

Paper-ID: VGI\_195808



## Über eine allgemeine Äquivalenztheorie bei der trigonometrischen Einzelpunkteinschaltung

Ludwig Starkl <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Wels*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **46** (3), S. 75–85

1958

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Starkl_VGI_195808,  
Title = {{\U}ber eine allgemeine {\A}quivalenztheorie bei der  
trigonometrischen Einzelpunkteinschaltung},  
Author = {Starkl, Ludwig},  
Journal = {{\O}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {75--85},  
Number = {3},  
Year = {1958},  
Volume = {46}  
}
```



Zur Berechnung der Einstelldaten erhält man mit den vorstehenden Ergebnissen unmittelbar aus

$$\begin{array}{ll}
 (9) & \alpha' = - 30^{\circ} 52' 37'' & \alpha = - 290^{\circ} 43' 59'' \\
 (15) & p' = + 109 \cdot 154 \text{ cm} & p = - 192 \cdot 880 \\
 (14), (16) & \Delta' = - 2 \cdot 249 \text{ cm} & \Delta = - 3 \cdot 125 \text{ cm} \\
 (14), (18) & a' = - 138 \cdot 425 \text{ cm} & a = + 150 \cdot 794 \text{ cm}
 \end{array}$$

Für das zur Verfügung stehende Objektiv, dessen Brennweite nicht größer als 138 cm sein darf, geben dann die einfachen Formeln (23) bis (26) die zur präzisen Entzerrung erforderlichen Größen.

#### L i t e r a t u r:

- [1] W. Wunderlich: „Zur rechnerischen Durchführung des Vierpunktverfahrens“, Ö. Z. f.V. 1957, Nr. 1.  
 [2] E. Müller und E. Kruppa: Lehrbuch der darstellenden Geometrie.  
 [3] K. Killian: „Beitrag zur numerischen und graphischen Auswertung von Luftbildern“, Ö. Z. f.V. 1957, Nr. 4.

## Über eine allgemeine Äquivalenztheorie bei der trigonometrischen Einzelpunkteinschaltung

Von L. Starkl, Wels

Im XLV. Jahrgang (1957), Nr. 2, 3 und 4 dieser Zeitschrift wurde vom Verfasser „über vektographische vermittelnde Koordinatenausgleichung bei der Einzelpunkteinschaltung in gezwängte Triangulationsnetze“ berichtet. Die vorliegende Arbeit, insbesondere die laufende Formelbezeichnung, nimmt Bezug auf die dort mitgeteilten Entwicklungen.

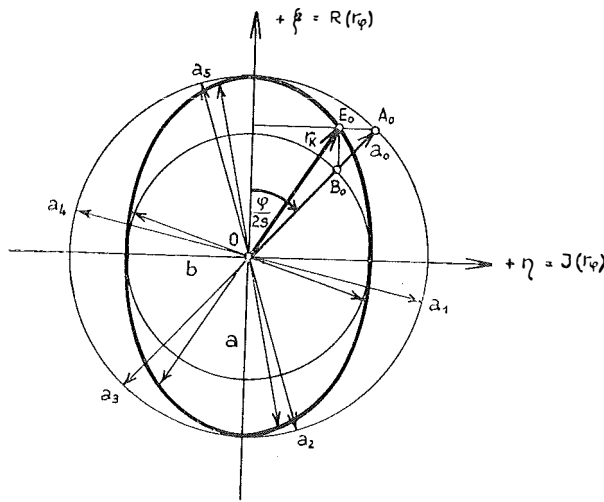
Man bezeichnet zwei verschiedene Beobachtungsreihen als „gleichwertig“, wenn sie für die Unbekannten und beliebige Funktionen der Unbekannten die gleichen Werte und Gewichte liefern. Kann eine Beobachtungsreihe mit  $n$  Unbekannten durch eine „gleichwertige“ Beobachtungsreihe von gerade  $n$  notwendigen Beobachtungen ersetzt werden, so besteht zwischen den beiden Beobachtungsreihen „totale Äquivalenz“. Besteht die „gleichwertige“ Beobachtungsreihe hingegen aus allgemein  $s$  fingierten Beobachtungen, so besteht zwischen den beiden Beobachtungsreihen „partielle Äquivalenz“. Bei der triangulatorischen Bestimmung eines Neupunktes ist es praktisch unwesentlich, daß eine „gleichwertige“ Beobachtungsreihe die gleichen Werte für die Unbekannten, d. h. für die Koordinatenverschiebungen  $dx$  und  $dy$  ergibt. Von bedeutend größerem Interesse ist die Untersuchung „gleichwertiger“ Beobachtungsreihen in bezug auf Form und Lage der mittleren Fehlerellipse.

Im allgemeinen kann ein Neupunkt  $P_0$  durch mehrfach unendlich viele Kombinationen von Vorwärts- und Rückwärtsrichtungen mit der gleichen Genauigkeit bestimmt werden, wie das durch die zu der Ausgleichung führende Bestimmung geschehen ist.

Form und Lage der mittleren Fehlerellipse sind lediglich durch das der Punktbestimmung zugrunde gelegte Festpunktsystem und durch die Wahl des Neupunktes

in diesem bedingt. Die absoluten Dimensionen der Fehlerellipse hingegen sind direkt proportional dem mittleren Richtungsfehler  $m$  einer Einzelbeobachtung. Von diesem Maßstabsfaktor  $m$  soll vorderhand abgesehen werden. In konstruktiver Hinsicht sind Form und Lage der mittleren Fehlerellipse eines Neupunktes  $P_0$  allein von der Länge  $L$  des Vektorpolygones  $[r_{2,v}^2]$  und der Lage seines Endpunktes  $E$  abhängig. Die Mannigfaltigkeit der Vektorzüge  $[r_{2,v}^2]$  mit dem gleichen Endpunkt  $E$  und der gleichen Länge  $L$  kann daher mit der Mannigfaltigkeit „gleichwertiger“ Beobachtungsreihen bezüglich der mittleren Fehlerellipse identifiziert werden.

Welche Beziehungen müssen nun im allgemeinsten Fall zwischen den Vektoren  $r_{2,v}^2$  bzw. zwischen den Vektoren  $r_v$  bestehen, damit die ersteren obige Längen- und Endpunktsbedingung in ihrer Gesamtheit erfüllen?



Wir wollen die Hauptachsen der mittleren Fehlerellipse als Koordinatenachsen auffassen, und zwar derart, daß die  $+ \xi$ -achse in die Richtung  $\vartheta$  der großen Halbachse fallen soll. Nehmen wir an, in diesem Koordinatensystem liege eine beliebige Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$ , und es sei  $a > b$ . Um den Mittelpunkt  $O$  der Ellipse schlagen wir die beiden Scheitelkreise. Faßt man die Ellipse als affine Figur des großen bzw. kleinen Scheitelkreises auf, so entspricht dem Ellipsenpunkt  $E_0$  der Kreispunkt  $A_0$  bzw.  $B_0$ .

$\overline{OA_0}$  schließe mit der  $+ \xi$ -achse den Winkel  $\frac{\varphi}{2s}$  ein, wobei  $\varphi$  ein beliebiger Winkelwert ist und  $s$  die Anzahl der fingierten Beobachtungen darstellt. Man teilt nun von  $A_0$  ausgehend den großen Scheitelkreis in  $2s$  gleiche Teile. Die derart erhaltenen Vektoren  $a_k$  sind dann gegeben durch

$$a_k = a \left( \cos \frac{2k\pi + \varphi}{2s} + i \cdot \sin \frac{2k\pi + \varphi}{2s} \right) \dots (55)$$

wo  $k$  die Werte  $0, 1, 2, \dots (2s-1)$  durchläuft.

Die Gleichung (55) stellt die mit  $a$  multiplizierte Moivre'sche Formel (11) mit  $\nu = \varphi, m = 1, n = 2s$  dar.

Die Vektoren  $\overrightarrow{OE}$  zu den Ellipsenpunkten  $E$ , welche den Kreispunkten  $A$  entsprechen, sollen mit  $r_k$  bezeichnet werden. Mit der bekannten Parameterdarstellung für die Ellipse wird

$$r_k = a \cdot \cos \frac{2k\pi + \varphi}{2s} + i \cdot b \cdot \sin \frac{2k\pi + \varphi}{2s} \dots (56)$$

Das Quadrat dieses Vektors  $r_k$  wird erhalten zu

$$r_k^2 = a^2 \cdot \cos^2 \frac{2k\pi + \varphi}{2s} - b^2 \cdot \sin^2 \frac{2k\pi + \varphi}{2s} + i \cdot ab \cdot \sin \frac{2k\pi + \varphi}{s}$$

Mit Einführung der Beziehung (14) erhält man

$$r_k^2 = \frac{1}{2} (a^2 - b^2) + \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \cos \frac{2k\pi + \varphi}{s} + i \cdot ab \cdot \sin \frac{2k\pi + \varphi}{s} \quad \dots \quad (57)$$

Die Addition dieser  $2s$  Vektoren  $r_k^2$  ergibt

$$\left[ r_k^2 \right] = \left[ \frac{1}{2} \right] (a^2 - b^2) + \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \left[ \cos \frac{2k\pi + \varphi}{s} \right] + i \cdot ab \left[ \sin \frac{2k\pi + \varphi}{s} \right]$$

Nun ist bekanntlich für die reguläre Kreisteilung

$$\left[ \cos \frac{2k\pi + \varphi}{s} \right] = \left[ \sin \frac{2k\pi + \varphi}{s} \right] = 0 \quad \dots \quad (58)$$

$$\text{Weiters ist } \left[ \frac{1}{2} \right]_1^{2s} = \frac{2s}{2} = s, \text{ somit } \left[ r_k^2 \right] = s \cdot (a^2 - b^2) \quad \dots \quad (59)$$

Mit dieser Beziehung ist der Endpunkt  $E$  des Vektorpolygones  $[r_k^2]$  im  $\xi, \eta$ -System festgelegt. Zur Ermittlung der Länge dieses Vektorpolygones bestimmen wir zuerst den absoluten Betrag von  $r_k$  nach (56). Dieser beträgt

$$|r_k| = \sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \frac{2k\pi + \varphi}{2s} + b^2 \cdot \sin^2 \frac{2k\pi + \varphi}{2s}}$$

Das Quadrat dieses Betrages ist

$$|r_k|^2 = |r_k^2| = a^2 \cdot \cos^2 \frac{2k\pi + \varphi}{2s} + b^2 \cdot \sin^2 \frac{2k\pi + \varphi}{2s}$$

Mit der gleichen Umformung wie vorher resultiert

$$|r_k^2| = \frac{1}{2} (a^2 + b^2) + \frac{1}{2} (a^2 - b^2) \cos \frac{2k\pi + \varphi}{s} \quad \dots \quad (60)$$

Die Summe dieser  $2s$  absoluten Beträge wird

$$\left[ |r_k^2| \right] = \left[ \frac{1}{2} \right] (a^2 + b^2) + \frac{1}{2} (a^2 - b^2) \left[ \cos \frac{2k\pi + \varphi}{s} \right]$$

$$\text{und wegen (58)} \quad \left[ |r_k^2| \right] = s \cdot (a^2 + b^2) \quad \dots \quad (61)$$

Mit dieser Beziehung ist die Länge des Vektorpolygones  $[r_k^2]$  festgelegt. Ein Vektor  $r_k$  habe die Richtung  $\nu$ . Dann existiert wegen der regulären Kreisteilung in  $2s$  Teile auch immer ein Vektor mit der Richtung  $\nu + \pi$ . Die beiden entsprechenden Vektoren  $r_k^2$  haben dann die Richtung  $2\nu$  bzw.  $2\nu + 2\pi$ , das heißt, sie fallen zusammen. Wir verwenden deshalb für die geometrische und arithmetische Summierung

nach (59) und (61) nur je einen der auf den  $s$  Durchmessern liegenden 2 Vektoren, wodurch (59) und (61) übergehen in

$$\begin{aligned} [r_k^2] &= \frac{s}{2} (a^2 - b^2) \\ |[r_k^2]| &= \frac{s}{2} (a^2 + b^2) \end{aligned} \quad \dots \quad (62)$$

Die zweite Formel (62) enthält für  $s = 2$  (Vorwärtsschnitt) die bekannte Beziehung der konjugierten Ellipsendurchmesser zur Summe der Halbachsenquadrate, nämlich den Satz von Apollonius

$$r_1^2 + r_2^2 = a^2 + b^2 = \text{konstant.}$$

Wählt man die Halbachsen  $a$  und  $b$  der Ellipse mit

$$a = \sqrt{\frac{L+W}{s}}, \quad b = \sqrt{\frac{L-W}{s}} \quad \dots \quad (63)$$

dann wird mit (62) und (63)

$$\begin{aligned} [r_k^2] &= \frac{s}{2} \left( \frac{L+W}{s} + \frac{L-W}{s} \right) = L \\ [r_k^2] &= \frac{s}{2} \left( \frac{L+W}{s} - \frac{L-W}{s} \right) = W \end{aligned} \quad \dots \quad (64)$$

Für die Deutung der zweiten Formel (64) im Landeskoordinatensystem  $(X, Y)$  ist zu beachten, daß die Richtungen der Vektoren  $r_k$  von der um den Winkel  $\vartheta$  gegen die  $+X$ -achse geneigte, mit der großen Fehlerellipsenhalbachse zusammenfallenden  $+ \xi$ -achse aus gezählt wurden. Ist die Richtung eines Vektors  $r_k$  im  $\xi, \eta$ -system gleich  $\nu$ , so ist die Richtung desselben Vektors im  $X, Y$ -system gleich  $\nu + \vartheta$ . Entsprechend ist die Richtung des Vektors  $r_k^2$  im  $\xi, \eta$ -system gleich  $2\nu$ , im  $X, Y$ -system gleich  $2\nu + 2\vartheta$ . Da der Vektor  $[r_k^2] = W$  im  $\xi, \eta$ -system auf der Realachse  $\xi = R(r_\varphi)$  liegt und demnach die Richtung  $2\nu = 0$  hat, so hat dieser Vektor bei Annahme der  $+X$ -achse als Nullrichtung für die Vektoren  $r_k$  im  $X, Y$ -system die Richtung  $2\vartheta$ . Damit ist nachgewiesen, daß alle auf die gezeigte Art ermittelten Vektormannigfaltigkeiten der eingangs gestellten Längen- und Endpunktsbedingung genügen und somit die Mannigfaltigkeit fingierter „gleichwertiger“ Beobachtungen bezüglich der mittleren Fehlerellipse darstellen. Ich nenne daher die Ellipsen, deren Hauptachsenrichtungen mit jenen der mittleren Fehlerellipse zusammenfallen und deren Form durch die Gleichungen (63) gegeben ist, Äquivalenzellipsen.

Die mittlere Fehlerellipse sowie die Äquivalenzellipsen werden aus der Ellipse konstanter Verbesserungsquadratsumme durch spezielle Wahl des Maßstabsfaktors  $\Delta[vv]$  in (35) erhalten.

Für die mittlere Fehlerellipse ist

$$\Delta[vv] = m^2$$

Für die Äquivalenzellipsen ist

$$\Delta[vv] = \frac{2}{s} L$$

oder mit (34) 
$$\Delta[\nu\nu] = \frac{1}{s} \cdot \frac{(L + W)(L - W)}{2} \quad \dots \quad (65)$$

womit durch Substitution in (35) wieder die Formeln (63) erhalten werden können. Aus (36) und (63) resultiert der Zusammenhang zwischen den Halbachsen von Fehler- und Äquivalenzellipse nach

$$a^2 = \frac{2}{s} \cdot \frac{m^2}{B^2} = \frac{2}{s} \cdot \overline{A_v F} \quad b^2 = \frac{2}{s} \cdot \frac{m^2}{A^2} = \frac{2}{s} \cdot \overline{A_v H} \quad \dots \quad (66)$$

Die verschiedene Wahl von  $\Delta[\nu\nu]$  bewirkt lediglich eine Vergrößerung bzw. Verkleinerung des Ellipsenbildes, was auch aus (66) mit  $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$  hervorgeht.

Für den einfachsten Fall des zu einer beliebigen komplizierteren Punktbestimmung äquivalenten einfachen Vorwärtseinschneidens ist  $s = 2$ . Der Kreis mit dem Radius  $a = \sqrt{(L + W)/2}$  ist demnach in  $2s = 4$  gleiche Teile zu unterteilen, wodurch zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser erhalten werden. Die affinen Bilder dieser senkrechten Kreisdurchmesser sind dann zwei konjugierte Ellipsendurchmesser. Zwei Festpunkte, von denen aus der Neupunkt mit der gleichen Genauigkeit eingeschnitten werden könnte, müssen daher auf konjugierten Durchmessern der Äquivalenzellipse bzw. der zu dieser ähnlichen mittleren Fehlerellipse liegen. Ihre Entfernungen vom Neupunkt sind durch die Beziehung

$$|r_k| = \frac{\rho''}{s} \quad \text{bzw.} \quad s = \frac{\rho''}{|r_k|} \quad \text{festgelegt.}$$

Für den einfachsten Fall des einfachen äquivalenten Rückwärtseinschneidens ist  $s = 3$ . Die Teilung des Kreises  $a = \sqrt{(L + W)/3}$  hat daher mit  $2s = 6$  zu erfolgen. Die Unterteilung mit  $2s = 6$  enthält natürlich auch den Fall dreier Vorwärtsrichtungen. Den Unterschied in der Behandlung der beiden Fälle bilden die aus (48) gewonnenen Bedingungen für das Rückwärtseinschneiden

$$[A] = 0 \quad \text{und} \quad [B] = 0,$$

oder vektoriell 
$$[r_k] = 0 \quad \dots \quad (67)$$

Da vorausgesetzt wurde, daß von den  $2s$  Vektoren  $r_k$  jeweils nur einer der auf den  $s$  Durchmessern liegenden zwei Vektoren verwendet werden kann, ist die Bedingung (67) eindeutig zu erfüllen. Die Vektoren  $r_k$  sind im Falle des Rückwärtseinschneidens so zu wählen, daß die zugehörigen Vektoren  $a_k$  ein reguläres  $n$ -eck aufspannen (z. B.  $a_0, a_2, a_4$ ). Dann ist bekanntlich  $[a_k] = 0$  und wegen der Affinität von  $r_k$  zu  $a_k$  auch  $[r_k] = 0$ .

Es darf nun nicht übersehen werden, daß die so ermittelten Vektoren  $r_k$  wegen (48) nur den reduzierten Richtungen  $\nu'$  und Seitenlängen  $s'$  entsprechen! Die Vektoren  $r_k$  sind demnach darzustellen mit

$$r_k = i \cdot A - B$$

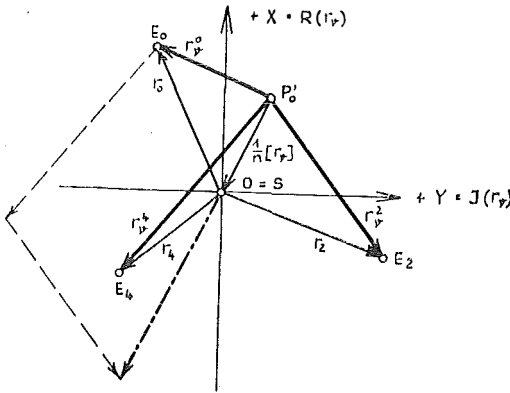
wobei  $A$  bzw.  $B$  reduzierte Gauß'sche Richtungskoeffizienten im Sinne der Gleichungen (48) bedeuten. Mit Einführung dieser Werte wird

$$r_k = (i \cdot a - b) - \frac{1}{n} (i \cdot [a] - [b])$$

und mit (3) und (4)

$$r_k = r_v - \frac{1}{n} [r_v] \quad . . . \quad (68)$$

Nehmen wir an, wir hätten eine beliebige mehrfache Punktbestimmung komplizierterer Art in der gezeigten Weise auf das einem einfachen Rückwärtseinschneiden



äquivalente dreifache Vorwärtseinschneiden zurückgeführt und drei Vektoren  $r_k$  gewählt mit  $[r_k] = 0$ . Dann ist  $O = S$  der Schwerpunkt der Punkte  $E$ . Ein Punkt  $P_0'$  werde nun in beliebiger Lage im Landeskoordinatensystem angenommen und von ihm aus Vektoren  $r_v$  zu den Punkten  $E$  gezeichnet. Bezüglich  $P_0'$  hat dann der Schwerpunkt  $S$  der Punkte  $E$  eine Lage, die durch den Vektor  $\frac{1}{n} [r_v]$  fixiert ist. Man erkennt nun leicht, daß die Vektoren  $r_v$

immer die Gleichung (68) erfüllen, wie auch der Punkt  $P_0'$  angenommen werden mag.

Die Aufgabe der Herstellung eines äquivalenten einfachen Rückwärtseinschneidens besitzt daher eine  $\infty^2$  parametrische Lösungsmannigfaltigkeit. Der erste Freiheitsgrad ist eine Drehung der Vektoren  $a_k$  in ihrer Gesamtheit, der zweite Freiheitsgrad ist die beliebige Annahme des Punktes  $P_0'$ .

Mit dieser allgemeinen Äquivalenztheorie läßt sich auch die Frage nach der besten Punktauswahl bei einer Neupunktsbestimmung erledigen. Prof. Eggert hat auf rein analytischem Wege in der Arbeit „Über die günstigsten Punktlagen beim Einschneiden“ diese Frage untersucht. Die Genauigkeit der Punktbestimmung erreicht, abgesehen von der absoluten Größe der Unsicherheit, jedenfalls dann ein relatives Optimum, wenn die Fehlerellipse Kreisform annimmt. Damit

$$A = B = R$$

wird, muß auf Grund der gegebenen Konstruktion für die Fehlerellipsenhalbachsen der Punkt  $A$  bzw.  $E$  mit  $P_0'$  zusammenfallen, das heißt, die vektorielle Summe des Polygons  $[r_v]$  muß gleich Null sein. Auf diese Bedingung brauchen wir jedoch überhaupt nicht einzugehen.

Wir nehmen im Sinne der vorstehenden Theorie einfach einen Fehlerkreis und den zugehörigen Äquivalenzkreis als gegeben an. Dann resultieren, wie vorher im allgemeinsten Fall, sofort die Punktlagen der Festpunkte für den Spezialfall. Man erkennt ohne weiteres, daß die in der Literatur (z. B. „Ausgleichsrechnung und Landesvermessung“, Vorlesung von Prof. Dr. C. F. Baeschlin, E. T. H. Zürich) gegebene Bedingung, daß die Festpunkte ein reguläres  $n$ -eck bilden müssen und der Neupunkt im Schwerpunkt desselben liegen müsse, nicht unbedingt zu erfüllt sein braucht. Mit dieser Bedingung ist speziell beim Rückwärtseinschneiden nur der erste Freiheitsgrad erfaßt, das heißt, die Bedingung entspricht nur der Er-

mittlung der Vektoren  $r_k$ . Auch für die äquivalenten Vorwärtseinschneiden ist mit einer gewählten Anzahl  $s$  von fingierten Beobachtungen ein schneller Überblick über die verschiedenen Möglichkeiten gewonnen, worauf deshalb nicht näher einzugehen ist.

Zur abschließenden Darstellung der Äquivalenztheorie soll noch eine interessante Transformation der Ellipsen konstanter Verbesserungsquadratsumme behandelt werden. Der Winkel eines Vektors  $r_k$  mit der  $+\xi$ -achse sei  $\alpha$ . Die Polargleichung einer Ellipse in bezug auf den Mittelpunkt als Pol ist

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \alpha} \quad . . . \quad (69)$$

wobei

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

Mit (35) wird 
$$\varepsilon^2 = \frac{2W}{L - W} \text{ und}$$

$$r^2 = \frac{2 \Delta [vw]}{L - W \cdot \cos 2\alpha} \quad . . . \quad (70)$$

Wenden wir auf (70) die Abbildung

$$w = z^2$$

an, welche die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen erfüllt und daher eine konforme Abbildung darstellt, dann ist

$$r^2 = \rho \quad \text{und} \quad 2\alpha = \psi \quad \text{zu setzen.}$$

Damit erhält man 
$$\rho = \frac{2 \Delta [vw]}{L - W \cdot \cos \psi} = \frac{2 \cdot \frac{\Delta [vw]}{L}}{1 - \frac{W}{L} \cdot \cos \psi} \quad . . . \quad (71)$$

Diese Gleichung stellt wieder eine Ellipsengleichung dar der allgemeinen Form

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon' \cdot \cos \psi} \quad \text{mit} \quad . . . \quad (72)$$

$$p = \frac{b'^2}{a'} \quad \varepsilon'^2 = \frac{a'^2 - b'^2}{a'^2}$$

Bekanntlich ist (72) die Polargleichung einer Ellipse mit dem Brennpunkt als Pol, wobei die vom Brennpunkt zu dem entfernteren Scheitel gehende Gerade als Polarachse gewählt ist.

Durch Vergleich von (71) und (72) folgt

$$\frac{b'^2}{a'} = 2 \frac{\Delta [vw]}{L}$$

$$\frac{a'^2 - b'^2}{a'^2} = \frac{W^2}{L^2}$$



Daraus werden  $a'$  und  $b'$  mit

$$a' = \frac{L}{2} \cdot \frac{\Delta[v]v}{D} \quad b' = \frac{\Delta[v]v}{\sqrt{D}} \quad \dots \quad (73)$$

erhalten. Mit (35) folgt aus (73)

$$a' = \frac{A^2 + B^2}{2} = \frac{M^2}{2} \quad b' = A \cdot B$$

Die große Achse  $2a'$  dieser Ellipse ergibt den mittleren totalen Punktlagefehler  $M$ , welcher in der Triangulation als konventionelles Kriterium für die Genauigkeit einer Punktbestimmung allgemein Verwendung findet. Dieses Kriterium ist bekanntlich keineswegs zwingend. Vom Standpunkt der Punktwahrscheinlichkeit aus würde sich als Genauigkeitskriterium eher die kleine Halbachse  $b'$  dieser Ellipse anbieten, welche der Fläche der mittleren Fehlerellipse proportional ist.

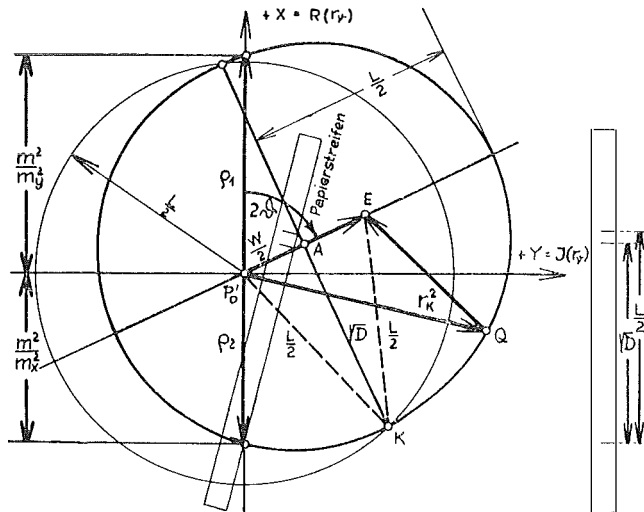
Mit dem für die Äquivalenzellipsen maßgebenden Wert (65)

$$\Delta[v]v = \frac{2}{s} \cdot D$$

resultiert aus (73) 
$$a' = \frac{L}{s} \quad b' = \frac{2}{s} \cdot \sqrt{D} \quad \dots \quad (74)$$

Diese Ellipse ist im Zusammenhang mit der eingangs dieser Arbeit zitierten vektographischen Ausgleichung denkbar einfach zu erhalten. Wir wollen die Konstruktion für  $s = 2$ , somit für

$$a' = \frac{L}{2} \quad b' = \sqrt{D} \quad \text{durchführen.}$$



Da aus der Ausgleichung nach (39)  $\overline{AK} = \sqrt{D}$  und der Kreisradius mit  $\frac{L}{2}$  bekannt vorliegen, trägt man einfach von  $A$  aus beiderseits die Strecke  $\frac{L}{2}$  ab, womit die Ellipsenhalbachsen (74) absolut und der Lage nach gewonnen sind. Da bei einer

Ellipse die Summe der Brennstrahlen nach einem Punkt derselben gleich ist der großen Achse und in vorliegendem Fall diese gleich  $L$  gewählt wurde, sowie

$$\overline{P'_0K} + \overline{KE} = L$$

so sind  $P'_0$  und  $E$  die Brennpunkte dieser Ellipse. Nimmt man auf ihr einen beliebigen Punkt  $Q$  an und zeichnet den Vektorzug

$$\overrightarrow{P'_0Q} + \overrightarrow{QE},$$

so ist dessen Länge ebenfalls  $L$  und sein Endpunkt der Punkt  $E$ , womit die geometrische Interpretation für die Erfüllung der Längen und Endpunktsbedingung bei 2 Vektoren  $r_k^2$  gegeben ist.

Diese Ellipse ist noch in anderer Hinsicht bemerkenswert. Nach (71) und mit  $\triangle[\nu\nu] = D$  bei  $s = 2$  ist

$$\rho = \frac{D}{\frac{1}{2}(L - W \cdot \cos \psi)} \quad . . . \quad (75)$$

Setzt man für  $\cos \psi$

$$\cos \psi_1 = \cos (\pi - 2 \vartheta) = \cos 2 \vartheta$$

$$\cos \psi_2 = \cos (\pi - 2 \vartheta) = -\cos 2 \vartheta$$

erhält man für

$$\rho_1 = \frac{D}{\frac{1}{2}(L - W \cdot \cos 2 \vartheta)}$$

$$\rho_2 = \frac{D}{\frac{1}{2}(L + W \cdot \cos 2 \vartheta)}$$

was mit (41)

$$\rho_1 = \frac{D}{[aa]} \quad , \quad \rho_2 = \frac{D}{[bb]}$$

und nach (40)

$$\rho_1 = \frac{m^2}{m_x^2} \quad , \quad \rho_2 = \frac{m^2}{m_y^2} \quad . . . \quad (76)$$

ergibt. Man hat damit die mittleren Koordinatenfehler in der gleichen reziproken Beziehung wie die Fehlerellipsenhalbachsen gemäß (38) erhalten.  $m_x$  und  $m_y$  können daher analog  $A$  und  $B$  ermittelt werden. Es ist zur Ermittlung der beiden Schnittpunkte der Ellipse mit der  $X$ -achse gar nicht notwendig, die Ellipse zu zeichnen, sondern man kann die bekannte Papierstreifenmethode verwenden.

Unterwirft man die Polargleichung (44) der Fußpunktskurve ebenfalls der Abbildung

$$w = z^2,$$

so erhält man mit

$$r_F^2 = \rho_F \quad \text{und} \quad 2 \varphi = \psi$$

eine Kurve von cardioidischem Typ, nämlich die Pascal'sche Schnecke

$$\rho_F = \frac{m^2}{2D} (L + W \cdot \cos \psi) \quad . . . \quad (77)$$

Die Ermittlung von  $m_x$  bzw.  $m_y$  über die Ellipse (75) ist daher vorzuziehen.

Es sei nun noch darauf hingewiesen, daß die äquivalenten Vektoren  $r_k^2$  bei beliebig angenommenem  $s$  in Analogie zu der Darstellung der Vektoren  $r_k$  auch in direktem Zusammenhang mit der vektographischen Ausgleichung erhalten werden können. Bei der Abbildung der Vektoren  $r_k$  in  $r_k^2$  bleiben die affinen Beziehungen erhalten, jedoch in bezug auf einen Brennpunkt als Pol! Der Beweis ist leicht zu führen. War der Richtungswinkel eines Vektors  $r_k$  im Koordinatensystem der Fehlerellipsenhauptachsen gleich  $\alpha$ , so ist der Richtungswinkel des Vektors  $r_k^2$  nach (57) gegeben mit

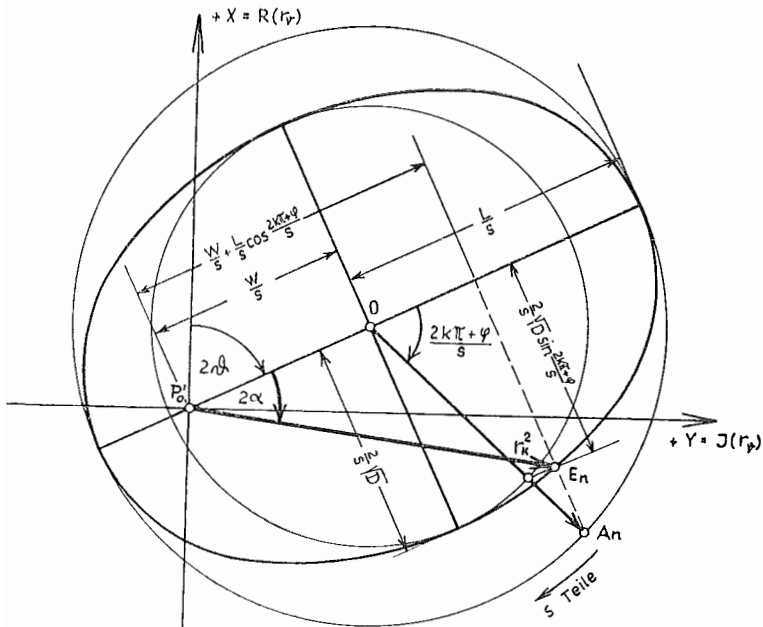
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{ab \cdot \sin \frac{2k\pi + \varphi}{s}}{\frac{1}{2}(a^2 - b^2) + \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \cos \frac{2k\pi + \varphi}{s}}$$

Mit (63) ergibt sich daraus

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sqrt{D} \cdot \sin \frac{2k\pi + \varphi}{s}}{\frac{W}{2} + \frac{L}{2} \cos \frac{2k\pi + \varphi}{s}} \quad \dots \quad (78)$$

Der absolute Betrag des Vektors  $r_k^2$  wird nach (60) und mit (63)

$$|r_k^2| = \frac{L}{s} + \frac{W}{s} \cos \frac{2k\pi + \varphi}{s} \quad \dots \quad (79)$$



Die Formeln (78) und (79) gestatten eine einfache konstruktive Auswertung: Man konstruiert mit festem Brennpunkt  $P_0'$  und der linearen Exzentrizität  $\frac{W}{s}$  den

Ellipsenmittelpunkt 0. Hierauf werden um 0 wieder die beiden Scheitelkreise mit den Radien (74)

$$a' = \frac{L}{s} \quad b' = \frac{2}{s} \cdot \sqrt{D}$$

geschlagen. Gegenüber der früheren  $2s$ -Teilung ist einer der Scheitelkreise nunmehr nur in  $s$  gleiche Teile zu unterteilen. Die affinen Bilder der derart erhaltenen Punkte  $A_n$  sind dann die Ellipsenpunkte  $E_n$ . Die Vektoren  $r_k^2$  sind jetzt durch die Verbindung  $P_0'E_n$  gegeben.

Die derart ermittelten Vektoren  $r_k^2$  genügen, wie vorher die Vektoren  $r_k$ , der Längen- und Endpunktsbedingung, das heißt, Endpunkt  $E$  und Betrag  $L$  sind die Invarianten der Vektormannigfaltigkeit  $r_k^2$ .

Das Äquivalenzproblem ist somit auch in direkter konstruktiver Beziehung zum vektographischen Ausgleich lösbar.

## Die Ausstellung „Die Katastralvermessung und die Wiener Stadterweiterung vom Jahre 1858“

Von Robert Messner

(*Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen*)

Über Anregung des Herrn Präsidenten Dipl.-Ing. Dr. F. Schiffmann entstand unter Leitung des Herrn Oberrates Dipl.-Ing. R. Messner, einem Fachmann auf dem Gebiete der Heimatkunde, die nachstehend besprochene Ausstellung. Messner ist auch der „Plan der Inneren Stadt Wien“ zu verdanken, der uns ein Bild dieser Stadt vor 100 Jahren gibt, in dem die noch bestehenden alten Gebäude besonders gekennzeichnet sind. An der Gestaltung der Ausstellung hat auch Herr Oberkommissär Dipl.-Ing. O. Novak erfolgreich mitgewirkt.

*Die Redaktion.*

Am 25. März 1958 wurde im Technischen Museum die vom Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen veranstaltete und unter dem Ehrenschatze des Herrn Bundesministers für Handel und Wiederaufbau Dr. Fritz Bock stehende Ausstellung „Die Katastralvermessung und die Wiener Stadterweiterung vom Jahre 1858“ eröffnet. Anlaß zu dieser Ausstellung gab die vor 100 Jahren, nämlich am 29. März 1858, begonnene Niederlegung der Basteien Wiens und die damit verbundene Stadterweiterung, für die der Kataster entsprechende Planunterlagen zu liefern hatte. Im einzelnen wäre hiezu folgendes anzuführen:

Im Jahre 1828 fand die erste katastrale Aufnahme oder Uraufnahme Wiens im Maßstab 1:2880 statt. Die daraus entstandene Mappe wurde im Original und in einer ein Jahr später erschienenen, sorgfältig adjustierten Kopie gezeigt. 1846 wurde die zweite Katastralaufnahme oder erste Neuvermessung der Inneren Stadt, enthaltend das Gebiet bis an den äußeren Rand des Stadtgrabens, ausgeführt. Während das dazugehörige Triangulierungsoperat im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen hinterlegt wurde, befindet sich das eigentliche Neuvermessungsoperat, bestehend aus 19 Original-Meßtischblättern, 55 Indikationskizzen-Quartblättern, 1 Bau- und 1 Grund-Parzellenprotokoll, im Besitz der Gemeinde Wien.