



Oberflächendeformationsanalyse mithilfe von Bezier-Splines: Fallstudie Blockgletscher Reichenkar (Tirol)

Olga Wälder ¹

¹ *Institut für Kartographie, Technische Universität Dresden, Mommsenstraße 13,
D-01062 Dresden*

VGI – Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation **93** (4), S.
166–172

2005

BibT_EX:

```
@ARTICLE{Waelder_VGI_200517,  
Title = {Oberfl{\a}chendeformationsanalyse mithilfe von Bezier-Splines:  
Fallstudie Blockgletscher Reichenkar (Tirol)},  
Author = {W{\a}lder, Olga},  
Journal = {VGI -- {\"}sterreichische Zeitschrift f{\"}r Vermessung und  
Geoinformation},  
Pages = {166--172},  
Number = {4},  
Year = {2005},  
Volume = {93}  
}
```





Oberflächendeformationsanalyse mithilfe von Bezier-Splines: Fallstudie Blockgletscher Reichenkar (Tirol)

Olga Wälder, Dresden

Zusammenfassung

Parametrische Oberflächen wie Bezier-Splines erlauben die Relieffanalyse in einer koordinatenfreien Sprache. Bezier-Splines sowie ihre um eine spezielle Gewichtung erweiterte und als NURBS (Non-Uniform-Rational-Bezier-Splines) bezeichnete Verallgemeinerung fanden bereits ihre Anwendungen in der Geodäsie, siehe [2], [3]. In dieser Arbeit wird die Herleitung einiger spezieller theoretischer Charakteristiken für Bezier-Splines im Rahmen der parametrischen Oberflächendeformationsanalyse präsentiert. Ihre konkrete Anwendung wird anhand von Messungen am Blockgletscher Reichenkar veranschaulicht und diskutiert.

Abstract

Parametric surfaces like Bezier-splines support the analysis of reliefs in a coordinate-free language. Bezier-splines and their generalisation called NURBS (Non-Uniform-Rational-Bezier-Splines) using a special weighting have been still applied in geodesy, see [2], [3]. In this paper special theoretical characteristics for Bezier-splines are derived, which will be taken into parametric surface analysis. Their concrete application is presented and discussed for location measurements at the rock-glacier Reichenkar.

1. Einführung

In [5] wurden bereits einige Ergebnisse der Untersuchungen am Blockgletscher Reichenkar – einem Blockgletscher mit einem ausgeprägten Fließ- bzw. Kriechverhalten – vorgestellt. Es wurde auch darauf hingewiesen, dass wegen einiger Besonderheiten der Datenerfassung auf diesem Blockgletscher – eine geringe Anzahl von unregelmäßig auf seiner Oberfläche verteilten Stützstellen – die Entwicklung und Anwendung von unkonventionellen Verfahren für eine Deformationsanalyse seiner Reliefoberfläche erforderlich ist. Ein auf der Anwendung von Wavelet-Splines basierendes Verfahren wurde in [5] beschrieben. Seine Verallgemeinerung für anisotrope Fälle wurde in [6] präsentiert. In dieser Arbeit wird nun eine Deformationsanalyse mithilfe von Bezier-Splines für die Messungen am Blockgletscher Reichenkar durchgeführt.

Die Deformationsanalyse von Reliefoberflächen mithilfe von Bezier-Splines erfolgt aus einem alternativen, unkonventionellen Blickwinkel: Der Blockgletscher wird als ein komplettes Objekt verstanden, dessen Verhalten mit koordinatenfreien, im CAD-Design üblichen Kategorien wie „vorderes Zungenprofil“, „die linke Kante des Gletschers“ usw. beschrieben werden können, vgl. [1].

Die Bezier-Fläche glättet die wahren Höhenmessungen sehr stark. Dennoch soll betont werden, dass der Blockgletscher ein sehr „raues“

Untersuchungsobjekt ist: Man kann im Grunde genommen von keiner Oberfläche im gebräuchlichen Sinne des Wortes sprechen. Eine differential-geometrische Oberflächendeformationsanalyse soll aus diesem Grund nur auf einer so genannten Trendoberfläche durchgeführt werden.

Bezier-Splines sowie ihre um eine spezielle Gewichtung erweiterte Verallgemeinerung, welche als NURBS (Non-Uniform-Rational-Bezier-Splines) bezeichnet wird, fanden bereits ihre Anwendungen in der Geodäsie, siehe [2], [3]. In [2] wurde ein auf der Methode der kleinsten Quadrate basierendes Verfahren präsentiert, das die Berechnung des „optimalen“ Kontrollnetzes anhand der Messungen erlaubt. Diese Vorgehensweise macht speziell für große Datenmengen und regelmäßiges Abtasten einen Sinn. In unserem Fall ist der mittlere Fehler der Unbekannten nach der entsprechenden Ausgleichung mit dem Fehler der Höhenmessungen vergleichbar, nicht zuletzt weil die Anzahl der zu bestimmenden Unbekannten knapp unter der Anzahl der Gleichungen liegt. Aus diesem Grund sollten die tatsächlichen Messungen zum Aufbau des Kontrollnetzes herangezogen werden.

2. Beschreibung des Datenmaterials und des Modellierungsansatzes

Der Reichenkar Blockgletscher liegt im inneren Reichenkar, einem kleinen Seitental, das in Form eines Hängetales in das Sulztal mündet. Das innere Reichenkar liegt ca. 4 km SE von Längen-

feld im Oztal bzw. 3 km S von Gries im Sulztal (westliche Stubai Alpen). Der Reichenkar Blockgletscher entwickelt sich aus einem schuttbedeckten Kargletscher, ist somit ein typischer „ice-cored rock glacier“ (Blockgletscher mit einem Kern aus Gletschereis). Weitere Details hierzu können [5] entnommen werden.

An diesem Blockgletscher wurden insgesamt 46 (in einigen Jahren auch mehr oder weniger) markierte Messpunkte (größere Felsblöcke mit eingemeielten und mit roter Farbe markierten Messmarken) sowie 5 außerhalb des Blockgletschers liegende Fixpunkte mit dem Satellitennavigationsystem GPS (Global Positioning System) vermessen. Die markierten Messstellen verteilen sich *nicht gitterförmig* über den Blockgletscher.

Im Rahmen der Vorarbeiten für eine weitere mathematische Modellierung wurde ein imaginäres Netz anhand einiger ausgewählter Messstellen – vgl. Abb. 1 – zusammengestellt, das als so genanntes Kontrollnetz für den Bezier-Spline dienen soll. Aus der Theorie der Bezier-Splines ist bekannt, dass die mit solchen Splines durchgeführte Interpolation eine so genannte End-Punkt-Interpolation ist. Auf unseren Fall bezogen bedeutet dies, dass die abgeleitete analytische Fläche nur die Messungen an den Blöcken mit den Nummern 3,6,32,36 aus Abb. 1 unverfälscht beibehält. Andere Messungen werden mehr oder weniger verzerrt wiedergegeben. Wenn die Messungen keine großen räumlichen Schwankungen aufweisen, kann der Fehler aufgrund dieser Verzerrung bei der Deformationsanalyse der Oberfläche vernachlässigt werden.

Das Netz aus Abb. 1, das für weitere Untersuchungen als Kontrollnetz benutzt wird, verändert sich von Jahr zu Jahr lokal unterschiedlich. Die lokalen Unterschiede gehen auf die relative Kinematik der Blöcke auf dem Gletscher zurück. Manche Blöcke neigen zum Abrutschen, einige beschleunigen ihre Bewegung oder werden im Gegenteil durch irgendwelche Hindernisse (Reliefunebenheiten, Eiskerndeformationen) abgebremst. Zu den Besonderheiten der Datenerfassung auf dem Blockgletscher Reichenkar gehören die unterschiedliche Anzahl der Messungen zwischen den Epochen und der Ausfall einiger Messstellen. Zum Beispiel liegt die Hohemessung für den Punkt 7 im Jahr 2001 nicht vor (daher eine Lücke in Abb. 5a, 5b: Ein Netz wie in Abb. 1 konnte nicht zusammengestellt werden). Für die Auswahl der Messstellen, die zu einem Netz analog zu Abb. 1 zusammengefasst wurden, sprach vor allem ihre

relative „informative Stabilität“ hinsichtlich der Epochen 1997 bis 2004 und ihre günstige räumliche Verteilung (konvexe Maschen).

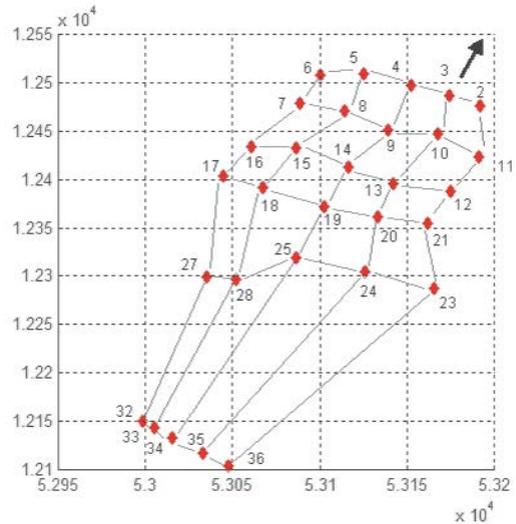


Abb. 1: Imaginäres Netz auf dem Blockgletscher Reichenkar für das Jahr 1997. Die Zahl neben dem jeweiligen Block steht für die laufende Nummer der jeweiligen Messstelle (rote Rauten). Der schwarze Pfeil kennzeichnet die Bewegungsrichtung des Blockgletschers.

3. Mathematische Hintergründe der Oberflacheninterpolation und der Deformationsanalyse mithilfe von Bezier-Splines

Der Arbeit eines Designers liegt keine mathematische Beschreibung des Objektes zugrunde. Ein Punkt im Raum wird nicht als ein Koordinatentripel verstanden. Der Designer denkt vielmehr in praktischen Begriffen wie Ecken, Mittelpunkte oder glatte Kurven, siehe [1].

Die analytische Beschreibung eines Objektes beruht gewöhnlich auf einem Koordinatensystem. Wenn man aber nur an dem Objekt selbst, und nicht an seinem Koordinatenbezug interessiert ist, existieren Methoden, die eine *koordinatenfreie* oder *koordinatenunabhängige* Verwaltung solcher Objekte unterstützen. Die meisten Abbildungen, die in einer Computergraphik oder CAD-Umgebung zum Positionieren und Skalieren von Objekten benutzt werden, sind so genannte *affine Abbildungen*. Dieser Begriff geht auf Euler zurück. Als Grundoperation für Punkte gilt die baryzentrische Kombination.

Eine Abbildung Φ , die E^3 (dreidimensionaler Raum mit euklidischer Metrik) auf sich selbst abbildet, wird als *affine Abbildung* bezeichnet, wenn sie die baryzentrische Kombinationen invariant lässt, d. h.

$$\forall x = \sum_{j=0}^n \alpha_j b_j, \text{ mit } x, b_j \in E^3 \text{ für } \Phi \Rightarrow \quad (1)$$

$$\Phi x = \sum_{j=0}^n \alpha_j \Phi b_j, \quad \Phi x, \Phi b_j \in E^3.$$

Die Formel (1) bedeutet mit anderen Worten, dass bei affinen Abbildungen der Mittelpunkt einer Strecke auf den Mittelpunkt der Bildstrecke abgebildet wird. Eine bekannte affine Abbildung Φ ist

$$\Phi x = Ax + v, \quad (2)$$

wobei A eine 3×3 Matrix und v ein Vektor in E^3 ist.

Der Berechnung von Bezier-Splines liegt der so genannte Algorithmus von Casteljau zugrunde. Die Arbeiten von De Casteljau stammen aus dem Jahr 1959. Bis 1975 blieb der Algorithmus unbekannt, weil er nur auf Französisch und in internen Forschungsberichten bei Citroen dokumentiert war, vgl. [1].

Den Grundstein des Algorithmus von Casteljau zur Berechnung einer Bezier-Fläche bildet die wiederholte bilineare Interpolation, bei der im ersten Schritt eine parametrische Oberfläche $x(u, v)$ wie folgt entsteht:

$b_{00}, b_{01}, b_{10}, b_{11}$ seien vier verschiedene Punkte im E^3 . Die Menge aller Punkte $x \in E^3$ der Form

$$x(u, v) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 b_{ij} B_i^k(u) B_j^k(v), \quad (3)$$

mit $B_k^i(y) = (1 - y)^{1-k} y^k,$
 $k = 0, 1; \quad y = u, v$

wird als hyperbolisches Paraboloid durch die vier Punkte $b_{ij}, i, j = 0, 1$ bezeichnet. In Matrixform gilt dann für (3):

$$x(u, v) = [1 - u \quad v] \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix}. \quad (3')$$

Die Fläche $x(u, v)$ wird manchmal auch *bilineare Interpolierende* genannt. Sie kann als Abbildung eines Einheitsquadrates in die Oberfläche $x(u, v)$ angesehen werden.

Man erhält Bezier-Flächen aus wiederholten bilinearen Interpolationen wie folgt: Für gegebene $\{b_{ij}\}_{i,j=0}^n$ und $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ setzt man

$$b_{ij}^r(u, v) = [1 - u \quad u] \begin{bmatrix} b_{ij}^{r-1r-1} & b_{ij+1}^{r-1r-1} \\ b_{i+1j}^{r-1r-1} & b_{i-1j+1}^{r-1r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix}$$

für $r = 1, \dots, n, \quad i, j = 0, \dots, n - r \quad (4)$

und $b_{ij}^0 = b_{ij},$

dann liegt der Punkt b_{00}^m mit Parametern (u, v) auf der Bezier-Fläche $b^m(u, v)$.

Das Netz der $\{b_{ij}\}_{i,j=0}^n$ heißt *Bezier- oder Kontrollnetz*. Seine Punkte werden *Bezier- bzw. Kontrollpunkte* genannt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit und nur zur Vereinfachung der Darstellung wird in (4) von der gleichen Anzahl der Kontrollpunkte in u und v -Richtung ausgegangen. Dies ist aber keine notwendige Bedingung; Man erhält im Allgemeinen eine Bezier-Fläche in Form eines zweidimensionalen Polynoms mit unterschiedlichen Graden von u und v . Für ausführliche Abhandlungen diesbezüglich soll an dieser Stelle auf [1] verwiesen werden.

Nun soll die Bedeutung der Parameter u und v aus (3) und (4) näher erläutert werden. Wie man aus (3) ersehen kann, entspricht der z -Wert der Bezier-Fläche für $u = 0$ und $v = 0$ dem z -Wert des Eckpunktes b_{00} . Bei $u = 1$ und $v = 1$ gibt die Bezier-Fläche den Eckpunkt b_{11} wieder, usw. Der Fall $u = 0$ und $v \in [0, 1]$ beschreibt die Lage der Punkte der Bezier-Fläche entlang des Profils $[b_{00}, b_{01}]$. Bei $u = 0.5$ und $v = 0.5$ kann man im gewissen Sinne von der geometrischen „Mitte“ der hergeleiteten Bezier-Fläche sprechen.

Bei der Oberflächendeformationsanalyse interessiert man sich für einige differential-geometrische Größen, deren Definitionen unten eingeführt werden. Um die weiteren Bezeichnungen möglichst einfach zu halten, wird Formel (4) wie folgt umgeschrieben:

$$B_{00}^k(u, v) = [1 - u \quad u] \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix}$$

für $k = 1, \dots, n \quad (4')$

und $B_{00}^0 = b_{00}, B_{01}^0 = b_{01}, B_{10}^0 = b_{10}, B_{11}^0 = b_{11}.$

Die in (4') verwendeten Bezeichnungen werden rekursiv auf jede Zelle des Kontrollnetzes übertragen. Jede Zelle besitzt somit eine linke untere Ecke B_{00}^0 , eine rechte untere Ecke B_{10}^0 , eine obere linke Ecke B_{01}^0 und eine obere rechte Ecke B_{11}^0 . Wird die erste Iteration (bilineare Interpolation über alle Zellen) durchgeführt, so werden die Punkte des neuen, um eine Spalte und eine Zeile verkleinerten Gitters, nochmals umbenannt: Jede neue Zelle besitzt nun eine linke untere Ecke B_{00}^1 ,

eine rechte untere Ecke B_{10}^1 , eine obere linke Ecke B_{01}^1 und eine obere rechte Ecke B_{11}^1 , usw. Die Darstellung (4') ist für eine algorithmische Implementierung sinnvoller als (4). Die hergeleitete parametrische Bezier-Fläche $B_{00}^n(u, v)$ stellt für bestimmte Parameter u und v einen *drei-dimensionalen* Ortsvektor dar.

Mit den Bezeichnungen aus (4') können folgende Relationen für partielle Ableitungen von Bezier-Fläche hergeleitet werden:

$$\frac{d}{du} B_{00}^k(u, v) = \tag{5}$$

$$= [1 - u \quad u] \frac{d}{du} \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix} +$$

$$+ [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix}$$

$$\frac{d^2}{du^2} B_{00}^k(u, v) =$$

$$= 2 \cdot [-1 \quad 1] \frac{d}{du} \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix} +$$

$$+ [1 - u \quad u] \frac{d^2}{du^2} \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dv} B_{00}^k(u, v) =$$

$$= [1 - u \quad u] \frac{d}{dv} \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix} +$$

$$+ [1 - u \quad u] \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d^2}{dv^2} B_{00}^k(u, v) =$$

$$= 2 \cdot [1 - u \quad u] \frac{d}{dv} \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ [1 - u \quad u] \frac{d^2}{dv^2} \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix}$$

$$\frac{d^2}{dv du} B_{00}^k(u, v) =$$

$$= [1 - u \quad u] \frac{d^2}{dv du} \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix} +$$

$$+ [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ [-1 \quad 1] \frac{d}{dv} \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix} +$$

$$+ [1 - u \quad u] \frac{d}{du} \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

für $k = 1, \dots, n$ und $B_{00}^0 = b_{00}$, $B_{01}^0 = b_{01}$, $B_{10}^0 = b_{10}$, und $B_{11}^0 = b_{11}$.

Aus der Differentialgeometrie sind folgende Größen bekannt, die mithilfe der in (5) berechneten partiellen Ableitungen ermittelt werden können, vgl. [4]:

Die **erste Fundamentalform** entspricht in unserem Fall (bei der Bezier-Fläche $B_{00}^n(u, v)$ werden weiter die Parameter u und v weg gelassen):

$$I(u, v) = \langle dB_{00}^n, dB_{00}^n \rangle =$$

$$= \alpha_{uu} du du + \alpha_{uv} du dv + \alpha_{vu} dv du + \alpha_{vv} dv dv, \tag{6}$$

$$\alpha_{uu} = \left\langle \frac{d}{du} B_{00}^n, \frac{d}{du} B_{00}^n \right\rangle, \quad \alpha_{vv} = \left\langle \frac{d}{dv} B_{00}^n, \frac{d}{dv} B_{00}^n \right\rangle,$$

$$\alpha_{uv} = \alpha_{vu} = \left\langle \frac{d}{du} B_{00}^n, \frac{d}{dv} B_{00}^n \right\rangle$$

Die **zweite Fundamentalform** kann dann wie in (7) berechnet werden.

$$II(u, v) = -\langle dN, dB_{00}^n \rangle =$$

$$= \beta_{uu} du du + \beta_{uv} du dv + \beta_{vu} dv du + \beta_{vv} dv dv, \tag{7}$$

$$\beta_{uu} = -\left\langle \frac{d}{du} N, \frac{d}{du} B_{00}^n \right\rangle, \quad \beta_{vv} = -\left\langle \frac{d}{dv} N, \frac{d}{dv} B_{00}^n \right\rangle,$$

$$\beta_{uv} = -\left\langle \frac{d}{du} N, \frac{d}{dv} B_{00}^n \right\rangle, \quad \beta_{vu} = -\left\langle \frac{d}{dv} N, \frac{d}{du} B_{00}^n \right\rangle$$

Mit N wird in (7) der Normalvektor $N(u, v)$ der Bezier-Fläche bezeichnet. Seine Herleitung erfolgt mithilfe des folgenden normierten Vektorprodukts aus (8):

$$N = \frac{v_1 \times v_2}{|v_1 \times v_2|}, \quad v_1 = \frac{d}{du} B_{00}^n, \quad v_2 = \frac{d}{dv} B_{00}^n \tag{8}$$

Man bezeichnet in der Differentialgeometrie den folgenden Ausdruck als mittlere Krümmung MK einer Fläche:

$$MK(u, v) = \frac{1}{2} \{ \alpha^{uu} \beta_{uu} + \alpha^{uv} \beta_{uv} + \alpha^{vu} \beta_{vu} + \alpha^{vv} \beta_{vv} \},$$

wobei

$$\begin{bmatrix} \alpha^{uu} & \alpha^{uv} \\ \alpha^{vu} & \alpha^{vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{uu} & \alpha_{uv} \\ \alpha_{vu} & \alpha_{vv} \end{bmatrix}^{-1} \tag{9}$$

Gradient GR der parametrischen Bezier-Fläche wird hier die Summe von Vektoren genannt, die den partiellen Ableitungen – nach u bzw. nach v – dieser Fläche $B_{00}^n(u, v)$ entsprechen, d.h.:

$$GR(u, v) = \frac{d}{du} B_{00}^n(u, v) + \frac{d}{dv} B_{00}^n(u, v) \quad (10)$$

Der Kosinus $CosW$ des Winkels zwischen den Vektoren, die den partiellen Ableitungen nach u bzw. nach v der Bezier-Fläche $B_{00}^n(u, v)$ entsprechen, kann Formel (11) entnommen werden.

$$CosW(u, v) = \frac{\left\langle \frac{d}{du} B_{00}^n(u, v), \frac{d}{dv} B_{00}^n(u, v) \right\rangle}{\left| \left\langle \frac{d}{du} B_{00}^n(u, v), \frac{d}{dv} B_{00}^n(u, v) \right\rangle \right|} \quad (11)$$

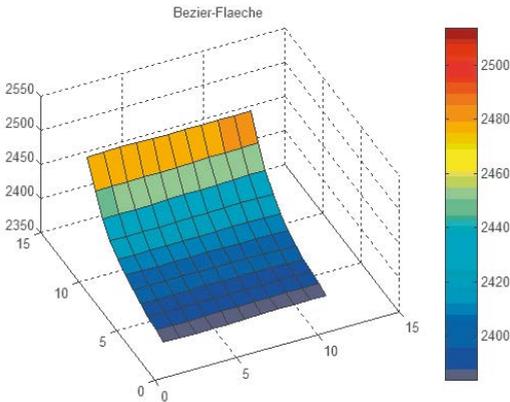


Abb. 2: Die Bezier-Fläche für das Jahr 1997. Die linke untere Ecke mit $u = 0, v = 0$ entspricht der Messstelle 2. Die rechte untere Ecke mit $u = 1, v = 0$ entspricht der Messstelle 6, vgl. Abb. 1.

4. Fallstudie Blockgletscher Reichenkar: Erzielte Ergebnisse

Anhand des Kontrollnetzes aus Abb. 1 wurden Bezier-Flächen für die Höhenmessungen am Reichenkar für die Jahre 1997-2000 und 2002-2004 hergeleitet. Abb. 2 zeigt eine solche Fläche für das Jahr 1997. Hierzu wurde eine Unterteilung der Parameter u und v aus $[0,1]$ in 10 gleich große Intervalle benutzt. Daher entstanden 11×11 – Gitter, die in den weiteren Abbildungen zur Visualisierung (Hoch- und Rechtswert) verwendet werden. Als Eckpunkte dienten dabei die Messstellen mit den Nummern $b_{00} = 2, b_{01} = 36, b_{10} = 6, b_{11} = 32$ aus Abb. 1. Sie entsprechen den Ecken „links unten“, „links oben“, „rechts unten“, „rechts oben“ in Abb. 2 und den weiteren Abbildungen.

Die Definitionen der unten berechneten Größen können Abschnitt 2 entnommen werden. Für die räumlich-zeitliche Deformationsanalyse von zwei Epochen wurde jeweils ein Jahr als Referenzeпоche ausgewählt und mit einem nachfolgenden verglichen.

Abb. 3a und 3b zeigen die mittleren Krümmungen. Die Längen der Differenz der Normalvektoren werden in Abb. 4a und 4b veranschaulicht. Den Abb. 5a und 5b können die Gradientenlängen der abgeleiteten Bezier-Flächen für einige Epochen entnommen werden. Der Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren, die den partiellen Ableitungen nach u bzw. nach v der Bezier-Fläche entsprechen, kann für die Jahre 1997 und 2003 den Abb. 6a und 6b entnommen werden.

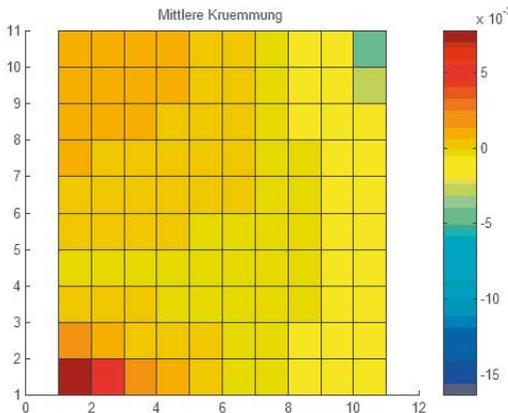


Abb. 3a: Die mittlere Krümmung für das Jahr 1997.

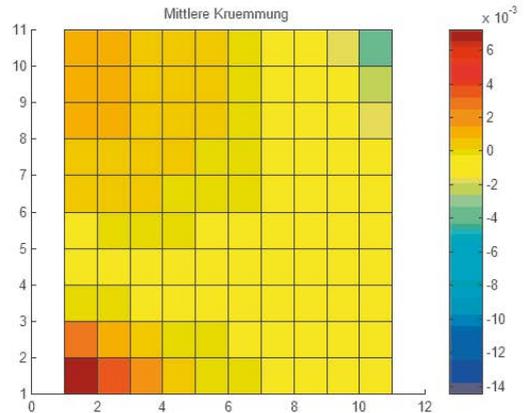


Abb. 3b: Die mittlere Krümmung für das Jahr 2003.

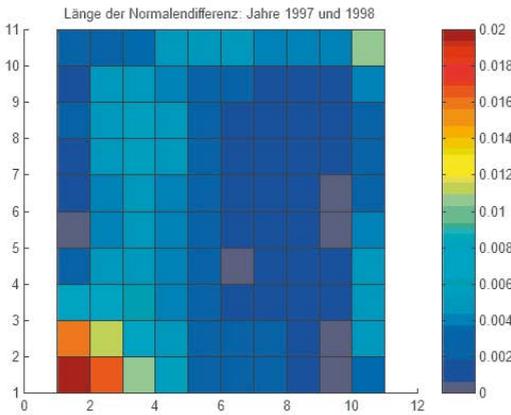


Abb. 4a: Die Länge der Differenz der Normalvektoren der entsprechenden Bezier-Flächen in den Jahren 1997 und 1998.

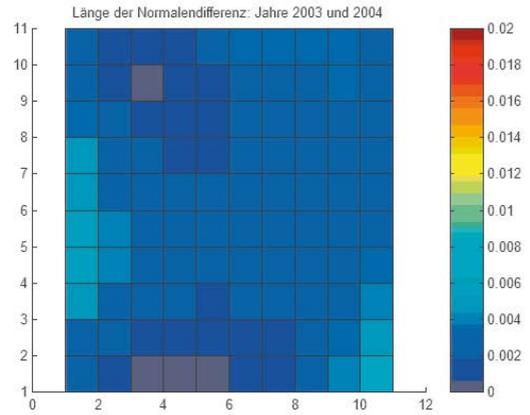


Abb. 4b: Die Länge der Differenz der Normalvektoren der entsprechenden Bezier-Flächen in den Jahren 2003 und 2004.

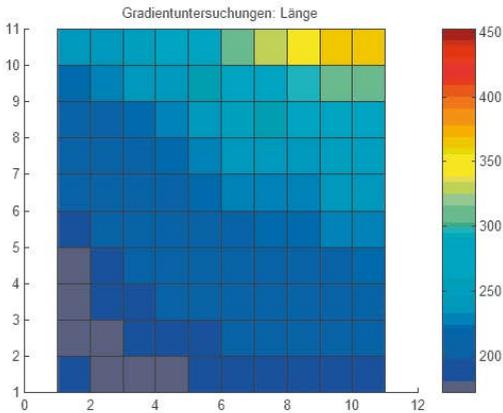


Abb. 5a: Die Gradientenlängen der abgeleiteten Bezier-Fläche für das Jahr 1997.

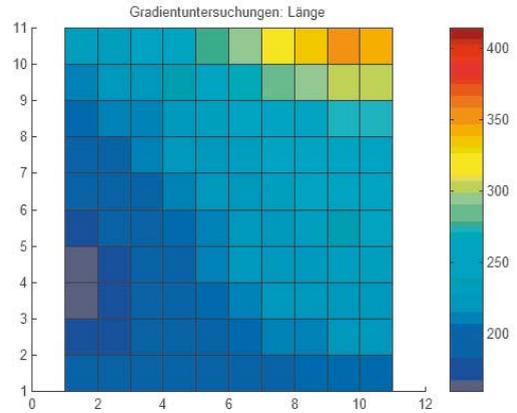


Abb. 5b: Die Gradientenlängen der abgeleiteten Bezier-Fläche für das Jahr 2003.

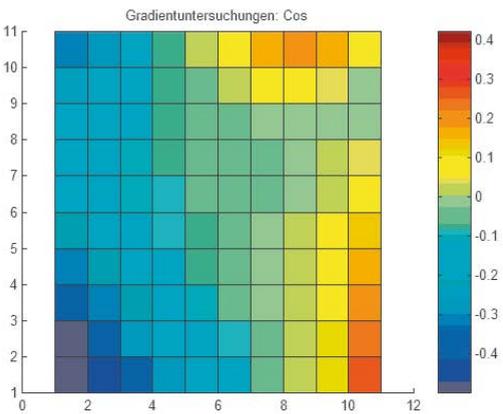


Abb. 6a: Der Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren, die den partiellen Ableitungen nach u bzw. nach v der abgeleiteten Bezier-Fläche entsprechen, im Jahr 1997.

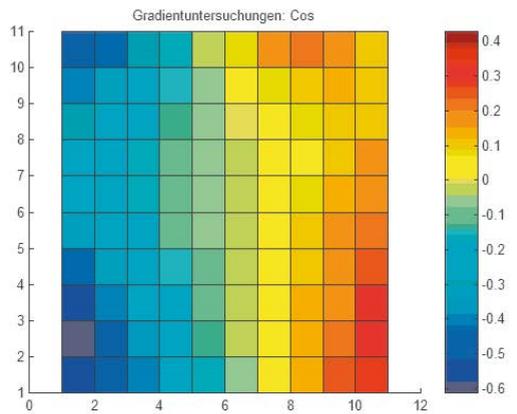


Abb. 6b: Der Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren, die den partiellen Ableitungen nach u bzw. nach v der abgeleiteten Bezier-Fläche entsprechen, im Jahr 2003.

5. Diskussion der Ergebnisse

In dieser Arbeit wird aufgezeigt, wie eine Deformationsanalyse von Reliefoberflächen mithilfe von Bezier-Splines aus einem alternativen oder unkonventionellen Blickwinkel erfolgen kann. Hierbei wird der Blockgletscher als komplettes Objekt aufgefasst und in den im CAD-Design üblichen Kategorien wie „vorderes Zungenprofil“, „die linke Kante des Gletschers“ usw. beschrieben.

Abbildung 2 zeigt, dass die Bezier-Fläche die wahren Höhenmessungen sehr stark glättet. Es soll nun wiederholt betont werden, dass der Blockgletscher ein sehr „raues“ Untersuchungsobjekt ist: Es empfiehlt sich daher, eine differential-geometrische Oberflächendeformationsanalyse wie in Abschnitt 3 nur auf einer so genannten Trendoberfläche durchzuführen.

Der absolute mittlere Fehler der Approximation des Blockgletschers mittels Bezier-Splines liegt bei ca. 5 m. Er wurde anhand der Gegenüberstellung einer linearen Interpolation von gemessenen Daten und der aus der Bezier-Fläche abgeleiteten Werten berechnet.

Während der axiale mittlere Bereich des Gletschers beinahe krümmungsfrei verläuft, erweist sich der linke vordere Zungenbereich als konkav. Der etwas höher gelegene steile Teil des Gletschers rechts ist dabei konvex, siehe Abb. 3a, 3b. Diese Fakten entsprechen auch dem „optischen“ Eindruck von diesem Blockgletscher.

Die „Aktivität“ der Oberfläche des Gletschers ist entlang der longitudinalen Gletscherkanten (links und rechts in Abb. 4a, 4b) am auffälligsten. Es besteht stets ein höheres Abrutschpotential für die Randblöcke, welches diese Aktivität erklären lässt. Die Gegenüberstellung von Abb. 4a und 4b zeigt, dass sich diese Aktivität in den Jahren 1997-1998 auf die vordere linke Ecke konzentrierte, während sich in den Jahren 2003-2004 der mittlere linke sowie der rechte obere Randbereich eher veränderte.

Die Gradientenuntersuchungen in Abb. 5a und 5b spiegeln den Unterschied der Neigung des Blockgletschers Reichenkar deutlich wider: Oben rechts befindet sich der steilste Abschnitt, während der Zungenbereich ziemlich flach ausfällt.

Nicht uninteressant ist die Untersuchung des Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren, die den partiellen Ableitungen nach u bzw. nach v der abgeleiteten Bezier-Fläche entsprechen. Die negativen Werte bedeuten, dass die Änderungen

der Oberfläche „quer“ und „entlang“ der Fortbewegung des Gletschers so gut wie gegenläufig sind: Der Winkel zwischen den oben genannten Vektoren ist dabei stumpf. Dagegen stehen positive Werte für die „Gleichläufigkeit“ dieser Änderungen (analog zu dem Vorzeichen eines Korrelationskoeffizienten). Diese Gleichläufigkeit kann das Monotonieverhalten der Oberfläche (steigend bzw. in beide Richtungen u und v fallend) oder die Tendenz zum „Abbiegens“ des Blockgletschers (dem Koordinatensystem aus Abb. 1 entspricht eine nordwestliche Abbiegungsrichtung) beschreiben.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Analyse der Geodynamik anhand von parametrischen Oberflächen eine durchaus anschauliche und sinnvolle Ergänzung der konventionellen Untersuchungsmethoden darstellt.

Die numerische Auswertung der vorgestellten Modelle erfolgte in MATLAB.

Danksagung

Die Autorin möchte sich bei Prof. Krainer, Institut für Geologie und Paläontologie der Universität Innsbruck, für die angenehme Zusammenarbeit und für die ihr zur Verfügung gestellten Daten herzlich bedanken. Zudem sei dem Staatsministerium für Wissenschaft und Kunst des Freistaates Sachsen gedankt, das durch die Gewährung einer Habilitationsförderung ebenfalls zu dieser Arbeit beigetragen hat.

Literatur

- [1] Farin, G. (1994). Kurven und Flächen in Computer Aided Geometric Design: Eine praktische Einführung. – Translation Copyright bei Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1994.
- [2] Grimm-Pitzinger A., S. Rudig (2005). Freiformflächen zur Modellierung von Deformationsmessungen. ZfV (Zeitschrift für Vermessungswesen), Heft 3, S. 180-183.
- [3] Hähle, H., E. W. Grafarend (2002). Erstellung eines digitalen Höhenmodells (DHM) mit Dreiecks-Bezier-Flächen. ZfV, Heft 3, S. 193-199.
- [4] Voosoghi B. (2000). Intrinsic Deformation Analysis of the Earth Surface. Based on 3-Dimensional Displacement Fields Derived From Space Geodetic Measurements. Dissertation, Universität Stuttgart.
- [5] Wälder O., K. Krainer, W. Mostler (2004). Praktische Anwendung von speziellen Spline-Verfahren zur Gletscherkinematik am Beispiel eines aktiven Blockgletschers (Tirol). VGI (Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation), Heft 3+4/2004, S. 107-117.
- [6] Wälder O. (2005). A method for sequential thinning of digital raster terrain models II: mixed locally adaptive wavelet-splines and anisotropy. PFG, Heft 2005/2, S. 123-127.

Anschrift der Autorin:

Dr. Olga Wälder, Institut für Kartographie, Technische Universität Dresden, Mommsenstrasse 13, D-01062 Dresden. Email: mailto:Olga.Waelder@tu-dresden.de