 10 zu ersehen, gilt die Beziehung:

$$\cos \alpha = \cos \nu \cos \gamma + \sin \nu \sin \gamma \cos (\sigma - \sigma_n). \quad (15b)$$

Aus  $\alpha$  folgt  $w^2 = n^2 + (n^2 - 1) \text{tg}^2 \alpha$  und die Tiefe

$$T = \frac{t}{w} \quad (15c)$$

des Brechungspunktes Q von P, sowie die orthogonale Projektion  $r = \overline{O'P'}$  von  $\overline{OP}$  auf die brechende Ebene  $\pi$  :

$$r = (h + T) \operatorname{tg} \alpha . \quad (15d)$$

Die Projektion  $O'$  auf  $\pi$  kann nun durch Bogenschnitt aus  $P_i'$  ( $X_i, Y_i$ ) und  $r_i$  festgelegt werden. Das Vorhandensein von 3 Punkten P macht die an sich zweideutige Aufgabe eindeutig und gestattet außerdem eine einfachere Rechnung und Kontrolle.

Erfolgt die Bestimmung von  $O'$  graphisch, so ergeben sich 3 Kreisbogen, welche zufolge der benutzten Näherungen nicht durch einen Punkt gehen, sondern ein Fehlerdreieck bilden werden.

Für die Rechnung werden zweckmäßig aus den 3 Gleichungen

$$(X_i - \xi)^2 + (Y_i - \eta)^2 = r_i^2 \quad (i = 1, 2, 3)$$

die beiden linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} (X_1 - X_2)\xi + (Y_1 - Y_2)\eta &= K_{12} \\ (X_1 - X_3)\xi + (Y_1 - Y_3)\eta &= K_{13} \end{aligned} \quad (16)$$

$$K_{1i} = \frac{1}{2} \left[ (X_{21}^2 - X_{i1}^2) + (Y_{21}^2 - Y_{i1}^2) - (r_{21}^2 - r_{i1}^2) \right]$$

abgeleitet. Wird in das System (14), (15), (16) mit den Näherungen  $x_{no}, y_{no}$  eingegangen, so folgen hieraus die Näherungen  $\xi_0, \eta_0$  für den Aufnahmeort.

Unter Umständen ist es aber vorteilhaft, die gegebenen Näherungswerte für Nadirpunkte und Höhe unmittelbar, ohne erst den Aufnahmeort zu bestimmen, zu verbessern. Die Formeln hierfür werden im folgenden Abschnitt abgeleitet.

#### b) Differentialformeln für $d\nu$ , $d\sigma_n$ , $dh$ .

Da sich Näherungswerte für Nadirpunkt und Aufnahmehöhe technisch leicht beschaffen lassen, kommt den direkt zur Verbesserung dieser Werte dienenden Formeln auch praktische Bedeutung zu. Zur Herleitung solcher Formeln, in welchen aus rechnerischen Gründen  $\nu$  und  $\sigma_n$  als Koordinaten des Nadirpunktes eingeführt werden, wird Gleichung (10) benutzt, aus welcher nunmehr eine Funktion von  $\nu$ ,  $\sigma_n$ ,  $h$  folgt:

$$\begin{aligned} F(\nu, \sigma_n, h) &\equiv (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (T_1 - T_2)^2 - \\ &- (q_1^2 + p_2^2 - 2 q_1 q_2 \cos \varepsilon_{12}) = 0 . \end{aligned}$$

Die Entwicklung an der Näherungsstelle  $(\nu_0, \sigma_{no}, h_0)$  ergibt

$$F(\nu_0, \sigma_{no}, h_0) + dF(\nu_0, \sigma_{no}, h_0) = 0 , \quad (17a)$$

worin für

$$dF = 2 (e_{12} de_{12} - \Delta q_{12} dq_1 - \Delta q_{21} dq_2) \quad (17b)$$

zu setzen ist. Um  $de$ ,  $dq$  als Funktion von  $d\nu$ ,  $d\sigma_n$ ,  $dh$  darstellen zu können, wird erst die durch  $d\nu$ ,  $d\sigma_n$  bedingte Änderung des Einfallswinkel  $\alpha$  untersucht.

b<sub>1</sub>) Änderung  $d \cos \alpha$ ,  $d g$ ,  $de$ .

Die Differentiation der Gleichung (15b) ergibt die Beziehung zwischen  $d\nu$ ,  $d\sigma_n$  und  $d \cos \alpha$ .

$$d \cos \alpha = \bar{A}' d\nu + \bar{B}' d\sigma_n$$

$$\bar{A}' = -\sin \nu \cos \gamma + \cos \nu \sin \gamma \cos (\sigma - \sigma_n) \quad (18)$$

$$\bar{B}' = \sin \nu \sin \gamma \sin (\sigma - \sigma_n).$$

Aus der Gleichung

$$q = (h + T) \frac{1}{\cos \alpha} = \left(h + \frac{t}{w}\right) \frac{1}{\cos \alpha}$$

folgen wegen der nach I, 1, (8) bestehenden Beziehung

$$dw = -\frac{n^2 - 1}{w \cos^3 \alpha} \cdot d \cos \alpha :$$

$$dq = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot dh - \frac{d \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} \left(h + \frac{t}{w}\right)$$

und nach Einsetzen von (18) das System:

$$\left. \begin{aligned} dq &= \bar{A}'' \cdot d\nu + \bar{B}'' \cdot d\sigma_n + \bar{C}'' \cdot dh, \\ \bar{A}'' &= \bar{A}' \rho, \\ \bar{B}'' &= \bar{B}' \rho, \\ \bar{C}'' &= \frac{1}{\cos \alpha}, \end{aligned} \right\} \quad \rho = -\frac{1}{\cos^2 \alpha} \left(h + \frac{t}{w}\right). \quad (19)$$

Wird in die 2. der Gleichungen (5b) die aus (15c) folgende Differentialgleichung

$$dT = t \frac{n^2 - 1}{w^3 \cos^3 \alpha} d \cos \alpha$$

eingeführt, so ergibt sich für die Änderung  $de_{1,2}$ :

$$\begin{aligned}
 e_{12} de_{12} &= \bar{A}_{12}''' d\nu + \bar{B}_{12}''' d\sigma_n, \\
 \bar{A}_{12} &= (\tau_1 - \tau_2) (\bar{A}'_1 \tau_1 - \bar{A}'_2 \tau_2), \\
 \bar{B}_{12} &= (\tau_1 - \tau_2) (\bar{B}'_1 \tau_1 - \bar{B}'_2 \tau_2),
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\tau = t \frac{n^2 - 1}{(w \cos \alpha)^3}.$$

b<sub>2</sub>) Bestimmung von  $d\nu$ ,  $d\sigma_n$ ,  $dh$ .

Aus (17), (19), (20) folgt eine lineare Gleichung für  $d\nu$ ,  $d\sigma_n$ ,  $dh$ .

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{A}_{12} d\nu + \bar{B}_{12} d\sigma_n + \bar{C}_{12} dh + W_{12} &= 0, \\
 \bar{A}_{12} &= \bar{A}_{12}''' - \bar{A}''_1 \Delta q_{12} - \bar{A}''_2 \Delta q_{21}, \\
 \bar{B}_{12} &= \bar{B}_{12}''' - \bar{B}''_1 \Delta q_{12} - \bar{B}''_2 \Delta q_{21}, \\
 \bar{C}_{12} &= \bar{C}''_1 \Delta q_{12} - \bar{C}''_2 \Delta q_{21}, \\
 W_{12} &= \frac{1}{2} de_{12}^2 = \frac{1}{2} F(\nu_0, \sigma_{no}, h_0)
 \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

Darin sind alle Koeffizienten mit den aus  $\nu_0, \sigma_{no}, h_0$  folgenden Näherungen für  $\alpha, q$  und  $e$  zu berechnen und für  $\Delta q$  die Ausdrücke (7a) zu verwenden. (Reihenfolge der Formeln: (14), (15a), (18), (19), (20), (21).

Die Verbesserungen  $d\nu, d\sigma_n, dh$  können aus 3 Gleichungen (21), also aus 3 Paßpunkten bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_{ik} d\nu + \bar{B}_{ik} d\sigma_n + \bar{C}_{ik} dh + W_{ik} &= 0 \\
 ik &= 12, 23, 31.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Die Koeffizienten sind hierin nach dem obigen Formelsystem zu bilden, wobei die Indizes  $i, k$  an Stelle von  $1, 2$  zu setzen sind.

Sind mehr als 3 Paßpunkte gegeben, so wird wie in a) das sich ergebende überbestimmte System (22) zweckmäßig nach der Forderung

$$[v^2_w] = \text{Min}$$

ausgeglichen.

c) Senkrechtaufnahmen.

Wird als Senkrechtaufnahme eine Aufnahme bezeichnet, deren Achse orthogonal zur brechenden Ebene  $\pi$  liegt, so fällt bei solchen Aufnahmen der Nadirpunkt mit dem Bildhauptpunkt zusammen. Es wird daher  $\nu = 0$ , sowie  $\sigma_n$  unbestimmt und das angegebene Gleichungssystem versagt ( $A$  wird unbestimmt und  $B = 0$ ). Bei genäherten Senkrechtaufnahmen muß also das in a) abgeleitete System benutzt werden; wobei wegen  $\nu_0 = 0$

sich noch Vereinfachungen ergeben. So folgt aus (15a,b,c)

$$\alpha_0 = \gamma = \text{arc tg} \left( \frac{1}{f} \sqrt{x^2 + y^2} \right),$$

so daß  $w_0, T_0, r_0$  und schließlich  $\xi_0, \eta_0$  nach (15d) und (16) einfach berechnet werden können.

### 3. Gefährlicher Ort.

Wie in der Ein-Medien-Photogrammetrie besitzt auch der Rückwärtsschnitt der Zwei-Medien-Photogrammetrie einen gefährlichen Ort 2. Art.

Ein solcher liegt vor, wenn im linearen System (12) oder (22a) die Gleichungsdeterminante verschwindet, also die Bestimmung der Verbesserungen nicht möglich ist. Wegen der nach (11) bestehenden Beziehungen besagt diese Bedingung, daß die Normalen auf die 3 durch  $F_{ik} = 0$  ( $ik = 12, 23, 31$ ) bestimmten Flächen in den Punkten des Ortes in einer Ebene liegen, oder, was dasselbe ist, sich ihre Tangentialebenen in jedem Punkt des Ortes in einer Geraden schneiden. Ein Punkt des Ortes ist als Schnittpunkt von 3 Flächen  $F_{ik} = 0$  zwar eindeutig bestimmt, doch ist seine Lage in der Richtung der Schnittgeraden der Tangentialebenen unsicher, weil Lageänderungen erster Ordnung in dieser Richtung nur Änderungen 2. Ordnung in den zur Orientierung benutzten Winkeln und Strecken hervorrufen.

Aus Überlegungen, die den aus der Ein-Medien-Photogrammetrie bekannten entsprechen, folgt als gefährlicher Ort der durch die 3 Paßpunkte normal zur brechenden Ebene verlaufende Kreiszyylinder.

### 4. Transformationsformeln.

Nach Bestimmung der Orientierungselemente (2a, 2b) kann für jeden Bildpunkt der seine Abbildung vermittelnde Strahl vor und nach der Brechung an  $\pi$  angegeben werden, welcher den durch die vorliegende Aufnahme bestimmten Ort für den Objektpunkt darstellt. Hierzu müssen aber im Fall 2a erst die Raumlage von Aufnahmeachse und Bildebene, im Fall 2b hingegen die Koordinaten des Aufnahmeortes bestimmt werden.

#### a) Raumlage von Aufnahmeachse und Bildebene.

$\varphi_1$  bezeichne den Richtungswinkel von  $N$   $P_1'$  (siehe Abb.9)

$$\text{tg } \varphi_1 = \frac{X_1 - \xi}{Y_1 - \eta} \quad (23a)$$

und  $w_0$  den Einheitsvektor in der Richtung des Einfallstrahles  $Op^e$ .

$$w_0 = \begin{cases} e_1 = \sin \alpha \cos \varphi, \\ e_2 = \sin \alpha \sin \varphi, \\ e_3 = -\cos \alpha. \end{cases} \quad (23b)$$

Damit folgt für den nach dem Bildpunkt  $p^e$  zielenden Vektor:

$$\varphi = \frac{f}{\cos \gamma} \pi_0, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{f} \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (23c)$$

Bezeichnet  $f_0$  den Einheitsvektor der Aufnahmeachse  $\overline{Oh}$ , so muß jeder Vektor  $\varphi$  die Bedingung

$$\varphi \cdot f_0 = f \quad \text{oder} \quad \pi_0 \cdot f_0 = \cos \gamma \quad (24a)$$

erfüllen. Nun ist  $\nu$  der Einfallswinkel der Achse  $\overline{Oh}$  (s. Abb. 10) und  $\varphi_n$  sei der Richtungswinkel der Projektion der Achse in  $\pi$ ; dann ist nach (23b)

$$f_0 = \begin{cases} f_1 = \sin \nu \cos \varphi_n, \\ f_2 = \sin \nu \sin \varphi_n, \\ f_3 = -\cos \nu, \end{cases} \quad (24b)$$

und aus (24a) folgt eine lineare Gleichung für die  $f_i$ :

$$f_1 e_1^1 + f_2 e_2^1 + f_3 e_3^1 = \cos \gamma_1 \quad (25a)$$

Da  $f_0$  ein Einheitsvektor ist, besteht noch die Bedingung

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 1, \quad (25b)$$

so daß die  $f_i$  theoretisch schon aus 2 Gleichungen (25a) also aus 2 Paßpunkten ermittelt werden können, während die dritte zur Verfügung stehende Gleichung (25b) die Auswahl unter den möglichen Lösungen gestattet. Man kann aber auch die  $f_i$  aus den drei linearen Gleichungen (25a) bestimmen und die durch (25b) gegebene Beziehung als Kontrolle benutzen.

Aus den  $f_i$  ergeben sich  $\nu$  und  $\varphi_n$  wie folgt:

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{f_2}{f_1} \cdot \cos \nu = -\frac{f_3}{f_1} \quad (26)$$

$$\sin \nu = \frac{f_2}{\sin \varphi_n} = \frac{f_1}{\cos \varphi_n}$$

und damit ist die Aufnahmeachse im System der Paßpunkte festgelegt.

Die Lage der dazu orthogonalen Bildebene wird durch die Lage des Nadirpunktes im Bild bestimmt. Bezeichnen (wie bisher)  $\sigma_n, s_n$  die auf den Bildhauptpunkt  $h$  bezogenen Polarkoordinaten des Bildnadir  $n$ . so sind diese nach (15b) aus

$$\left. \begin{aligned} \cos (\sigma - \sigma_n) &= \frac{1}{\sin \nu \sin \gamma} (\cos \alpha - \cos \nu \cdot \cos \gamma), \\ s_n &= f \operatorname{tg} \nu \end{aligned} \right\} \quad (27a)$$

bestimmt und aus ihnen folgen die Bildkoordinaten:

$$\begin{aligned} y_n &= s_n \cos \sigma_n, \\ x_n &= s_n \sin \sigma_n. \end{aligned} \quad (27b)$$

Bei drei Paßpunkten müssen die drei aus den 3 möglichen Gleichungen (27a) folgenden Werte  $\sigma_n, s_n$  (innerhalb der Rechengenauigkeit) übereinstimmen.

Sind hingegen mehr als 3 Paßpunkte gegeben, so folgt schon aus (25a) ein überbestimmtes Gleichungssystem für die  $f_i$ , welche streng nach der Minimumforderung für die Quadratsumme der Verbesserungen der Bildkoordinaten unter Beachtung der Nebenbedingung (25b) ausgeglichen werden müßte. Ein praktisch genügendes Ergebnis wird aber auch aus der Ausgleichsforderung

$$\left[ v^2 \cos \gamma \right] = \text{Min}$$

erhalten.

Die Bedingung (25b) wird dann zwar bloß näherungsweise erfüllt sein; doch treten nur dann beachtbare Abweichungen auf, wenn die angenommene Bildweite  $f$  fehlerhaft ist (was in der Praxis kaum vorkommen wird).

Für die Ermittlung von  $\sigma_n$  steuert jeder der  $n$  Paßpunkte nach (27a) einen Wert  $\sigma_{ni}$ ,  $f$  bei; der beste Wert wird durch das Mittel

$$\sigma_n = \frac{[\sigma_{ni}]}{n}$$

gegeben.

#### b) Koordinaten des Aufnahmeortes.

Wurden (nach 2 b)  $h, \sigma_n, v$  ermittelt, so ergeben sich die Koordinaten  $\xi, \eta$  des Aufnahmeortes nach den in 2a<sub>4</sub> abgeleiteten Formeln (15a, b, c, d) und (16).

Zur Ermittlung des Richtungswinkels  $\varphi_n$  der Achse wird das aus den Einfallstrahlen nach dem Nadir (Lot auf  $\pi$ ), Bildhauptpunkt  $h$  und einem beliebigem Punkt  $p^e$  gebildete Dreieck betrachtet (s. Abb. 9). Von diesem sind die 3 Kantenwinkel  $\alpha$  (= Einfallswinkel von  $\overline{OP}$ ),  $v$  (= Nadirdistanz) und  $\gamma$  (= Winkel zwischen  $\overline{OP}$  und Aufnahmeachse) bekannt, während die sich in der Nadirlinie schneidenden Flächen den Winkel  $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_n$  einschließen. Dieser kann daher aus dem sphärischen Dreieck, das von der um 0 beschriebenen Einheitskugel aus dem Dreieck ausgeschnitten wird (nach dem Halbwinkelsatz) berechnet werden:

$$\left. \begin{aligned} \text{tg } \frac{\Delta\varphi}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s-v)\sin(s-\alpha)}{\sin s \sin(s-\gamma)}}, \\ s &= \alpha + v + \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (28a)$$

Da  $\varphi$  nach (23a) bekannt ist, folgt:

$$\varphi_n = \varphi - \Delta \varphi, \quad (28b)$$

wobei die aus den 3 Paßpunkten sich ergebenden Werte (innerhalb der Rechengenauigkeit) übereinstimmen müssen.

Liegen mehr als 3 Paßpunkte vor, so wird das System (16) zweckmäßig (näherungsweise) nach der Forderung

$$[v_k^2] = \text{Min}$$

ausgeglichen.

Für den Richtungswinkel der Achse folgt aus jedem Paßpunkt ein Wert  $\Delta \varphi_i$ ; man bildet das Mittel

$$\Delta \varphi = \frac{[\Delta \varphi_i]}{n} \quad (29)$$

und führt diesen Wert in (28b) ein.

Mit Hilfe der bisher errechneten Werte  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $h$ ,  $v$ ,  $\varphi_n$ ,  $x_n$ ,  $y_n$  kann die Aufnahme in einem optischen Gerät orientiert und ausgewertet werden.

Für die rechnerische Auswertung muß noch die Gleichung des die Abbildung vermittelnden Strahlenbündels angegeben werden.

### c) Gleichung des (Licht-) Strahlenbündels.

Das die Abbildung vermittelnde (Licht-) Strahlenbündel besteht aus Strahlen, welche in den Einfallpunkten an  $\pi$  gebrochen (geknickt) sind.

Da  $\varphi_n$  nach (26) oder (28b) bestimmt sind, kann für jeden Bildpunkt nach (28a)  $\Delta \varphi$  und daher der Richtungswinkel seines Einfallstrahles

$$\varphi = \varphi_n + \Delta \varphi \quad (30a)$$

bestimmt werden. Außerdem ist die polare Entfernung  $R = \overline{NP}^E$  bekannt.

$$R = h \operatorname{tg} \alpha \quad (30b)$$

und daher auch der Ortsvektor des Einfallpunktes.

$$\mathcal{P}_E = \begin{cases} X_E = \xi + R \cos \alpha, \\ Y_E = \eta + R \sin \alpha, \\ Z_E = 0 \end{cases} \quad (31a)$$

Der an  $\pi$  gebrochene Strahl bildet mit dem Lot (auf  $\pi$ ) den Winkel  $\beta$ , welcher nach dem Brechungsgesetz

$$\sin \beta = n \sin \alpha$$

zu berechnen ist. Da er in der Lotebene auf  $\pi$  durch den Einfallstrahl liegt, besitzt er den gleichen Richtungswinkel wie dieser und es ist

$$\varphi_0 = \begin{cases} \sin \beta \cos \varphi, \\ \sin \beta \sin \varphi, \\ -\cos \beta, \end{cases} \quad (31b)$$

der Einheitsvektor seiner Richtung. Bezeichnet  $\varphi_0$  den Ortsvektor des Aufnahmeortes, so ist

$$\varphi = \lambda (\varphi_E - \varphi_0) \quad (\lambda = \text{Parameter}) \quad (32a)$$

die Gleichung des Einfallsbündels und

$$\varphi = \varphi_E + \lambda \varphi_0 \quad (\lambda = \text{Parameter}) \quad (32b)$$

die Gleichung des Bündels nach der Brechung. Als Parameter treten hierin die Bildkoordinaten auf.

### III. ORIENTIERUNG VON STEREOAUFNAHMEN.

Die Orientierung eines Stereopaars bereitet in der Zwei-Medien-Photogrammetrie erhebliche Schwierigkeiten, da wie schon Z a a r in [1] erwähnt hat, sich im allgemeinen zwei zusammengehörige Strahlen auch nach erfolgter Orientierung nicht schneiden, so daß die für die Orientierung gewöhnlicher Stereoaufnahmen abgeleiteten fundamentalen Begriffe der Kernpunkte und Kernebenen nicht mehr gelten.

Im folgenden wird nun die Möglichkeit einer rechnerischen und optischen Orientierung untersucht (2), (3) und zuvor zur Erhärtung des von Z a a r empirisch gewonnenen Ergebnisses des Kreuzens zusammengehöriger Strahlenpaare, deren kürzester Abstand berechnet (1). Hieraus ergeben sich auch die Orte, für welche dieser Abstand verschwindet, in denen also auch in der Zwei-Medien-Photogrammetrie das Schneiden der Einfallstrahlen eine Bedingung für die Orientierung ist (ein Ergebnis, welches für die optische Orientierung Bedeutung hat).

#### 1. Der kürzeste Abstand eines Strahlenpaares.

$p_1, p_2$  sei ein entsprechendes Strahlenpaar, daß sich nach der Brechung an  $\pi$  im Objektpunkt P schneidet. Nach I,1, schneiden sowohl  $p_1$  als auch  $p_2$  die durch P gehende Normale zu  $\pi$  (Lot). Bezeichnen  $Q_1$  und  $Q_2$  diese Schnittpunkte (Abb.10) und

$$\delta t = \overline{Q_1 Q_2} = \Delta t_2 - \Delta t_1$$

so ist nach I,1,(5),

$$\delta t = t \left( \frac{1}{w_1} - \frac{1}{w_2} \right). \quad (1)$$

Der kürzeste Abstand K von  $p_1$  und  $p_2$  ist nun nach Definition z.B. gleich dem Normalabstand irgend eines Punktes der Geraden von  $p_2$  von der parallel  $p_2$  durch  $p_1$  gelegten Ebene  $\beta$ . Bezeichnet  $Q'_2$  die

Orthogonalprojektion von  $Q_2$  auf diese Ebene, und  $\psi$  den Winkel, den  $\overline{Q_1 Q_2} = \delta t$  mit  $\beta$  bildet, so ist:

$$K = \overline{Q_2 Q'_2} = \delta t \cdot \sin \psi. \quad (2)$$

Um  $\psi$  ermitteln zu können, wird ein rechtwinkeliges Koordinatensystem eingeführt, dessen Ursprung im Aufnahmezentrum  $O_1$  der ersten Aufnahme liegt und dessen  $\pi_1, \pi_2$ -Achsen parallel  $\pi$  sind, so daß die Ebene  $[\pi_1 \pi_3]$  den Basisvektor  $b$  enthält. Sind  $\alpha_1, \alpha_2$  die Einfallwinkel von  $p_1, p_2$  und  $\varphi_1 = (O_2 O_1 p_1')$ ,  $\varphi_2 = (O_1 O_2 p_2')$ , die Winkel, welche die Grundrißprojektion  $p'$  mit  $\pi_1$  einschließen, so sind die Einheitsvektoren (Richtungen) von  $p_1, p_2$  durch (die Kugelkoordinaten)  $\varphi_i, \alpha_i$  bestimmt.

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{10} &= \sin \alpha_1 \cos \varphi_1 \pi_1 + \sin \alpha_1 \sin \varphi_1 \pi_2 - \cos \alpha_1 \pi_3, \\ \varphi_{20} &= \sin \alpha_2 \cos \varphi_2 \pi_1 - \sin \alpha_2 \sin \varphi_2 \pi_2 - \cos \alpha_2 \pi_3. \end{aligned} \right\} (3)$$

Der Lotvektor  $n$  auf die durch  $\varphi_1, \varphi_2$  gegebene Ebene  $\beta$  bildet mit  $\pi_3$  den Winkel  $(90 - \psi)$  und es ist daher:

$$\sin \psi = n_0 \cdot \pi_3. \quad (4a)$$

Bezeichnet  $A$  den Winkel zwischen  $\varphi_1, \varphi_2$ , so bestehen die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} n &= \varphi_{10} \varphi_{20}, \quad |n| = \sin A \\ n_0 &= \frac{1}{\sin A} n \quad \cos A = \varphi_{10} \cdot \varphi_{20} \end{aligned} \right\} (4b)$$

und aus diesen folgt für den gesuchten Winkel:

$$\sin \psi = \frac{1}{\sin A} (n_3 \varphi_{10} \varphi_{20}). \quad (4c)$$

Die Auswertung der Vektorformel (4c) ergibt schließlich:

$$\left. \begin{aligned} \sin \psi &= - \frac{1}{\sin A} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin (\varphi_1 + \varphi_2), \\ \cos A &= \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos (\varphi_1 + \varphi_2) + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2. \end{aligned} \right\} (5)$$

Nach (2), (5) läßt sich nun für jedes Strahlenpaar der Betrag  $k$  des kürzesten Abstandes bestimmen.

Nun sollen noch die Koordinatenunterschiede

$$dx = x_F - x; \quad dy = y_F - y, \quad dt = t_F - t$$

des auf  $p_1$  gelegenen Fußpunktes  $F_1$  von  $k$  gegenüber  $P$  ermittelt werden. Bezeichnet  $dp = \overline{Q_1 F_1}$  und  $r$  den Normalabstand eines Punktes von  $h$ , so ist wie aus Abb. 10 ersichtlich,

$$r_F - r = - dp \sin \alpha_1$$

$$t_F - t_{Q1} = - dp \cos \alpha_1$$

und hieraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} dx &= - dp \sin \alpha_1 \cos \varphi_1 \\ dy &= - dp \sin \alpha_1 \sin \varphi_1 \\ dt &= - (\Delta t_1 + dp \cos \alpha_1) \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

Die Strecke  $dp$  kann aus dem Dreieck  $Q_1 Q'_2 F_1$  berechnet werden, dessen Seite  $\overline{Q_1 Q'_2} = \delta t'$  und Winkel  $\alpha'_1$  und  $\alpha'_2$  bei  $Q_1$  und  $Q'_2$  durch

$$\delta t' = \delta t \cos \psi, \quad \cos \alpha' = \frac{\cos \alpha}{\cos \psi} \quad (6b)$$

bestimmt sind:

$$dp = \delta t' \frac{\sin \alpha'_2}{\sin (\alpha'_1 + \alpha'_2)} \quad (6c)$$

Für  $h_1 = h_2 = 1000$  m,  $t = 10$  m,  $b = 700$  m,  $\alpha_1 = 30^\circ$ ,  $\varphi_1 = 90^\circ$  ergibt sich z.B.:

$$t = 0,56\text{m}, \quad K = 0,28\text{m}, \quad dx = 0, \quad dy = -0,23\text{m}, \quad dt = -3,18\text{m}.$$

Ein Strahlenpaar  $p_1 p_2$  schneidet sich nun, wenn  $k = 0$  wird. Dies ist nach (2) der Fall, wenn

$$1) \sin \psi = 0 \quad \text{oder} \quad 2) \delta t = 0. \quad (7)$$

Die erste Bedingung ist nur in der (Kern-) Ebene  $[h_1 h_2]$  erfüllt, doch liegen die Schnittpunkte um die nach (6) zu berechnenden Beträge gegenüber  $P$  verschoben. Wegen  $\psi = 0$ , sind in diesem Falle  $\alpha' = \alpha$ ,  $\delta t' = \delta t$  und  $\varphi = 0$  zu setzen.

Die zweite Bedingung ist nach I,(5) erfüllt, wenn

$$W_1 = W_2 \longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2.$$

In diesem Fall ist die seitliche Verschiebung gegenüber  $P$  gleich Null, während die Tiefenverschiebung  $dt = \Delta t_1 = \Delta t_2$  wird. Um nun den Ort aller Punkte zu finden, für welchen die obige Bedingung besteht, wird von der nach I,(7) geltenden Beziehung

$$r_1 = h_1 \operatorname{tg} \alpha + t \operatorname{tg} \beta,$$

$$r_2 = h_2 \operatorname{tg} \alpha + t \operatorname{tg} \beta.$$

ausgegangen. Durch Subtraktion erfolgt hieraus

$$r_2 - r_1 = (h_2 - h_1) \operatorname{tg} \alpha . \quad (8a)$$

Diese Gleichung ist für  $h_1 = h_2$  identisch erfüllt, wenn  $r_1 = r_2$  und dies ist für alle Punkte der Symmetrieebene von  $\overline{O_1 O_2}$  der Fall. Für  $h_1 \neq h_2$  ist also diese Symmetrieebene der gesuchte Ort. Ist hingegen  $h_2 - h_1 = \Delta h \neq 0$ , so bestimmt (8a) eine algebraische Fläche höherer Ordnung, weil nach I, 1,  $\operatorname{tg} \alpha$  als Wurzel eines Polynomes 4. Ordnung mit von  $r_1$ ,  $h_1$  und  $t$  abhängigen Koeffizienten dargestellt werden kann. Um eine Vorstellung von dieser Fläche zu erhalten, wird in erster Näherung  $\operatorname{tg} \alpha$  durch die Formel (I, 11a) ersetzt. Es ergibt sich:

$$\frac{r_2}{r_1} = 1 + \frac{\Delta h}{h_1} \left( 1 - \frac{t}{n h_1} \right) = \mu(t) , \quad (8b)$$

welche Gleichung für  $t = \text{const.}$  einen (Appollonischen) Kreis darstellt, dessen Mittelpunkt auf der Schnittlinie  $\overline{N_1 N_2}$  von  $[h_1 h_2]$  mit der Ebene  $t = \text{const.}$  liegt. Der Ort aller Punkte, für welche  $\int t = 0$  ist in erster Näherung ( $r_2 : r_1 = h_2 : h_1$ ) durch die Gleichung

$$\left. \begin{aligned} (x - x_m)^2 + y^2 &= a^2 , \\ x_m(t) &= \frac{-b'}{\mu^2 - 1} ; \quad a(t) = \frac{b'\mu}{\mu^2 - 1} , \\ (b' = \overline{N_1 N_2}, \text{ Projektion der Basis, } b &= \overline{O_1 O_2} \text{ auf } \pi) \end{aligned} \right\} \quad (8c)$$

bestimmt. Im allgemeinen wird nun  $\Delta h$  gegenüber  $h_1$  sehr klein sein, so daß in (8b) das Glied mit dem ebenfalls als klein vorausgesetzten Verhältnis  $t : h$  vernachlässigt werden kann.

Mit diesen Annahmen wird

$$x_m = -\frac{b}{2} \frac{h}{\Delta h} = \text{konst} ; \quad a = \frac{b}{2} \left( 1 + \frac{h}{\Delta h} \right) = \text{konst}$$

und der gesuchte Ort ein gerader Kreiszyylinder. Dieser enthält die Gerade

$$x = \frac{b}{2} \left( 1 + \frac{\Delta h}{2h} \right) ; \quad y = 0$$

und schließt immer den Aufnahmeort mit der kleineren Höhe ein.

Für  $\psi = \text{konst.}$  wächst der kürzeste Abstand mit der Differenz ( $r_2 - r_1$ ) und erreicht innerhalb eines Bildes am Bildrand seinen maximalen Wert.

## 2. Die rechnerische Orientierung.

Wegen der durch die Brechung der Strahlen verursachten Schwierigkeiten in der optischen Orientierung kommt der rechnerischen Lösung des Problems auch vom Standpunkt des Praktikers erhöhte Bedeutung zu. Abgesehen davon ist sie die notwendige Grundlage für die Herleitung von Näherungsverfahren und ist auch vom theoretischen Standpunkt unerläßlich. Vor

Beginn der rechnerischen Entwicklungen sollen nun die allgemeinen Grundlagen klargestellt werden.

Infolge der Brechung schneiden sich, wie in 1) bewiesen, die in die Aufnahmeobjektive gelangenden Einfallstrahlen, welche von ein und demselben im zweiten Medium gelegenen Punkt ausgehen, im allgemeinen nicht, es schneiden sich lediglich die im zweiten Medium verlaufenden Teile der Projektionsstrahlen, aber diese bilden kein Ebenenbüschel und sind aus den Aufnahmen allein auch nicht wieder herstellbar.

Ist jedoch die Lage der brechenden Ebene zu den Aufnahmeorten bekannt, so kann wieder, wie in der Ein-Medien-Photogrammetrie, ein Modell hergestellt und die Orientierung selbst in die Modellherstellung und die Modelleinpassung zerlegt werden.

Zum Modell gehören also zusätzlich zur gegenseitigen Lage der Aufnahmekammern noch deren Lagen zu  $\pi$ , wobei wegen der Homogenität der Medien und  $\pi$  die Lage eines Aufnahmeortes und das Azimut der Basis beliebig angenommen werden kann. Die für die Modellherstellung erforderlichen Orientierungsunbekannten sind daher: drei Drehungen für die erste Kammer, drei Drehungen für die zweite Kammer, das Verhältnis der Basislänge zur Höhe (Basisverhältnis) und der Neigungswinkel der Basis gegen  $\pi$ . Für die Herstellung eines Modelles sind in der Zwei-Medien-Photogrammetrie daher 8 Unbekannte zu bestimmen. Zu dieser Zahl kommt man auch, wenn beachtet wird, daß zusätzlich zur gegenseitigen Lage der Aufnahmekammern (5 Unbekannte) noch die Lage von  $\pi$  (3 Unbekannte) zu ermitteln sind.

Die Einpassung des Modells besteht in der Bestimmung des Maßstabes, der Grundrißlage eines Aufnahmeortes und des Azimutes der Basis. Diese vier Unbekannten können aus der Grundrißlage zweier Paßpunkte, oder Raumlage eines Paßpunktes und einer Koordinate (nicht Tiefe) eines zweiten bestimmt werden. Als Ergebnis dieser allgemeinen Überlegungen folgt:

Für die Orientierung eines Stereoaufnahmepaares in der Zwei-Medien-Photogrammetrie sind, wie bei der Orientierung in der Ein-Medien-Photogrammetrie, insgesamt 12 Unbekannte zu bestimmen. Von diesen werden acht für die Herstellung des Modelles und vier für die Einpassung desselben benötigt. Die Herstellung des Modelles ist theoretisch möglich, wenn in beiden Aufnahmen acht Punktpaare identifiziert werden können. Für die Einpassung genügen zwei Paßpunkte, von denen die Grundrißlagen, oder die Raumlage eines Punktes und eine Grundrißkoordinate des zweiten bekannt sind.

Im Folgenden werden nun erst die Orientierungsgrößen für das Modell und aus diesen die Modellkoordinaten bestimmt und hierauf wird die Einpassung durchgeführt.

#### a) Bestimmung der Orientierungsgrößen für das Modell.

Die beiden Aufnahmen seien mit der gleichen Kammer, also mit gleicher Bildweite  $f$ , in den Aufnahmeorten  $O_1$  und  $O_2$  erfolgt, deren gegenseitige Lage durch den Basisvektor  $\mathcal{B}$  gegeben sei. Ein Punkt  $P$  werden in  $p_1^e$  und  $p_2^e$  abgebildet, deren Bildkoordinaten  $x_1y_1$  und  $x_2y_2$  den Aufnahmen entnommen werden können. Die Abbildung erfolgt bis zur brechenden Ebene  $\pi$  durch die Einfallstrahlen, deren Richtungen durch die nach den entsprechenden Bildpunkten zielenden Vektoren gegeben sind. Die Ortsvektoren der Einfallpunkte  $P^E$ , bezogen auf den zugehörigen Aufnahmeort  $O$ , sollen mit  $\mathcal{P}^E$  bezeichnet werden, die Richtung der gebrochenen

Strahlen sei durch  $\alpha$  gegeben. Nach durchgeführter Orientierung müssen sich die zu entsprechenden Bildpunkten gehörigen Vektoren  $\alpha_1$   $\alpha_2$  schneiden, während  $\mathcal{G}_1$   $\mathcal{G}_2$  im Allgemeinen windschief zu einander stehen. (Abb. 11).

Die Abbildung erfolgt durch die an  $\pi$  gebrochenen Strahlenbündel

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 &= \mathcal{G}_{1E} + \lambda_1 \alpha_1 \\ \mathcal{C}_2 &= \mathcal{C} + \mathcal{G}_{2E} + \lambda_2 \alpha_2 ,\end{aligned}$$

deren Strahlen durch die entsprechenden Bildpunkte einander zugeordnet werden. Die Orientierung ist durchgeführt, wenn sich für jedes Strahlenpaar  $\mathcal{C}_1$   $\mathcal{C}_2$  Parameter  $\lambda_1$   $\lambda_2$  bestimmen lassen, so daß  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$  wird. Diese Forderung ergibt die Fundamentalgleichung für die Modellherstellung:

$$\mathcal{G}_{1E} + \lambda_1 \alpha_1 = \mathcal{C} + \mathcal{G}_{2E} + \lambda_2 \alpha_2 . \quad (9a)$$

Bezeichnet man den Verbindungsvektor der beiden Einfallpunkte mit

$$\mathcal{C} = \mathcal{C} + \mathcal{G}_{2E} - \mathcal{G}_{1E} , \quad (9b)$$

so erhält diese Gleichung die Gestalt:

$$\mathcal{C} + \lambda_2 \alpha_2 - \lambda_1 \alpha_1 = 0 . \quad (9c)$$

Aus dieser Fundamentalgleichung können nun sowohl die Formeln für die Bestimmung der Orientierungsgrößen, als auch die Formeln für die Ermittlung der Modellkoordinaten abgeleitet werden.

Zuvor sollen die darin auftretenden Vektoren  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G}_E$ ,  $\alpha$ ,  $\mathcal{C}$  durch die Orientierungsgrößen, das sind die Verkantung  $\mathcal{X}$ , die Längsneigung  $\varphi$  und die Querneigung  $\omega$  für jede Kammer getrennt, das Basisverhältnis  $l : v = b : h$  und der Neigungs- (Höhen-)winkel  $\mathcal{E}$  der Basis gegen  $\pi$  ausgedrückt werden. Hierzu wird ein rechtsschraubiges Koordinatendreibein ( $\pi_1$   $\pi_2$   $\pi_3$ ) mit dem Ursprung in  $O_1$  eingeführt, dessen  $\pi_3$ -Achse normal  $\pi$  verläuft und dessen  $\pi_2$ -Achse mit dem Basisvektor in einer Normalenebene von  $\pi$  liegt (Abb.13). In diesem System ist:

$$\mathcal{C} = b \cos \mathcal{E} \pi_1 + b \sin \mathcal{E} \pi_3 . \quad (10)$$

Der Ortsvektor  $\mathcal{G}$  eines Bildpunktes  $p^e$  habe die Koordinaten ( $u$   $v$   $w$ ), so daß

$$\mathcal{G} = u \pi_1 + v \pi_2 - w \pi_3 . \quad (11a)$$

Wie der Verf. in [3] gezeigt hat, bestehen zwischen  $u$   $v$   $w$ , den Bildkoordinaten  $x$ ,  $y$  und den Orientierungsgrößen die nachstehenden Beziehun-

gen:

$$\left. \begin{aligned} u &= u' \cos \varphi - w' \sin \varphi \\ v &= v' \cos \omega + f \sin \omega \\ w &= w' \cos \varphi + u' \sin \varphi, \\ \\ u' &= X \cos \mathcal{L} - Y \sin \mathcal{L} \\ v' &= Y \cos \mathcal{L} + X \sin \mathcal{L} \\ w' &= f \cos \omega - v' \sin \omega . \end{aligned} \right\} \quad (11b)$$

Aus diesen können  $(u \ v \ w)$  berechnet werden, wenn  $x, y$  und  $f$  gegeben sind. Der absolute Betrag von  $\varphi$  ist durch

$$p^2 = u^2 + v^2 + w^2 = x^2 + y^2 + f^2 \quad (11c)$$

gegeben. Da  $\varphi$  und  $-\pi_3$  den Einfallswinkel  $\alpha$  einschließen, ist auch:

$$(p \sin \alpha)^2 = u^2 + v^2 ; \quad p \cos \alpha = w \quad (11d)$$

Für den Ortsvektor des Einfallpunktes  $P^E$  besteht wie aus Abb. 12 ersichtlich die Beziehung

$$\varphi_E = \frac{h}{\cos \alpha} \cdot \frac{\varphi}{p} = \frac{h}{w} \varphi . \quad (12)$$

Der gebrochene Strahl bildet mit  $-\pi_3$  den Brechungswinkel  $\beta$  und liegt in der Ebene  $(-\pi_3 \ \varphi)$ ; er läßt sich daher als Linearkombination dieser Vektoren darstellen.

$$\varphi = -\mu \pi_3 + \nu \varphi_0 .$$

Wie aus Abb. 13 ersichtlich, bilden die Absolutbeträge das Verhältnis:

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \beta} = n \cos \beta - \cos \alpha ,$$

so daß die nachstehenden Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} p \varphi &= p e \pi_3 + \varphi \\ p e &= w - p n \cdot \cos \beta \end{aligned} \quad (13a)$$

Der darin auftretende Ausdruck  $p e$ , der später noch öfters benötigt wird, soll nun durch die Orientierungsgrößen ausgedrückt werden. Nach dem Brechungsgesetz ist

$$\cos \beta = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

und hieraus, sowie wegen

$$(p \sin \alpha)^2 = u^2 + v^2$$

folgt schließlich:

$$p e = w \left( 1 - n \sqrt{1 - \frac{n^2 - 1}{n} \frac{u^2 + v^2}{w^2}} \right). \quad (13b)$$

Man erkennt leicht, daß der Ausdruck für  $n = 1$  verschwindet.

Wird nun die Fundamentalgleichung (9c) innerlich mit  $\varphi_1 \times \varphi_2$  multipliziert, so folgt die Schnittbedingung

$$(\delta \varphi_1 \varphi_2) = 0,$$

welche immer erfüllt ist, wenn entsprechende Strahlen  $\varphi_1, \varphi_2$  sich schneiden. Umgekehrt kann sie auch zur Bestimmung der Orientierungsgrößen benutzt werden. Durch Einsetzen von (9b), (13) in (14) erhält man:

$$(\delta \varphi_1 \varphi_2) + e_1 p_1 (\delta - \varphi_{1E}, \varpi_3, \varphi_2) + e_2 p_2 (\delta + \varphi_{2E}, \varphi_1, \varpi_3) = 0$$

Hieraus ist zu sehen, daß die Schnittbedingung für die gebrochenen Strahlen die Determinante  $(\delta \varphi_1 \varphi_2)$  enthält, welche die Schnittbedingung für ungebrochene Strahlen darstellt und zusätzlich noch zwei Determinanten, welche mit dem Faktor  $ep$  multipliziert werden. Da  $ep$  für  $n=1$  gleich null wird, ergibt (14) in diesem Fall die Schnittbedingung für ungebrochene Strahlen, wie es ja auch sein muß.

Nun werden in (14) Koordinaten eingeführt. Bezeichnen  $(u_s, v_s, C)$  die Koordinaten von  $\delta$ , so erhält man:

$$\begin{vmatrix} u_s & u_1 & u_2 \\ v_s & v_1 & v_2 \\ 0 & e_1 p_1 - w_1 & e_2 p_2 - w_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Bei Beachtung der Beziehungen

$$\frac{h_1}{b} = v, \quad \frac{h_2}{b} = \frac{h_1}{b} + \frac{b}{b} = v + \sin \varepsilon$$

ergeben sich nach (9b) und (12) für  $u_s, v_s$  die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} u_s &= b \left[ \cos \varepsilon + v \left( \frac{u_2}{w_2} - \frac{u_1}{w_1} \right) + \frac{u_2}{w_2} \cdot \sin \varepsilon \right], \\ v_s &= b \left[ v \left( \frac{v_2}{w_2} - \frac{v_1}{w_1} \right) + \frac{v_2}{w_2} \cdot \sin \varepsilon \right]. \end{aligned} \right\} \quad (15a)$$

Diese Werte in (14a) eingesetzt, ergeben einen Ausdruck, der außer den Orientierungsunbekannten  $\alpha_1, \varphi_1, \omega_1; \alpha_2, \varphi_2, \omega_2, v, \varepsilon$  nur noch bekannte Größen (Bildkoordinaten  $x_1, y_1, x_2, y_2, f$ ) enthält. Führt man noch die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \Delta U &= v_1 (e_2 p_2 - w_2) - v_2 (e_1 p_1 - w_1) \\ \Delta V &= u_1 (e_2 p_2 - w_2) - u_2 (e_1 p_1 - w_1), \end{aligned} \quad (15b)$$

ein, so erhält die Schnittbedingung die Form:

$$U_s \Delta U - U_g \Delta V = 0 \quad (15c)$$

Eine derartige Gleichung kann für jedes Bildpunktpaar, das in den Aufnahmen identifiziert werden kann, aufgestellt werden. Zur Ermittlung der acht Unbekannten sind acht solche Gleichungen, also die Bildkoordinaten von acht entsprechenden Punktepaaren erforderlich. Man erkennt aber leicht, daß eine allgemeine Auflösung dieser komplizierten, irrationalen und transzendenten Gleichungen praktisch unmöglich ist. Auch die theoretisch leicht durchzuführende Aufstellung von linearen Fehlergleichungen würde für den allgemeinen Fall auf praktisch kaum zu bewältigende Formelsysteme führen. Aus diesem Grund wird im Folgenden nur der Fall genäherter Senkrechtaufnahmen, welche auch praktisch in der Regel vorliegen wird, weiter verfolgt.

Für genäherete Senkrechtaufnahmen, die aus Sichtgründen immer gefordert werden und sich wegen der hoch entwickelten Aufnahmetechnik (automatische Steuerung des Vermessungsflugzeuges und Kreiselsteuerung der Kammen) auch mit großer Güte erreichen lassen, werden alle Orientierungsgrößen mit Ausnahme des Basisverhältnisses  $v = h : b$  differentiell klein. Aber für dieses geben die Aufnahmedaten eine gute Näherung  $v_0$ , so daß  $v = v_0 + dv$  in die Gleichung eingeführt und nur mehr  $dv$  bestimmt zu werden braucht.

Nach [3] wird nunmehr aus (11b)

$$\left. \begin{aligned} u &= x - y \, d\alpha - f \, d\varphi, \\ v &= y + x \, d\alpha + f \, d\omega, \\ w &= f + x \, d\varphi - y \, d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (16a)$$

Hieraus folgen auch:

$$\begin{aligned} \frac{u}{w} &= \frac{x}{f} - \frac{y}{f} \, d\alpha - \left(1 + \frac{x^2}{f^2}\right) d\varphi + \frac{xy}{f^2} \cdot d\omega \\ \frac{v}{w} &= \frac{y}{f} + \frac{x}{f} \, d\alpha - \frac{xy}{f^2} \, d\varphi + \left(1 + \frac{y^2}{f^2}\right) d\omega. \end{aligned} \quad (16b)$$

Außerdem kann der Wurzelausdruck in (13b) entwickelt werden. Setzt man

$$m = n \sqrt{1 + \frac{n^2 - 1}{n^2} \left(\frac{c}{f}\right)^2}, \quad \text{wobei } c^2 = u^2 + v^2, \quad (17)$$

so ergibt sich nach einigen Rechnungen

$$w n \sqrt{1 - \frac{n^2 - 1}{n^2} \cdot \frac{u^2 + v^2}{w^2}} = fm + \frac{1}{m} (x \, d\varphi - y \, d\omega).$$

Damit wird

$$\left. \begin{aligned} p e &= (1 - m) f + \left(1 - \frac{1}{m}\right) (x d\varphi - y d\omega), \\ p e - w &= -fm - \frac{1}{m} d\varphi + \frac{1}{m} y d\omega . \end{aligned} \right\} (18)$$

Für die Koordinaten von  $\delta$  erhält man

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{b} &= 1 + v_0 \frac{x_2 - x_1}{f} - v_0 \frac{y_2}{f} dx_2 + v_0 \frac{y_1}{f} dx_1 - \\ &- v_0 \left(1 + \frac{x_2^2}{f^2}\right) d\varphi_2 + v_0 \left(1 + \frac{x_1^2}{f^2}\right) d\varphi_1 + v_0 \frac{x_2 y_2}{f^2} d\omega_2 - \\ &- v_0 \frac{x_1 y_1}{f^2} d\omega_1 + \frac{x_2 - x_1}{f} dv + \frac{x_2}{f} d\varepsilon, \\ \frac{v}{b} &= v_0 \frac{y_2 - y_1}{f} + v_0 \frac{x_2}{f} dx_2 - v_0 \frac{x_1}{f} dx_1 - v_0 \frac{x_2 y_2}{f^2} d\varphi_2 \\ &+ v_0 \frac{x_1 y_1}{f^2} d\varphi_1 + v_0 \left(1 + \frac{y_2^2}{f^2}\right) d\omega_2 - v_0 \left(1 + \frac{y_1^2}{f^2}\right) d\omega_1 + \\ &+ \frac{y_2 - y_1}{f} dv + \frac{y_2}{f} d\varepsilon \end{aligned} \right\} (19a)$$

und die Unterdeterminanten  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  nehmen die Form an:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= f(m_1 y_2 - m_2 y_1) + f m_1 x_2 dx_2 - f m_2 x_1 dx_1 - \\ &- \left(f^2 m_2 + \frac{1}{m_1} y_1 y_2\right) d\omega_1 + \left(f^2 m_1 + \frac{1}{m_2} y_1 y_2\right) d\omega_2 + \\ &+ \frac{1}{m_1} x_1 y_2 d\varphi_1 - \frac{1}{m_2} x_2 y_1 d\varphi_2 \\ \Delta v &= f(m_1 x_2 - m_2 x_1) + f m_2 y_1 dx_1 - f m_1 y_2 dx_2 + \\ &+ \left(f^2 m_2 + \frac{1}{m_1} y_1 y_2\right) d\varphi_1 - \left(f^2 m_1 + \frac{1}{m_2} x_1 x_2\right) d\varphi_2 - \\ &\frac{1}{m_1} x_2 y_1 d\omega_1 + \frac{1}{m_2} x_1 y_2 d\omega_2 . \end{aligned} \right\} (19b)$$

Mit diesen Werten folgt aus (15c) eine lineare Gleichung von der Form

$$\begin{aligned} a_0 + a_{10} dx_1 + a_{20} d\varphi_1 + a_{30} d\omega_1 \\ + a_{01} dx_2 + a_{02} d\varphi_2 + a_{03} d\omega_2 + a_v dv + a_\varepsilon d\varepsilon = 0, \end{aligned} \quad (20a)$$

in welcher die Koeffizienten durch das nachstehende System zu bestimmen sind:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= f(m_1 y_2 - m_2 y_1) + v_0 \Delta m (x_2 y_1 - x_1 y_2), \\
 a_{10} &= -f m_2 x_1 + v_0 \Delta m (x_1 x_2 + y_1 y_2), \\
 a_{01} &= f m_1 x_2 - v_0 \Delta m (x_1 x_2 + y_1 y_2), \\
 a_{20} &= \frac{1}{m_1} x_1 y_2 + v_0 f \Delta m y_2 + v_0 \frac{x_1}{f} (x_1 y_2 - x_2 y_1) (m_1 - \frac{1}{m_1}), \\
 a_{02} &= -\frac{1}{m_2} x_2 y_1 - v_0 f \Delta m y_1 - v_0 \frac{x_2}{f} (x_1 y_2 - x_2 y_1) (m_2 - \frac{1}{m_2}), \\
 a_{30} &= -f^2 m_2^{-1} y_1 y_2 \frac{1}{m_1} + v_0 f \Delta m x_2 + v_0 \frac{y_1}{f} (x_2 y_1 - x_1 y_2) (m_1 - \frac{1}{m_1}), \\
 a_{03} &= f^2 m_1 + y_1 y_2 \frac{1}{m_2} - v_0 f \Delta m x_1 - v_0 \frac{y_2}{f} (x_2 y_1 - x_1 y_2) (m_2 - \frac{1}{m_2}), \\
 a_v &= \Delta m (x_2 y_1 - x_1 y_2), \\
 a_\varepsilon &= -m_2 (x_2 y_1 - x_1 y_2).
 \end{aligned}$$

$(\Delta m = m_1 - m_2) \quad (20b)$

Die Größen  $m$  können nach (17) bestimmt werden, für die praktische Anwendung ist es u.U. vorteilhaft, den Ausdruck für  $m$  noch zu entwickeln:

$$m = n \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{n^2 - 1}{n^2} \left( \frac{c}{f} \right)^2 \right]$$

Für  $n = 1$  folgen wegen  $m = 1$ ,  $\Delta m = m - \frac{1}{m} = 0$  aus (20b) die Koeffizienten für die Fehlergleichungen der Ein-Medien-Photogrammetrie.

#### b) Bestimmung der Modellkoordinaten.

Nach Ermittlung der Orientierungsunbekannten können für ein beliebig gewähltes  $b$  erst die Höhen  $h_1 = b v$  und  $h_2 = h_1 + b \cdot \sin \varepsilon$  und schließlich die Koordinaten  $U, V, W$  der Modellpunkte  $P_m$  berechnet werden. Zu diesem Zweck wird wieder die Fundamentalgleichung (9c) betrachtet. Gelingt es, hieraus einen der Parameter  $\lambda_1$  oder  $\lambda_2$  zu bestimmen, so lassen sich die gesuchten Koordinaten  $(U, V, W)$  des Ortsvektors

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C} &= \mathcal{C}_{1E} + \lambda_1 \varphi_1 \\
 &= \mathcal{C} + \mathcal{C}_{2E} + \lambda_2 \varphi_2
 \end{aligned}$$

angeben. Multipliziert man (9c) innerlich mit dem Vektor  $\mathcal{C}_3 \times \varphi_2$  so

verschwindet das Glied mit  $\lambda_2$  und man erhält:

$$\lambda_1 = \frac{(\pi_3 \delta \varphi_2)}{(\pi_3 \varphi_1 \varphi_2)}. \quad (22a)$$

Entsprechend ergibt die Multiplikation mit  $\pi_3 \times \varphi_1$  den Parameter:

$$\lambda_2 = \frac{(\pi_3 \delta \varphi_1)}{(\pi_3 \varphi_1 \varphi_2)} \quad (22b)$$

Das Verhältnis  $\lambda_1 : \lambda_2$  kann aus (22a,b) oder auch durch innere Multiplikation der Fundamentalgleichung mit  $\pi_3$ , bestimmt werden.

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\pi_3 \cdot \varphi_2}{\pi_3 \cdot \varphi_1} = \frac{(\pi_3 \delta \varphi_2)}{(\pi_3 \delta \varphi_1)} \quad (22c)$$

Nach Einführen von Koordinaten ergeben sich die Gebrauchsformeln:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{p_1} = \lambda_{o1} &= \frac{u_s v_2 - v_s u_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1}, & \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_{o1}}{\lambda_{o2}} &= \frac{e_2 p_2 - w_2}{e_1 p_1 - w_1} \\ \frac{\lambda_2}{p_2} = \lambda_{o2} &= \frac{u_s v_1 - v_s u_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1}, & & \end{aligned} \quad (23a)$$

Für den Ortsvektor

$$\varrho = U \pi_1 + V \pi_2 - W \pi_3$$

besteht somit das Formelsystem (siehe (12) und (13a)) :

$$\left. \begin{aligned} U &= \left( \frac{h_1}{w_1} + \lambda_{o1} \right) u_1, \\ V &= \left( \frac{h_1}{w_1} + \lambda_{o1} \right) v_1, \\ W &= h_1 - \lambda_{o1} (p_1 e_1 - w_1) \end{aligned} \right\} \quad (23b)$$

Oder auch:

$$\left. \begin{aligned} U &= b \cos \mathcal{E} + \left( \frac{h_2}{w_2} + \lambda_{o2} \right) u_2, \\ V &= \left( \frac{h_2}{w_2} + \lambda_{o2} \right) v_2, \\ W &= -b \sin \mathcal{E} + h_2 - \lambda_{o2} (p_2 e_2 - w_2) \end{aligned} \right\} \quad (23c)$$

Für die praktische Rechnung werden die Formeln in der Reihenfolge (11b), (15a), (23a,b) benutzt.

Liegen genäherte Senkrechtaufnahmen vor, so wird man zweckmäßig lediglich die Werte  $u, v, w$  nach den Reihenformeln (16a) berechnen, dann aber wieder das angegebene Formelsystem (15a), (23a,b) verwenden.

### c) Einpassung des Modelles.

Zur Einpassung des Modelles in das gegebene Landeskoordinatensystem sind zwei Paßpunkte erforderlich, von welchen vier Koordinaten gegeben sind. Es müssen also entweder die beiden Grundrißlagen (Fall 1), oder die Raumlage eines Punktes und eine Koordinate  $X$  oder  $Y$  des anderen bekannt sein. In beiden Fällen kann die Einpassung auf eine Drehstreckung zurückgeführt werden.

Fall 1: Aus den gegebenen Koordinaten  $X_1, Y_1, X_2, Y_2$  der Paßpunkte  $P_1, P_2$  werden Richtung und Abstand von  $P_1, P_2$  ermittelt und mit den aus den Modellkoordinaten folgenden Werten verglichen.

$$\begin{aligned} D^2 &= \Delta X^2 + \Delta Y^2, & \operatorname{tg} \sigma &= \frac{\Delta Y}{\Delta X}, \\ D^2 &= \Delta U^2 + \Delta V^2, & \operatorname{tg} \sigma' &= \frac{\Delta V}{\Delta U}. \end{aligned}$$

Der Quotient der Entfernungen gibt die Maßstabzahl  $m$ , mit welcher alle Modellmaße in wahre Werte übergeführt werden können, die Differenz der Richtungswinkel die erforderliche azimutale Verdrehung des Modelles.

$$m = \frac{D}{D'}; \quad \omega = \sigma - \sigma'.$$

Das Modell kann nun durch eine Parallelverschiebung und eine Drehstreckung eingespannt werden. Bezeichnen

$$\left. \begin{aligned} m \cos \omega &= p \\ m \sin \omega &= q \end{aligned} \right\} \text{Kontrolle: } p^2 + q^2 = m^2,$$

so ergeben sich die gesuchten Landeskoordinaten der Modellpunkte aus:

$$\begin{aligned} X &= X_1 + (U - U_1) p + (V - V_1) q, \\ Y &= Y_1 + (V - V_1) p - (U - U_1) q, \\ T &= m (W - h_1). \end{aligned}$$

Fall 2: In diesem Falle muß erst aus der vorgegebenen Tiefe  $t_1$  des Paßpunktes  $P_1 (X_1, Y_1, t_1)$  die Maßstabzahl errechnet werden.

$$m = \frac{t_1}{W_1 - h_1}.$$

Mit dieser können nun

$$D = D' m; \quad \Delta Y = \sqrt{D^2 - \Delta X^2} \quad \text{oder} \quad \Delta X = \sqrt{D^2 - \Delta Y^2}$$

gebildet und somit der Richtungswinkel  $\sigma$  bestimmt werden.

$$\cos \sigma = \frac{\Delta X}{D} \quad ; \quad \sin \sigma = \frac{\Delta Y}{D}$$

Die weitere Rechnung erfolgt wieder nach (24a,b,c). Die Angabe der Tiefe  $t_2$  des zweiten Punktes als Koordinate, zusätzlich zu den Koordinaten von  $P_1$  würde nichts Neues bringen, weil  $t_2$  ja schon aus  $t_1$  durch  $t_2 = (W_2 - h_2) m$  gegeben ist.

### 3. Optische Orientierung.

In der Zwei-Medien-Photogrammetrie stehen der Durchführung einer optischen Orientierung (entsprechend dem in der Ein-Medien-Photogrammetrie gebräuchlichen Vorgang) große Schwierigkeiten entgegen, weil das Verschwinden von Parallaxen im allgemeinen kein Zeichen für die erreichte Orientierung ist. Im größeren Teil des Modelles müssen auch nach durchgeführter Orientierung Parallaxen auftreten, so daß ohne Einschaltung eines brechenden Mediums sogar die stereoskopische Betrachtung unmöglich wird.

Eine optische Orientierung, welche nach den in 2) durchgeführten Überlegungen in zwei getrennten Arbeitsgängen (Modellherstellung und Einpassung) erfolgt, ist nur denkbar, wenn die Aufnahmeverhältnisse genau wieder hergestellt und ein zweites Medium, das dem bei der Aufnahme entspricht, in fester und gleicher Lage wie bei der Aufnahme eingeschaltet wird, wie dies Zaar in [1] vorschlägt. Hierfür müssen aber noch Vorrichtungen angegeben werden, durch welche der Verlauf der Strahlen in diesem Medium beobachtet und ausgemessen werden kann. Aber auch unter diesen m.E. praktisch schwer zu verwirklichenden Voraussetzungen dürfte eine praktische Orientierung noch auf erhebliche Schwierigkeiten stoßen, da für 8 Orientierungsunbekannten ein einfaches Verfahren einer succesiven Bestimmung durch Betrachten der Parallaxen an charakteristischen Punkten schwer denkbar ist.

Im Folgenden wird nun für genäherte Senkrechtaufnahmen ein Näherungsverfahren angegeben, für welches Näherungswerte für die gegenseitige und absolute Orientierung erforderlich sind, so daß die Möglichkeit besteht, die Einfallbündel in perspektive überzuführen und die Näherung dann schrittweise zu verbessern. Hierdurch werden Modellherstellung und Einpassung mit einander verknüpft und das Modell nach erfolgter erster Einpassung wieder verbessert, usw. Obwohl sachlich nicht mehr ganz zutreffend, werden die beiden Arbeitsgänge wieder als erste, zweite usw. Modellherstellung und Einpassung bezeichnet.

#### a) Erste Modellherstellung.

Für die Herstellung des Modelles, dessen Orientierungsgrößen näherungsweise bekannt vorausgesetzt werden, sollen vor allem jene Punkte betrachtet werden, deren zugehörige Strahlen sich nach erfolgter Orientierung schneiden müssen. Das sind die in der Lotebene durch die Aufnahmezentren gelegenen Punkte, die Punkte der nach II,8b bestimmten Fläche,

welche in erster Näherung durch die Symmetrieebene von  $O_1 O_2$  ersetzt werden kann und allenfalls vorhandene Punkte, welche in oder über  $\pi$  liegen. Wie in der Ein-Medien-Photogrammetrie werden nun charakteristische Punkte ausgewählt und in diesen die Parallaxen durch zugeordnete Orientierungsgrößen korrigiert. Diese Punkte sind die beiden Hauptpunkte 1,2, zwei im gleichen Abstand darüber-(oder darunter-)liegende Punkte 3,4 und ein etwa im Abstand 13 unterhalb (oder oberhalb) in der Symmetrieebene von  $O_1 O_2$  liegender Punkt 5 (Abb. 14).

Da für die durch 1,2 gehenden Strahlen die Schnittbedingung gilt, können die Bilder in diesen Punkten wie in der Ein-Medien-Photogrammetrie ausgekantet werden. Hierauf werden die Punkte 3, 4 betrachtet. Da ihre Tiefen näherungsweise bekannt sind, können entweder Kompensationsfilter eingeschaltet und die Parallaxen durch die Längsneigungen  $\varphi_1, \varphi_2$  beseitigt, oder ohne Verwendung von Filtern bis auf den nach II,1, zu berechnenden Betrag korrigiert werden. Für die verbleibende Restparallaxe folgt mit guter Näherung:

$$dy = \frac{1}{2} \delta t \sin \psi_2,$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{y}{f} \delta t = t \frac{n^2 - 1}{2n} \left( \frac{b}{f} \right)^2 \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{n^2 - 1}{n^2} \left[ 2 \left( \frac{y}{f} \right)^2 + \left( \frac{b}{f} \right)^2 \right] \right).$$

Die im Punkt 5 (für den ebenfalls die Schnittbedingung gilt) vorhandene Parallaxe wird dann, wie in der Ein-Medien-Photogrammetrie  $\left[ 1 + \left( \frac{f}{y} \right)^2 \right]$ -fach mit der Querneigung  $\omega_2$  überkorrigiert und das Verfahren wiederholt, bis näherungsweise die geforderten Bedingungen erfüllt sind. Das Verfahren geht in das schon bekannte Verfahren der Ein-Medien-Photogrammetrie über, wenn in der Nähe von 3,4 über dem zweiten Medium gelegene Punkte vorhanden sind. Nun folgt

#### b) Die erste Modelleinpassung.

Bei dieser werden in bekannter Weise Maßstab und Lage des Modelles gegenüber  $\pi$  verbessert. Hierzu sind drei Paßpunkte erforderlich. Bei der Messung werden in diesen Punkten wieder Kompensationsplatten benutzt. Sodann erfolgt die Verbesserung des Modelles durch die zweite Modellherstellung, usw.

Die Orientierung ist schließlich erreicht, wenn sich durch Einschalten von für die gleiche Tiefe berechneten Kompensationsfilterpaaren in jedem Punkt Parallaxfreiheit also stereoskopischer Effekt zeigt.

Bei der Auswertung werden dann ebenfalls solche Filterpaare benutzt die durch Probieren aus der Forderung nach dem besten Stereoeffekt bestimmt werden und diese dann für die nach I 3 zu berechnenden Tiefenzonen verwendet.

#### ZUSAMMENFASSUNG.

Im ersten Abschnitt der vorliegenden Arbeit wurden die allgemeinen Abbildungsverhältnisse in der Zwei-Medien-Photogrammetrie (Z-M-P) untersucht. Es ergaben sich allgemeine Formeln für die Transformation

eines vorgegebenen Einfallbildes in eine Perspektive oder orthogonale Projektion und aus diesen die Erkenntnis, daß dieser Zusammenhang immer als zentrale Punktverwandtschaft, mit dem Nadir als Zentrum und einem von der Tiefe und dem Radialabstand abhängigen Streckenverhältnis angesehen werden kann. Für die Abbildung eines beliebigen, im zweiten Medium gelegenen Objektes konnten keine geschlossenen Formeln angegeben werden, da sich der Einfallwinkel aus  $n$ ,  $r$ ,  $t$  und  $h$  nur aus einer algebraischen Gleichung 4. Ordnung herleiten läßt. Doch wurden für den in der hydrographischen Praxis vorkommenden Fall von Luftaufnahmen von unter Wasser gelegenen Objekten Näherungsformeln entwickelt und aus diesen die Abbildung einer beliebig gelegenen Geraden diskutiert.

Aus den Untersuchungen über eine optische Kompensation der durch die Brechung erzeugten Abweichung von der Perspektive folgten Vorschläge für die Konstruktion von Kompensationssystemen (Planplatten oder plankonkave Linsen), durch welche die Einfallbündel in perspektive übergeführt werden. Dieses kann bei der Aufnahme von ebenem horizontalen Gelände gleich bei der Aufnahme hinter das Objektiv geschaltet werden, in allen übrigen Fällen aber erst bei der Auswertung verwendet und dann vor das Objektiv gebracht. Für Entzerrungen, bei welchen nur Grundrißlagen zu bestimmen sind, führt wie bei hügeligem Gelände in der Ein-Medien-Photogrammetrie eine zonenweise Entzerrung, aber mit einer fingierten Aufnahmehöhe zum Ziel.

Die im 2. Abschnitt durchgeführte Untersuchung über den räumlichen Rückwärtschnitt ergab ein ähnliches Ergebnis wie für die entsprechende Aufgabe der Ein-Medien-Photogrammetrie. Die Aufgabe kann (theoretisch) gelöst werden, wenn 3 Paßpunkte vorliegen. Eine praktisch verwendbare Lösung folgt aber erst bei Kenntnis von Näherungen für die Orientierungsunbekannten. Die hierfür erforderlichen Differentialformeln wurden abgeleitet und dazu Formeln für die rechnerische Auswertung einer einzelnen Aufnahme angegeben.

Im 3. Abschnitt wurde die Orientierung von Stereopaaren behandelt. Nach der mathematischen Erhärtung des von Zaar festgestellten Kreuzens entsprechender Einfallstrahlenpaare wurde die rechnerische Orientierung untersucht. Es ergab sich, daß die Herstellung eines Modelles möglich ist, wenn in den Aufnahmen 8 Punktpaare identifiziert werden können. Die rechnerische Behandlung führt jedoch im allgemeinen Fall auf ein System von 8 transzendenten und irrationalen Gleichungen für die 8 Orientierungsunbekannten, dessen Auflösung, auch bei Vorliegen von Näherungswerten praktisch nicht in Frage kommt. Hingegen ergeben sich für die auch von anderen Gesichtspunkten zu fordernden Senkrechtaufnahmen handliche lineare Formelsysteme deren Auflösung ohne weiteres denkbar ist. Für die Bestimmung der Modellkoordinaten und die auf eine Drehstreckung zurückführbare Einpassung konnten einfache Formeln angegeben werden. Alle abgeleiteten Formeln gehen für  $n = 1$  in die entsprechenden der Ein-Medien-Photogrammetrie über. Nach Meinung des Verfassers kommt der rechnerischen Orientierung von Stereopaaren trotz des größeren Rechenaufwandes in der Zwei-Medien-Photogrammetrie eine größere Bedeutung zu als in der Ein-Medien-Photogrammetrie, doch wird auch hier für eine im größeren Umfang erfolgte praktische Anwendung nur die optische Lösung in Frage kommen. Für diese wurden daher in Anlehnung an den aus der Ein-Medien-Photogrammetrie bekannten Vorgang ein Näherungsverfahren angegeben.

Eine praktische Erprobung der abgeleiteten Formeln und vorgeschlagenen Verfahren war nicht möglich, da keine Versuchsaufnahmen zur Verfügung standen und Verf. derzeit auch keine Möglichkeit besitzt, solche anzufertigen.

Besonderen Dank möchte ich meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof.Dr.-Ing. Karl Z a a r sagen, der mir unter Hinweis auf die noch offenen Probleme vor der Veröffentlichung Einblick in sein Manuskript über die Zwei-Medien-Photogrammetrie gewährte und dadurch die Anregung zu dieser Arbeit gegeben hat.

#### ANGEZOGENE LITERATUR:

- [1] Zwei-Medien-Photogrammetrie  
von K. Z a a r
- [2] Untersuchungen über die optischen Verhältnisse im Meer,  
Mitteilungen des Chefs des hydrographischen Dienstes 1944,  
Heft 2 von H. und J. Wattenberg, Kiel
- [3] Beitrag zur Orientierungsaufgabe, Allg.Verm.Nachr. 1939,Nr. 23  
K. Rinner

G r a t k o r n , den 29. März 1946.



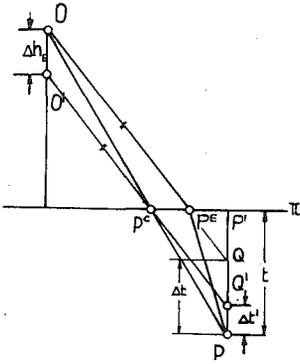


Abb. 7

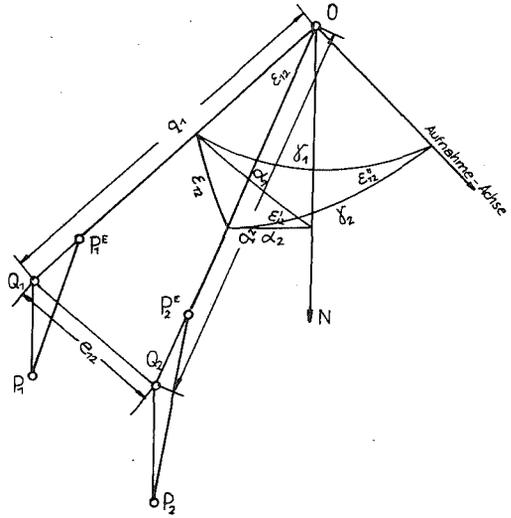


Abb. 8

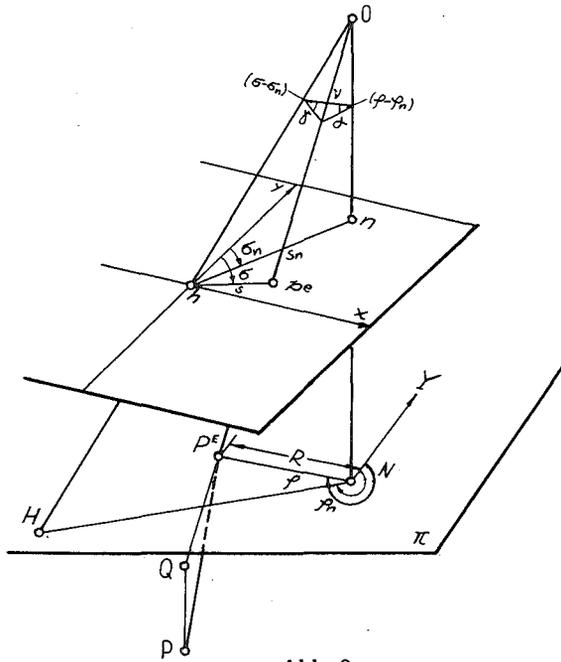


Abb. 9

