



## Reihenentwicklungen zur Berechnung des Wiener Bogens der ÖBB

Peter Schuhr, Frankfurt am Main

### Kurzfassung

Die Österreichischen Bundesbahnen (ÖBB) verwenden den sogenannten Wiener Bogen. Dieser Übergangsbogen basiert auf einem Polynom 7. Ordnung für die Krümmung der Schwerpunktbahn des Fahrzeugs sowie auf der sich aus der Rotation dieses Fahrzeugs ergebenden Abweichung des Gleisverlaufs von der Schwerpunktbahn. In diesem Beitrag werden Reihenentwicklungen hergeleitet, die eine exakte und effiziente Berechnung des Wiener Bogens ermöglichen.

### Abstract

The Austrian Federal Railways (ÖBB) use the so-called Vienna Arc. This transition curve is based upon a polynomial of 7<sup>th</sup> degree for the curvature of the vehicle's centre-of-mass trajectory as well as its offset to the railtrack which results from the rotation of this vehicle. In the article series expansions for an exact and efficient calculation of the Vienna arc are developed.

### 1. Krümmungsbilder verschiedener Übergangsbogen

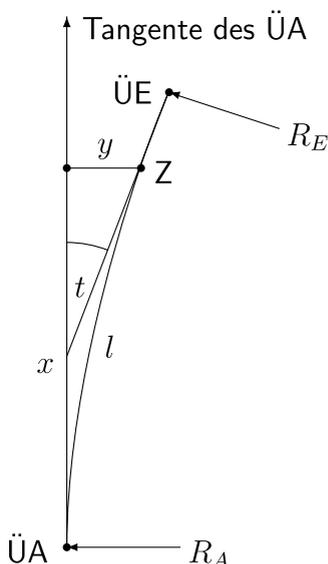
Zur Berechnung eines Übergangsbogens (Abb. 1), d. h. zur Ermittlung von  $t, y$  und  $x$  aus  $R_A, R_E, l$  und  $L$ , wird die Krümmungslinie (Abb. 2)

$$k = K_A + (K_E - K_A) \cdot F \tag{1}$$

benötigt. Sie definiert bei den konventionellen Übergangsbogen regelmäßig unmittelbar die Lage des Gleises, kann sich jedoch alternativ

auf die Schwerpunktbahn beziehen (z. B. RUCH 1903).

Übergangsbogen zwischen einer Geraden und einem Kreisbogen bzw. einem Kreisbogen und einer Geraden sind als Sonderfälle mit  $K_A = 0$  bzw.  $K_E = 0$  in (1) enthalten. Darüber hinaus sind die Krümmungen von Rechtsbogen positiv und von Linksbogen negativ anzusetzen. In diesem Fall gilt (1) auch für Gegenbogen.



- ÜA = Anfangspunkt des Übergangsbogens
- ÜE = Endpunkt des Übergangsbogens
- $R_A$  = Radius in ÜA
- $R_E$  = Radius in ÜE
- $L$  = Gesamtlänge zwischen ÜA und ÜE
- Z = Zwischenpunkt
- $l$  = Teillänge zwischen ÜA und Z
- $t$  = Richtungswinkel zwischen den Tangenten in ÜA und Z
- $y, x$  = auf ÜA und Tangente in ÜA bezogene kartesische Koordinaten von Z

Abb. 1: Übergangsbogen

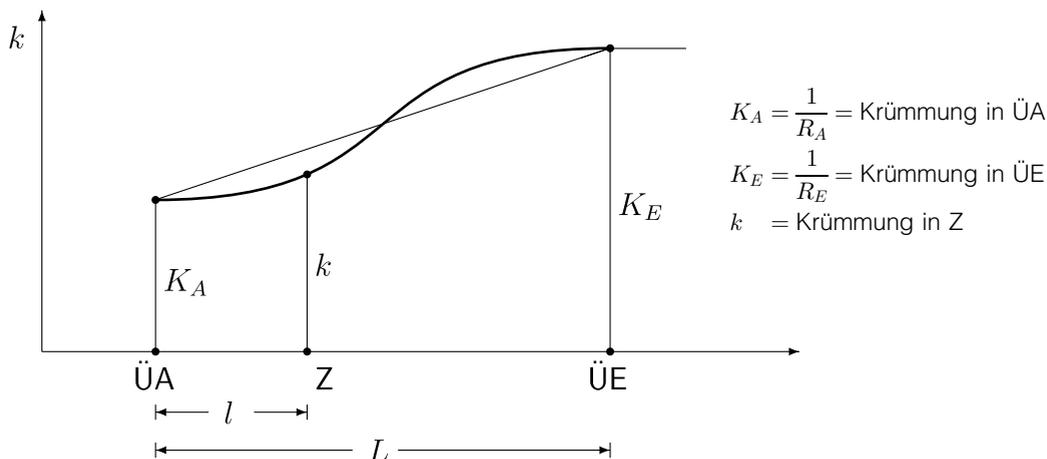


Abb. 2: Krümmungslinie zwischen zwei Kreisen

Die Interpolationsfunktion  $F$  in (1) kann mit Polynomansätzen ungerader Ordnung angesetzt werden. Das Polynom 1. Ordnung

$$F = \frac{l}{L} \quad (2)$$

definiert die geradlinige Krümmungslinie der Klothoide. Das Polynom 3. Ordnung

$$F = -2 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^2 \quad (3)$$

liegt dem Übergangsbogen von BLOSS 1936 zugrunde. Seine Form weicht nur wenig vom Übergangsbogen mit cosinusförmiger Krümmungslinie (VOJACEK 1868) ab. Das Polynom 5. Ordnung

$$F = 6 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^5 - 15 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^4 + 10 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^3 \quad (4)$$

(WATOREK 1907 und LANGE 1937) hat starke Ähnlichkeit mit der sinusförmig modulierten Krümmungslinie (KLEIN 1937). Das Polynom 7. Ordnung

$$F = -20 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^7 + 70 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^6 - 84 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^5 + 35 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^4 \quad (5)$$

definiert die Schwerpunktbahn des Wiener Bogens (PRESLE 2006, Seite 12). Die Reihe kann mit Polynomen 9. Ordnung

$$F = 70 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^9 - 315 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^8 + 540 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^7 - 420 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^6 + 126 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^5 \quad (6)$$

usw. jeweils so ergänzt werden, dass für Polynome  $n$ . Ordnung die  $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ . Ableitung die letzte stetige ist und alle vorherigen sogar stetig differenzierbar sind.

Polynome gerader Ordnung sind dagegen nicht geeignet, die Krümmungslinie mit einer einzigen Funktion zu beschreiben. Die Krümmungslinie des Übergangsbogens nach HELMERT 1872, der früher mit der biquadratischen Parabel angenähert wurde, benutzt jedoch zwei quadratische Parabeln, die an den Enden  $\ddot{U}A$  und  $\ddot{U}E$  (Abb. 2) beginnen und sich in der Mitte treffen.

## 2. Wiener Bogen

### 2.1 Überhöhungsrampe

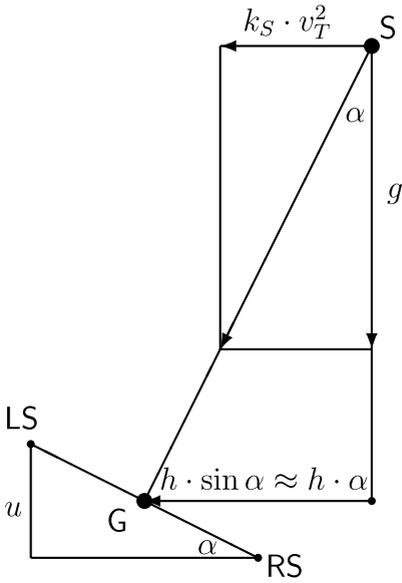
Die Veränderung der Überhöhung beginnt bei  $\ddot{U}A$  und endet bei  $\ddot{U}E$  (Abb. 1). Aus den Anfangs- und Endüberhöhungen  $u_A$  und  $u_E$  errechnen sich die dazugehörigen Querneigungen (Abb. 3)

$$\alpha_A = \arcsin \frac{u_A}{s} \approx \frac{u_A}{s} \quad (7)$$

und

$$\alpha_E = \arcsin \frac{u_E}{s} \approx \frac{u_E}{s}, \quad (8)$$

die das gleiche Vorzeichen erhalten wie die jeweiligen Krümmungen.



- S = Schwerpunkt
- RS = Rechte Schiene
- LS = Linke Schiene
- G = Gleis (im Regelfall = Mitte zwischen RS und LS)
- $\alpha$  = Querneigung
- $k_S$  = (Horizontal-)Krümmung in S
- $v_T$  = Trassierungs-Geschwindigkeit  
= Fahrgeschwindigkeit ohne Lateralbeschleunigung
- $g$  = Erdbeschleunigung
- $s$  = Schienenabstand zwischen RS und LS  
= 1.500 für Regelspurbahnen der Spurweite 1.435
- $h$  = Schwerpunkthöhe über dem (quergeneigten) Gleis  
= Abstand von G nach S
- $u$  = Überhöhung

Abb. 3: Schwerpunkt und quergeneigtes Gleis

Die Querneigungen bzw. die zugrunde liegenden Überhöhungen sind stets so auszuwählen, dass die Bedingung

$$K_A \cdot \alpha_E = K_E \cdot \alpha_A, \tag{9}$$

die für Übergangsbogen zwischen Kreisen auch durch

$$\frac{K_A}{K_E} = \frac{\alpha_A}{\alpha_E} \tag{10}$$

ausgedrückt werden kann, eingehalten wird.

Die Überhöhung, genauer die Querneigung, beeinflusst den Grundriss. Sie muss deshalb vor der Berechnung des Grundrisses bekannt sein. Jede nachträgliche Veränderung erfordert eine Neuberechnung des Grundrisses.

Die Überhöhung errechnet sich innerhalb des Übergangsbogens in Analogie zu (1) über die Querneigung

$$\alpha = \alpha_A + (\alpha_E - \alpha_A) \cdot F \tag{11}$$

mit  $F$  nach (5) zu

$$u = s \cdot \sin \alpha \approx s \cdot \alpha. \tag{12}$$

## 2.2 Gesamtansatz

Beim Wiener Bogen definiert die Krümmungslinie (vgl. (1))

$$k_S = K_A + (K_E - K_A) \cdot F \tag{13}$$

mit  $F$  nach (5) die Schwerpunktbahn im Grundriss.

Dem außerhalb der Geraden vom Schwerpunkt abweichenden Gleis (Abb. 3) liegt der (Gesamt-)Ansatz (HASSLINGER 2005, Gleichung (3) auf Seite 229)

$$v_T^2 \cdot \left( k_G + h \cdot \frac{d^2 \alpha}{dl^2} \right) - g \cdot \alpha = 0, \tag{14}$$

mit  $k_G$  = Krümmung des Gleises, zugrunde. Daraus folgt

$$\begin{aligned} k_G &= \alpha \cdot \frac{g}{v_T^2} - h \cdot \frac{d^2 \alpha}{dl^2} = k_S - h \cdot \frac{d^2 \alpha}{dl^2} = \\ &= k_S - h \cdot \alpha'' \end{aligned} \tag{15}$$

mit  $k_S$  = Krümmung der Schwerpunktbahn bzw. mit (11) und (13)

$$\begin{aligned} k_G &= K_A + (K_E - K_A) \cdot F - h \cdot (\alpha_E - \alpha_A) \cdot \frac{d^2 F}{dl^2} = \\ &= K_A + \Delta K \cdot F - h \cdot \Delta \alpha \cdot F''. \end{aligned} \tag{16}$$

Die aus der Rotation um den Schwerpunkt resultierende Gleislage im Grundriss weicht um  $h \cdot \sin \alpha \approx h \cdot \alpha$  (Abb. 3) von der originären Schwerpunktbahn ab. Der Verschiebungsbetrag lässt sich wegen der ohnehin erforderlichen Berechnung kartesischer Koordinaten über eine zweifache Integration der Krümmung (vgl. 2.3 und 2.4) indirekt über die in (14) bis (16) enthaltene

Krümmungskorrektur (Verschiebung nach außen!)

$$\Delta k = -h \cdot \frac{d^2 \alpha}{dl^2} \quad (17)$$

berechnen.

### 2.3 Richtungswinkel

Mit den Ableitungen von (5)

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dl} \cdot L = F' \cdot L = & -140 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^6 + 420 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^5 - \\ & - 420 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^4 + 140 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^3 \end{aligned} \quad (18)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F}{dl^2} \cdot L^2 = F'' \cdot L^2 = & -840 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^5 + 2100 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^4 - \\ & - 1680 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^3 + 420 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^2 \end{aligned} \quad (19)$$

folgt über

$$t = \int_0^l k_G \cdot dl \quad (20)$$

mit  $k_G$  nach (16) der Richtungswinkel zu

$$\begin{aligned} t = & K_A \cdot l + \Delta K \cdot L \cdot \left( -2.5 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^8 + \right. \\ & + 10 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^7 - 14 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^6 + 7 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^5 \left. \right) + \\ & + \frac{h \cdot \Delta \alpha}{L} \cdot \left( 140 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^6 - 420 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^5 + \right. \\ & \left. + 420 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^4 - 140 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^3 \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Aus (21) ergibt sich

$$t = a_1 \cdot l^1 + a_2 \cdot l^2 + a_3 \cdot l^3 + a_4 \cdot l^4 + a_5 \cdot l^5 + a_6 \cdot l^6 + a_7 \cdot l^7 + a_8 \cdot l^8 \quad (22)$$

mit

$$\begin{aligned} a_1 &= K_A, \\ a_2 &= 0, \\ a_3 &= -140 \cdot \frac{h \cdot \Delta \alpha}{L^4}, \\ a_4 &= 420 \cdot \frac{h \cdot \Delta \alpha}{L^5}, \\ a_5 &= 7 \cdot \frac{\Delta K}{L^4} - 420 \cdot \frac{h \cdot \Delta \alpha}{L^6}, \\ a_6 &= 140 \cdot \frac{h \cdot \Delta \alpha}{L^7} - 14 \cdot \frac{\Delta K}{L^5}, \\ a_7 &= 10 \cdot \frac{\Delta K}{L^6} \quad \text{und} \\ a_8 &= -2.5 \cdot \frac{\Delta K}{L^7}. \end{aligned} \quad (23)$$

### 2.4 Kartesische Koordinaten

Mit den Richtungswinkeln  $t$  nach (22) und (23) lassen sich die Zwischenwerte

$$\sin t = \sum_{m=1,3,5,\dots} \left( \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m!} \sum_{n=m}^{8m} a_{m,n} \cdot l^n \right) \quad (24)$$

und

$$\cos t = 1 + \sum_{m=2,4,6,\dots} \left( \frac{(-1)^{m/2}}{m!} \sum_{n=m}^{8m} a_{m,n} \cdot l^n \right) \quad (25)$$

mit

$$a_{1,n} = a_n \quad \text{für } n = 1, 2, 3 \dots 8$$

$$a_{m,n} = \sum_{i=1}^{n-m+1} a_{m-1,n-i} \cdot a_i$$

$$\text{für } m \geq 2 \quad \text{und } n = m, m+1 \dots m+6$$

$$= \sum_{i=1}^8 a_{m-1,n-i} \cdot a_i$$

$$\text{für } m \geq 2 \quad \text{und } n = m+7 \dots 8m-7$$

$$= \sum_{i=n-8m+8}^8 a_{m-1,n-i} \cdot a_i$$

$$\text{für } m \geq 2 \quad \text{und } n = 8m-6, 8m-5 \dots 8m \quad (26)$$

ermitteln. Die gesuchten Reihenentwicklungen zur Berechnung der Koordinaten ergeben sich daraus zu

$$\begin{aligned} y &= \int_0^l \sin t \cdot dl = \\ &= \sum_{m=1,3,5,\dots} \left( \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m!} \sum_{n=m}^{8m} a_{m,n} \cdot \frac{l^{n+1}}{n+1} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

und

$$x = \int_0^l \cos t \cdot dl =$$

$$= l + \sum_{m=2,4,6,\dots} \left( \frac{(-1)^{m/2}}{m!} \sum_{n=m}^{8m} a_{m,n} \cdot \frac{l^{n+1}}{n+1} \right). \quad (28)$$

### 3. Ausblick

In dieser Abhandlung werden Reihenentwicklungen hergeleitet, die als günstige Alternative zu numerischen Integrationsverfahren (z. B. SCHUHR 1986) bzw. geeigneten Anfangswertproblemen (z. B. JORDAN-ENGELN und REUTER 1982) zur Berechnung des Wiener Bogens geeignet sind.

#### Literaturverzeichnis

- [1] BLOSS, A. E.: Der Übergangsbogen mit geschwungener Überhöhungsrampe. Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, Neue Folge 73 (1936) 15,319...320.
- [2] BRONSTEIN, I. N. und SEMENDJAJEW, K. A.: Taschenbuch der Mathematik. Harri Deutsch Verlag, Zürich und Frankfurt(M), 6. Auflage (1966).
- [3] HASSLINGER, H. L.: Das Konzept moderner Gleislinienführung. Special Eisenbahntechnische Rundschau Austria (2005) 1,227...233.
- [4] HELMERT, F. R.: Die Uebergangscurven für Eisenbahn-Gelise. Mayer Verlag, Aachen, 1872.
- [5] JORDAN-ENGELN, G. und REUTER, F.: Numerische Mathematik für Ingenieure. Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien und Zürich, 3. Auflage 1982.
- [6] KLEIN, R.: Beitrag zur Gestaltung der Übergangsbögen. Gleistechnik und Fahrbahnbau 13 (1937) 9/10, 97...102 und 23/24,224...227.
- [7] LANGE, A.: Beitrag zur Form des Übergangsbogens. Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, Neue Folge 74 (1937) 22,417...418.
- [8] PRESLE, G.: ÖBB Infrastruktur Bau / Der Wiener Bogen – RTCA, 01.02.2006, 1...26. <http://www.rtca.at/upload/doc/307/RTCA01022006.pdf>
- [9] RUCH, O.: Uebergangsbogen. Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, Neue Folge 40 (1903) 3, 59...62 und 4,71...74.
- [10] SCHUHR, P.: Reihenentwicklungen zur Berechnung des Übergangsbogens von BLOSS. Vermessungswesen und Raumordnung 45 (1983) 8,420...425.
- [11] SCHUHR, P.: Anwendung der ROMBERG-Integration zur Übergangsbogenberechnung aus Krümmungsbildern. Rail international – Schienen der Welt 17 (1986) 1,17...21.
- [12] VOJACEK, L.: Ueberhöhung der Geleise in Curven. Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure 12 (1868) 10,617...624.
- [13] WATOREK, K.: Übergangsbogen. Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, Neue Folge 44 (1907) 9,186...189 und 10,205...208.

#### Anschrift des Autors

Prof. Dr.-Ing. Peter Schuhr: Fachhochschule Frankfurt am Main, Fachbereich 1, Nibelungenplatz 1, D-60318 Frankfurt am Main. Email: [schuhr@fb1.fh-frankfurt.de](mailto:schuhr@fb1.fh-frankfurt.de)