

Paper-ID: VGI_193609



Hofrat Dr. F. Hopfner: Die dreiachsigen Erdfiguren der Geodäsie

Karl Ledersteger

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **34** (3), S. 60–61

1936

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Ledersteger_VGI_193609,  
Title = {Hofrat Dr. F. Hopfner: Die dreiachsigen Erdfiguren der Geod{"a}sie},  
Author = {Ledersteger, Karl},  
Journal = {"Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen"},  
Pages = {60--61},  
Number = {3},  
Year = {1936},  
Volume = {34}  
}
```



Referat.

Die dreiachsigen Erdfiguren der Geodäsie.

Referat über den Vortrag des Hofrates Dr. F. Hopfner.

Am 24. Jänner 1936 sprach Hofrat Dr. F. Hopfner im Rahmen der wöchentlichen Vorträge der Wiener Mathematischen Gesellschaft über seine scharfsinnige und eingehende Kritik der isostatischen Reduktion.

Die Frage nach der Dreiachsigkeit der Erdfigur ist wieder aktuell geworden, seit Helmer, Berroth und Heiskanen auf Grund des erweiterten Clairaut'schen Theorems aus den isostatisch oder nach der Freiluftformel reduzierten Schwerewerten dreiachsige Ellipsoide abgeleitet haben. Dank des fast gleichen Beobachtungsmateriales an Schwerewerten stimmen die drei Formeln weitgehend überein. Der Unterschied zwischen den beiden Äquatorhalbachsen schwankt zwischen 150 und 345 *m* und die längere Äquatorachse fällt nahezu in den Meridian von Greenwich. Auffallend ist besonders, daß die äquatoralen Schwerewerte wider Erwarten ihr Maximum in den Endpunkten der längeren Äquatorachse haben. Heiskanen hat auch aus den vorhandenen Gradmessungen auf Grund isostatisch reduzierter Lotablenkungen ein dreiachsiges Ellipsoid berechnet, das sich von den drei früheren etwas mehr unterscheidet.

Bei der Kritik dieser dreiachsigen Figuren stoßen wir zuerst auf das Problem der Reduktion der beobachteten Schwerewerte auf das Geoid. Am exaktesten erfolgt die Reduktion nach Prey: man bringt zuerst die Anziehung b' der Kontinentalmassen zwischen Beobachtungsstation P' und Meeresniveau in Abzug, verschiebt dann P' längs der Lotlinie in den Punkt P_1 des Geoids und berücksichtigt nunmehr die Attraktion b des Kontinents auf P_1 . Diese Reduktion gibt also die tatsächliche Schwerebeschleunigung am Geoid. Die Bouguer'sche Reduktion hebt wohl den Kontinent ab, ohne ihn wieder aufzusetzen, während die Freiluftformel überhaupt ohne Rücksicht auf den Kontinent wie in freier Luft reduziert. Als vierte Möglichkeit tritt die isostatische Reduktion auf. Nach der Lehre vom Massen- ausgleich sind alle Massenunregelmäßigkeiten in der Erdkruste derart kompensiert, daß in einer gewissen Tiefe eine Ausgleichsfläche des Druckes existiert, d. h. eine Niveaufläche, auf deren genügend großen Flächenelementen immer nahezu gleiche Massen lagern. Bei der isostatischen Reduktion werden daher wie bei Bouguer die Massen über dem Meeresniveau zuerst abgezogen, dann aber in der Erdkruste so verteilt, daß man alle Massenunregelmäßigkeiten möglichst beseitigt. Die Wirkung dieser verteilten Massen auf P_1 sei β . Man erhält somit aus dem Beobachtungswert g' je nach der Reduktion:

$$\text{Prey: } g_1 = g' + \frac{2g'h}{R} - (b + b')$$

$$\text{Bouguer: } g_2 = g' + \frac{2g'h}{R} - b'$$

$$\text{Isostasie: } g_3 = g' + \frac{2g'h}{R} - (b' - \beta)$$

$$\text{Freiluft: } g_4 = g' + \frac{2g'h}{R}.$$

Wie am schematischen Beispiel der geschichteten Kugel mit aufgesetztem Kontinent gezeigt wird, liegen die Bezugspunkte dieser vier Verfahren auf Niveauflächen verschiedenen Potentialwertes, und zwar am tiefsten für die Freiluftformel. Da am Rande der Kugel die Schwerewerte von außen nach innen zunehmen, reduzieren die drei letzten Formeln überdies mit zunehmender Seehöhe in immer größere Tiefen. Es wäre daher möglich, daß die falsche Orientierung der Äquatorhalbachsen ein Effekt der isostatischen Reduktion ist. Denn der Meridian von Greenwich verläuft nahe über dem Meere, der dazu senkrechte auf der Nordhalbkugel vorwiegend über Festland. Bei Anwendung der Clairaut'schen Formel auf isostatisch reduzierte Schwerewerte legt man übrigens durch die von der Seehöhe abhängen-

den Bezugspunkte eine stetige Fläche, die aus potentialtheoretischen Gründen die Frage nach der Erdfigur nicht zu klären vermag.

Ein weiterer schwerwiegender Einwand gegen die von der Prey'schen Reduktion abweichenden Formeln folgt daraus, daß jede Massenentnahme oder Massenverschiebung die Kräftefunktion der Erde und ihre Niveaulächen abändert. Da durch die isostatische Reduktion das Geoid Rand der Erdmasse wird, können wir die Entwicklung des Außenpotentials nach Kugelfunktionen bei der üblichen Lage des Koordinatensystems vornehmen. Nach dem Vorgang von Bruns läßt sich diese Entwicklung in zwei Teile spalten: $W = U + T$, deren erster eine Funktion der Erdmasse und der Hauptträgheitsmomente A, B, C ist, während die „Restfunktion“ T von den Massenunregelmäßigkeiten abhängt. Es ist:

$$U = \frac{Y_0}{l} + \frac{Y_2}{l^3} + \frac{1}{2} \varpi^2 (x^2 + y^2); \quad T = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{Y_i}{l^{i+1}} \quad \text{mit:}$$

$$Y_0 = E; \quad Y_2 = -\frac{3}{2} \left[C - \frac{1}{2} (A + B) \right] \left(\sin^2 \psi - \frac{1}{3} \right) + \frac{3}{4} (B - A) \cos 2\theta \cos^2 \psi.$$

Das „Niveausphäroid“ $U = U_0$ ist symmetrisch zur (xy) -Ebene und für $A = B$ eine Rotationsfläche, die sich kaum vom Rotationsellipsoid unterscheidet. Man nennt $\gamma = -\frac{\partial U}{\partial n}$ die theoretische Schwerkraft; sie ist es, die in den Formeln Helmer's, Berroth's und Heiskanen's dargestellt wird. Die Theorie vergleicht nun das Niveausphäroid $U = U_0$ mit der Niveauläche gleichen Potentials $W = U_0$ und erhält die Abweichungen der letzteren vom Niveausphäroid, die „Geoidundulationen“ ζ aus dem Theorem von Bruns: $\zeta = -\frac{T}{\gamma}$.

Da die isostatischen Reduktionsverfahren auf eine Regularisierung der Massen in der Erdkruste hinauslaufen, bringen sie die Restfunktion T zum Verschwinden. Sie ebnen also die Undulationen des Geoids ein und erzeugen künstliche Geoide, die ihre eigenen Niveausphäroide sind. Damit ist aber eine Änderung der Kräftefunktion und der Hauptträgheitsmomente der Erde verbunden, wodurch der auf isostatischer Grundlage erhaltene Abplattungswert 1:297 problematisch wird. Es gibt zu denken, daß Brown in seiner Mondtheorie diesen Wert ablehnt und den früheren Clarke'schen Wert 1:294 beibehält. Bei dem Auftreten eines Längengliedes in den neueren Schwereformeln ist aber auch die Änderung der äquatorealen Trägheitsmomente von großer Bedeutung. Gehen A und B in A' und B' über, so ist einmal möglich, daß trotz $A = B$ durch den isostatischen Massenausgleich $(B' - A') \neq 0$ resultiert, also eine Elliptizität des Äquators vorgetauscht wird. Aber selbst wenn aus $(B - A) > 0$ die Ungleichung $(B' - A') > 0$ hervorgeht, kann die errechnete Elliptizität ganz falsch sein, da der Unterschied zwischen $(B - A)$ und $(B' - A')$ von derselben Größenordnung sein kann wie $(B - A)$. Schließlich kann aber auch $(B' - A') < 0$ resultieren. In diesem Falle führt der Massenausgleich zu einem elliptischen Äquator, dessen Achsen um 90° gegen die tatsächlichen Hauptträgheitsachsen der Erde verdreht sind. Darin könnte die eingangs erwähnte unwahrscheinliche Achsenlage des elliptischen Äquators ihre Erklärung finden.

Schon diese Einwände berechtigen zu dem Schlusse, daß die Anwendung isostatischer Methoden, gleichgültig ob es sich um isostatische Reduktion von Schwerewerten oder von Lotablenkungen handelt, eine etwaige Dreiaxigkeit der Erde nicht nachgewiesen werden kann.

Prof. Dr. T. R e l l a dankte dem Vortragenden unter lebhaftem Beifall des Auditoriums mit warmen Worten für seine fesselnden Ausführungen.

K. Ledersteger.