

Paper-ID: VGI\_195918



## Über Winkelreduktionen bei Absteckarbeiten

Wilhelm Embacher <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Technische Hochschule Wien, IV, Karlsplatz 13*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **47** (5–6), S. 141–147

1959

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Embacher_VGI_195918,  
  Title =  {\U}ber Winkelreduktionen bei Absteckarbeiten},  
  Author = {Embacher, Wilhelm},  
  Journal =  {\O}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages =  {141--147},  
  Number =  {5--6},  
  Year =  {1959},  
  Volume =  {47}  
}
```



Daraus folgt  $\varphi_2 = 59^\circ 59' 59'' 999424$  und  $\varphi_m = 50^\circ$ ,

$$\alpha_m = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) = 33^\circ 12' 03'', 719524.$$

Mit den letzteren Werten ergibt sich nach (27)

$$- 0, 000 0776 390 (s^2)$$

$$- 0, 000 0030 570 (s^4)$$

$$- 0, 000 0000 825 (s^6)$$

---


$$k_l - k_s = - 0, 000 0807 785$$

und daraus  $k_l = k_s + (k_l - k_s) = 1, 001 2960 531$ .

Man erhält aus  $l = \lambda \frac{1}{k_l}$  den Wert  $l = 19^\circ 59' 59'', 999352$ , der mit dem im vorhinein bekannten Sollwert von  $20^\circ$  bis auf den linearen Betrag von rund 0,015 m übereinstimmt; eine ähnliche Übereinstimmung zeigt die errechnete geographische Breite  $\varphi_2$  mit ihrem Sollwert. Dieses Ergebnis wird man, da die Formel (17) mit  $s \doteq 2600$  km etwas über ihre Leistungsfähigkeit hinaus beansprucht ist, als durchaus befriedigend bezeichnen dürfen.

## Über Winkelreduktionen bei Absteckarbeiten

Von *W. Embacher*

Die Übertragung ingenieurtechnischer Entwürfe ins Gelände bezeichnet man als Absteckungsarbeit.

Es soll der Versuch unternommen werden, sämtliche Winkelreduktionen anzuführen, welche an den gerechneten und gezeichneten Entwurf angebracht werden müssen, um ihn sinngemäß auf die physische Erdoberfläche übertragen zu können. Diejenigen Verbesserungen, die infolge der Konvergenz der Lotlinien, wegen des Azimutunterschiedes Geodätische Linie-Vertikalschnitt und wegen der Refraktion anzubringen sind, seien nur der Vollständigkeit halber angeführt. Es soll hauptsächlich gezeigt werden, wie stark sich die Tatsache, daß die Lotrichtungen zueinander windschief sind, in verhältnismäßig kleinen Vermessungsbereichen, z. B. bei Tunnel- und Stollenabsteckungen, auswirken kann.

Die Richtung der Lotlinien weicht zunächst wegen der großen kontinentalen Geoidwellen von den Flächennormalen eines Rotationsellipsoides, als welches das Referenzellipsoid der Landesvermessung dient, ab; sie ist aber auch lokal bedingt, wenn durch eine Ansammlung oder durch ein Fehlen von Massen lokale Unstetigkeiten in der Dichte der Erdkruste entstehen. Eine beliebige Ebene durch eine Ellipsoidnormale nennen wir Normalebene und ihr Schnitt mit dem Ellipsoid heißt Normal- oder Vertikalschnitt. Da sich die Flächennormalen des Rotationsellipsoides im allgemeinen nicht schneiden, ist die Verbindung zweier Punkte  $P_1$  und  $P_2$  des Ellipsoides durch die beiden Normalschnitte nicht eindeutig festgelegt, denn die Ebene durch die Normale in  $P_1$  und durch  $P_2$  ist im allgemeinen nicht ident mit der Ebene durch die Normale in  $P_2$  und durch  $P_1$ . Man definiert daher andere Kurven, die innerhalb eines bestimmten Bereiches durch zwei ihrer Punkte eindeutig bestimmt sind: die

geodätischen Linien. Die geodätische Linie ist dadurch festgelegt, daß ihre Hauptnormalen mit den Flächennormalen zusammenfallen oder in allen Punkten die Flächennormale in der Schmiegungeebene der Kurve liegt. Die mathematische Erdfigur, das Geoid, hat eine wesentlich kompliziertere Form als die allgemein verwendete Näherung, das Rotationsellipsoid. Die Niveauflächen sind keine Parallelflächen, somit weisen auch die Lotlinien, ihre orthogonalen Trajektorien, schwache Krümmungen auf. Wir nennen das Ellipsoid, welches an Stelle der mathematischen Erdoberfläche als Projektionsfläche dient, das Bezugs- oder Referenzellipsoid. Den Winkel zwischen der Ellipsoidnormalen und der tatsächlichen Lotrichtung, der Tangente an die Lotlinie im Beobachtungspunkt, nennt man die relative Lotabweichung. Diese wird sich dort rascher ändern, wo Massenstörungen vorliegen. Die Auswirkung dieser relativen Lotabweichungen, die mehrere Bogensekunden erreichen können, auf das Abstecken von Geraden von einigen Kilometern Länge und auf die trigonometrische Höhenmessung, wird im folgenden untersucht, und zwar:

a) **Horizontalwinkelreduktionen:**

1. wegen der windschiefen Lage der Ellipsoidnormalen, weil der Zielpunkt eine Höhe über dem Referenzellipsoid aufweist;
2. wegen Lotabweichung, weil der Theodolit in der Lotrichtung und nicht in der Ellipsoidnormalen steht;
3. wegen des Azimutunterschiedes zwischen Vertikalschnitt und geodätischer Linie;
4. wegen Lotlinienkrümmung;
5. wegen Seitenrefraktion.

b) **Höhenwinkelreduktionen:**

1. wegen Refraktion;
2. wegen Lotabweichung.

Für kleine Vermessungsbereiche kann die Lotlinie geradlinig angenommen und ihrer Tangente im Beobachtungspunkt gleichgesetzt werden.

Da der Punkt  $H$  eine bestimmte Höhe über der Bezugsfläche hat, muß die beobachtete Richtung  $B - H$  wegen der Höhe des angezielten Punktes über dem Referenzellipsoid reduziert werden. In der Praxis wird diese Höhe genähert durch die Meereshöhe des Zielpunktes ersetzt, weil die Höhe des Geoides über dem Referenzellipsoid unbekannt ist.

Wenn wir von  $B$  nach  $H$  zielen (Fig. 2), messen wir das Azimut des Normalschnittes  $BK_bH$ . Dieses Azimut ist verschieden von dem des Normalschnittes  $BK_bA$  und muß auf diesen reduziert werden. Dabei ist die Höhe des Punktes  $B$  belanglos, denn jeder Normalschnitt durch  $B$  geht durch die Normale  $BK_b$ . Das Hauptglied bei dieser Reduktion ist unabhängig von der Entfernung der beiden Punkte  $BH$ . Es lautet nach Helmert

$$\delta'' = \frac{h e^2 2 \rho''}{2a} \sin 2 A \cos^2 \varphi$$

und genügt für kurze Entfernungen. In dieser Formel bedeutet  $h$  die Höhe von  $H_1$  über dem Bezugshorizont,  $a$  den großen Erdhalbmesser und  $A$  das Azimut des

Normalschnittes. Die untenstehende Aufstellung zeigt die maximalen Querver-schwenkungen für eine Seite von 1 km in mittleren Breiten, wenn der Punkt, an welchem richtungsmäßig angeschlossen wird,  $h$  Meter über dem Bezugshorizont liegt.

$h_m$	400	600	800	1000
Querver-schwenkungen m/m	0,2	0,3	0,4	0,5

Die Reduktion einer Richtung wegen der Höhe des angezielten Punktes kann sehr anschaulich aus dem kürzesten Abstand zweier windschiefer Geraden abgeleitet werden.

Zunächst wird die allgemeine vektorielle Lösung zur Berechnung des kürzesten Abstandes angeführt:

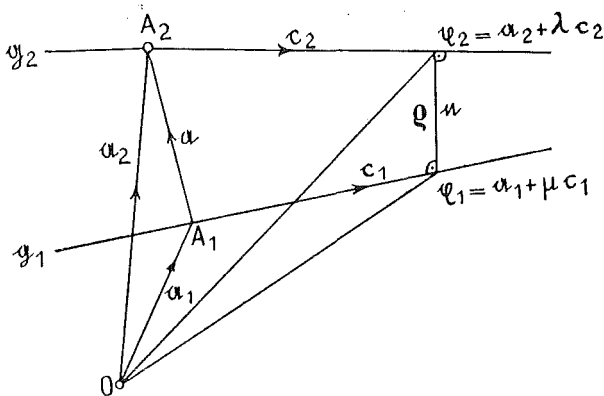


Fig. 1

Die kürzeste Verbindungsgerade

$$\xi_2 - \xi_1 = \rho n$$

muß auf den Richtungen  $c_1$  und  $c_2$ , den Einheitsvektoren von  $g_1$  und  $g_2$  senkrecht stehen.  $n$  ist der Einheitsvektor in dieser kürzesten Verbindung. Das heißt

$$n = c_1 \times c_2; |n| = |c_1| |c_2| \sin \sigma$$

und

$$(c_1 c_2) = \cos \sigma,$$

wenn  $\sigma$  der Winkel zwischen  $c_1$  und  $c_2$  ist. Aus der Figur kann man ablesen

$$\alpha + \lambda c_2 + \rho n - \mu c_1 = 0.$$

Wird diese Vektorgleichung mit  $n$  skalar multipliziert, erhält man

$$\alpha n + \lambda n c_2 + \rho n^2 - \mu n c_1 = 0$$

Die Produkte  $\lambda n c_2$  und  $\mu n c_1$  müssen Null sein, als Bedingung für das Senkrechtstehen von  $n$  auf  $c_1$  und auf  $c_2$ . Es ist also

$$\alpha n + \rho n^2 = 0.$$

Da aber

$$n^2 = \sin^2 \sigma$$

erhält man für

$$\rho = -\frac{\alpha \Pi}{\sin^2 \sigma} = \frac{|\alpha_1 c_1 c_2|}{\sin^2 \sigma}$$

$|\alpha, c_1, c_2|$  ist das skalare Tripelprodukt der Vektoren  $\alpha$ ,  $c_1$  und  $c_2$ .  
Der kürzeste Abstand  $d$  der beiden Geraden ist somit

$$d = |\rho \Pi| = \left| \frac{|\alpha c_1, c_2|}{\sin^2 \sigma} \right| \sin \sigma = \frac{|\alpha c_1, c_2|}{\sin \sigma}$$

Die Bestimmung von  $\lambda$  und  $\mu$  und damit der Ortsvektoren der Fußpunkte der kürzesten Verbindungsgeraden erübrigt sich aus später folgenden Überlegungen. Die Ellipsoidnormale in  $A$  mit den Koordinaten  $\left( \frac{\cos \varphi_1}{W_1}, 0, \frac{(1-e^2) \sin \varphi_1}{W_1} \right)$  geht durch den Achspunkt  $K_a$  mit den Koordinaten  $\left( 0, 0, -e^2 \frac{\sin \varphi_1}{W_1} \right)$ .

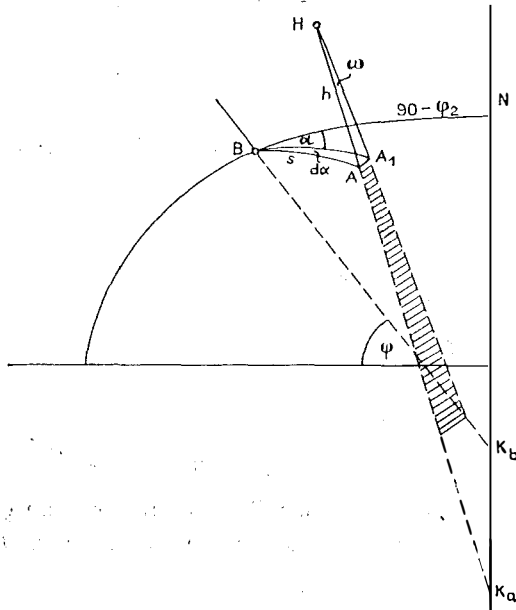


Fig. 2

Die Normale in  $B$  mit den Koordinaten

$$\left( \frac{\cos \varphi_2 \cos \lambda}{W_2}, \frac{\cos \varphi_2 \sin \lambda}{W_2}, \frac{-e^2 \sin \varphi_2}{W_2} \right),$$

welche die Achse in  $K_b$  mit den Koordinaten

$$\left( 0, 0, \frac{-e^2 \sin \varphi_2}{W_2} \right)$$

schneidet und die Normale durch  $A$  sind im Allgemeinen zueinander windschief. Das Dreieck, welches aus den beiden Fußpunkten der kürzesten Verbindung der beiden windschiefen Geraden und der Spitze  $H$  gebildet wird, schneidet das Rotationsellipsoid in  $AA_1$ ; das ist aber die lineare Verschwenkung des Normalschnittes von  $B$  nach  $H$  wegen der Höhe  $h$ .

Da

$$dW = -\frac{e^2 \sin 2\varphi}{2W} d\varphi$$

ist, d. h. daß sich  $W$  um kleine Größen 3. Ordnung ändert, wenn sich  $\varphi$  um eine Größe erster Ordnung ändert, kann in den Koordinaten für  $W_1$  und  $W_2$  ein mittleres  $W$  gesetzt werden.

Anschließend an die vorangegangene allgemeine Lösung erhält man die Ortsvektoren je zweier Punkte der windschiefen Geraden:

$$\alpha_1 = \frac{-e^2 \sin \varphi_1}{W} \mathfrak{f}$$

und

$$\alpha_2 = \frac{-e^2 \sin \varphi_2}{W} \mathfrak{f}$$

damit ist die Differenz dieser beiden Ortsvektoren

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha = -\frac{e^2}{W} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) \mathfrak{f}$$

Die weiteren Ortsvektoren sind

$$\mathfrak{b}_1 = \frac{\cos \varphi_1}{W} \mathfrak{i} + \frac{(1-e^2) \sin \varphi_1}{W} \mathfrak{f}$$

und

$$\mathfrak{b}_2 = \frac{\cos \varphi_2 \cos \lambda}{W} \mathfrak{i} + \frac{\cos \varphi_2 \sin \lambda}{W} \mathfrak{j} + \frac{(1-e^2) \sin \varphi_2}{W} \mathfrak{f}$$

Um die Einheitsvektoren  $c_1$  und  $c_2$  zu erhalten, bilden wir zunächst

$$\mathfrak{b}_1 - \alpha_1 = \frac{\cos \varphi_1}{W} \mathfrak{i} + \frac{\sin \varphi_1}{W} \mathfrak{f}$$

und

$$\mathfrak{b}_2 - \alpha_2 = \frac{\cos \varphi_2 \cos \lambda}{W} \mathfrak{i} + \frac{\cos \varphi_2 \sin \lambda}{W} \mathfrak{j} + \frac{\sin \varphi_2}{W} \mathfrak{f}$$

Ihre Absolutwerte ergeben sich durch Quadrieren und Wurzelziehen. Sie lauten:

$$|\mathfrak{b}_1 - \alpha_1| = |\mathfrak{b}_2 - \alpha_2| = \frac{1}{W};$$

beide sind gleich groß, und zwar gleich der Länge des Querkrümmungsradius. Somit erhält man für

$$c_1 = \cos \varphi_1 \mathfrak{i} + \sin \varphi_1 \mathfrak{f}$$

und

$$c_2 = \cos \varphi_2 \cos \lambda \mathfrak{i} + \cos \varphi_2 \sin \lambda \mathfrak{j} + \sin \varphi_2 \mathfrak{f}$$

Das skalare Tripelprodukt  $|\alpha, c_1, c_2|$  erhält man durch Auflösen der Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{e^2}{W} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) \\ \cos \varphi_1 & 0 & \sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_2 \cos \lambda & \sin \lambda \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \end{vmatrix} =$$

$$= |\alpha, c_1, c_2| = \frac{e^2}{W} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \lambda$$

Den Winkel  $\sigma$  erhält man aus dem inneren Produkt von  $c_1$  und  $c_2$

$$\cos \sigma = (c_1, c_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \lambda + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2.$$

Mit sehr großer Näherung kann  $ABN$  als Dreikant aufgefaßt und  $\sigma$  der Seite  $S$  gleichgesetzt werden; dann ist

$$\sin \sigma = \frac{S}{R},$$

wenn  $R$  den mittleren Krümmungsradius darstellt. Der Abstand der beiden windschiefen Geraden ist

$$d = \frac{e^2 a}{W} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \frac{R}{S}.$$

Er ist dann Null, wenn das skalare Tripelprodukt Null ist, d. h. wenn die 3 Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $c_1$  und  $c_2$  komplanar sind; dies ist der Fall, wenn  $\varphi_1 = \varphi_2$ , also wenn  $A$  und  $B$  auf demselben Parallelkreis liegen, oder wenn  $\Delta\lambda = 0$ , d. h. wenn sich  $A$  und  $B$  auf dem gleichen Meridian befinden.

Aus Figur 2 sieht man, daß die  $z$ -Weite der Fußpunkte der kürzesten Verbindungsgeraden zwischen den Grenzen  $z_{Ka}$  und  $z_{Kb}$  liegen müssen. Man kann also mit großer Näherung für die Entfernung des Punktes  $A$  zum entsprechenden Fußpunkt den mittleren Krümmungshalbmesser  $R$  setzen und erhält für die Linearverschwenkung

$$AA_1 = \frac{e^2 a}{W} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \Delta\lambda \cdot \frac{h}{S}; \text{ da } AA_1 : d = h : (R + h) \text{ und}$$

$$AA_1 = \frac{d \cdot h}{R};$$

und schließlich für den Korrektionswinkel in  $B$

$$d'' = \rho'' \frac{e^2 a \Delta\lambda h}{W S^2} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2.$$

Setzt man, da  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  fast gleich groß sind, für

$$\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 = 2 \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \cos \varphi \cdot \Delta\varphi,$$

für

$$\Delta\varphi = \frac{S \cos A}{M}$$

und für

$$\cos \varphi \Delta\lambda = \frac{S \sin A}{N},$$

so erhält man aus obiger Gleichung das Hauptglied der bekannten Reduktionsformel

$$\tilde{z}'' = \rho'' \frac{h \cdot e^2}{2 a} \sin 2A \cos^2 \varphi;$$

Mit Hilfe der Fig. 2 kann auch die Formel von Vening-Meinez, welche den Einfluß der relativen Lotabweichung auf eine Richtung wegen der Höhe des angezielten Punktes angibt, abgeleitet werden. Man kann ablesen

$$d\alpha = \frac{h}{S} \omega.$$

Nimmt man der Einfachheit halber in  $B$  die Lotabweichung mit Null an, so hat der astronomische Nadierpunkt in  $A$  den Abstand  $\vartheta$ , und das Azimut  $A + 180^\circ$  und seine Projektion auf die ellipsoidische Meridianebene des Azimutes ( $90 + \alpha$ ) ist dann

$$\begin{aligned}\vartheta \cos (180 + A - 90 - \alpha) &= \\ \vartheta \sin (\alpha - A) &= \zeta \sin \alpha - \eta \cos \alpha.\end{aligned}$$

Das ist aber der oben angeführte Winkel  $\omega$ . Die Reduktionsformel lautet also:

$$d\alpha = \frac{h}{S} \left[ (\zeta_2 - \zeta_1) \sin \alpha_{12} - (\eta_2 - \eta_1) \cos \alpha_{12} \right]$$

Auf dieselben Koeffizienten kommt man durch Differentiation der Formel

$$\vartheta'' = \rho'' \frac{e^2 a \Delta \lambda h}{W s^2} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2$$

Die nächste Aufstellung zeigt den maximalen Einfluß der Lotabweichung auf die Richtung wegen der Höhe des angezielten Punktes bei einer Lotabweichungsdifferenz von  $1''$ .

Höhe in m	400	600	800	1000
Verschwenkung in mm	2	3	4	5

Man sieht daraus, daß dieser Einfluß den ellipsoidischen wesentlich übersteigt und daß die Größe der Querverschwenkung, in Länge ausgedrückt, unabhängig von der Seitenlänge ist.

Die relative Lotabweichung im Instrumentenstandpunkt und ihre Auswirkung auf die Zenitdistanz können wie ein Stehachsenfehler untersucht werden. Wir haben festgelegt, daß auf die Richtung nur die Komponente  $(\zeta_2 - \zeta_1) \sin \alpha_{12} - (\eta_2 - \eta_1) \cos \alpha_{12}$  und analog auf die Zenitdistanz die dazu senkrechte Komponente  $(\zeta_2 - \zeta_1) \cos \alpha_{12} - (\eta_2 - \eta_1) \sin \alpha_{12}$  Einfluß hat.

Die nächste Aufstellung zeigt, wie sich eine relative Lotabweichung von  $1''$  bis  $3''$  bei einer horizontalen Entfernung von 1 km auf die Zenitdistanz und damit auf den Höhenunterschied maximal auswirkt.

rel. Lotabweichung	$1''$	$2''$	$3''$
Einfluß auf den Höhenunterschied bei			
horizont. Visur .....	5 mm	10 mm	15 mm
bei $45^\circ$ Steilvisur .....	10 mm	20 mm	30 mm

Es wurde gezeigt, daß die relativen Lotabweichungen schon im kleinen Bereich Verschwenkungen ergeben können, die durchaus berücksichtigt werden müssen.

Die Lotabweichungen können rechnerisch erfaßt werden, sie ergeben sich auch aus Gravimetermessungen und Drehwaagenmessungen.

In erster Linie erhält man die relative Lotabweichung rein astronomisch-geodätisch durch Vergleich der astronomisch bestimmten Größen mit den entsprechenden aus der Triangulierung errechneten Werten auf dem Referenzellipsoid. Diese relativen Lotabweichungen sind geometrische Größen, die nicht physikalisch gedeutet werden dürfen.

#### Literatur:

*W. Embacher:* Über den Einfluß der Lotrichtung auf genaue Absteckungsarbeiten. Abhandlungen des Dokumentationszentrums für Technik und Wirtschaft, Heft 21, Wien, 1954.