



Sensitivitätsanalyse beim Ausgleich von Messdaten mit einer Geraden bzw. einer Exponentialfunktion

Helmuth Späth ¹

¹ *Fachbereich Mathematik, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg. Postfach 2503, D-26111 Oldenburg, Germany*

VGI – Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation **91** (3), S. 175–178

2003

BibT_EX:

```
@ARTICLE{Spaeth_VGI_200323,  
Title = {Sensitivitätsanalyse beim Ausgleich von Messdaten mit einer  
Geraden bzw. einer Exponentialfunktion},  
Author = {Späth, Helmuth},  
Journal = {VGI -- Österreichische Zeitschrift für Vermessung und  
Geoinformation},  
Pages = {175--178},  
Number = {3},  
Year = {2003},  
Volume = {91}  
}
```





Sensitivitätsanalyse beim Ausgleich von Messdaten mit einer Geraden bzw. einer Exponentialfunktion

Helmuth Späth, Oldenburg

Zusammenfassung

Passt man Messdaten z.B. mit einer Geraden oder einer Exponentialfunktion an, so ist auch eine Frage, wie sich eventuelle Fehler in den Daten auf die zu bestimmenden Parameter auswirken. Es wird eine einfache Methode vorgestellt, die es bei vorliegenden Schätzungen für die (additiven oder prozentualen) Fehler in den Messdaten erlaubt, die Auswirkungen auf die Parameter zu studieren.

1. Problemstellung und Beispiel für die Gerade

Sind Messdaten $(x_i, y_i), i = 1, \dots, m$ in der Ebene gegeben, durch eine Gerade

$$y = ax + b \quad (1)$$

im Sinne der kleinsten Quadrate zu legen, so ist

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^m (ax_i + b - y_i)^2 \rightarrow \min \quad (2)$$

zu erreichen. Bekanntlich liefern die notwendigen Bedingungen $\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial S}{\partial b} = 0$ für ein Minimum das lineare Gleichungssystem

$$a \sum_{i=1}^m x_i^2 + b \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m x_i y_i \quad (3)$$

$$a \sum_{i=1}^m x_i + b m = \sum_{i=1}^m y_i$$

zur Bestimmung der Steigung a und des Achsenabschnittes b auf der y -Achse. Für den Fall, dass mindestens zwei der x_i verschieden sind, ist (3) auch hinreichend. Die dann eindeutig existierende Optimallösung (a^*, b^*) ist dann

$$a^* = \frac{1}{d} \left(m \sum_{i=1}^m x_i y_i - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m y_i \right), \quad (4)$$

$$b^* = \frac{1}{d} \left(- \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m x_i y_i + \sum_{i=1}^m x_i^2 \sum_{i=1}^m y_i \right), \quad (5)$$

$$\text{wobei } d = m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2$$

$$\text{und } \bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$$

Die minimale Fehlerquadratsumme $S(a^*, b^*)$ kann dann nach (2) berechnet werden. (Eine numerisch stabilere Form für den Ansatz (1), nämlich $y = \tilde{a}(x - \bar{x}) + \tilde{b}$ [3] wollen wir aus später ersichtlichen Gründen hier nicht diskutieren.)

Nun gehen wir davon aus, dass Messungenauigkeiten bzw. Störungen u_i und v_i in additiver Form

$$x_i + u_i, y_i + v_i, i = 1, \dots, m \quad (6)$$

oder in multiplikativer Form

$$x_i(1 + u_i), y_i(1 + v_i), i = 1, \dots, m \quad (7)$$

vorliegen können. Die Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{v} enthalten die möglichen additiven bzw. Prozentualen Fehler der gemessenen Datenpunkte (x_i, y_i) .

Wir wollen untersuchen, wie sich \mathbf{u} und \mathbf{v} auf die Lösungen $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ und $b(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ der Probleme

$$T(a, b) = \sum_{i=1}^m (a(x_i + u_i) + b - (y_i + v_i))^2 \rightarrow \min \quad (8)$$

bzw.

$$U(a, b) = \sum_{i=1}^m (a x_i(1 + u_i) + b - y_i(1 + v_i))^2 \rightarrow \min \quad (9)$$

auswirken, d.h. die Empfindlichkeit der Lösung gegenüber Messfehlern studieren können.

Dazu setzen wir (6) bzw. (7) anstatt x_i und y_i in (4) bzw. (5) ein und erhalten für (8) die optimale Lösung

$$a^* = \frac{1}{d} \left(m \sum_{i=1}^m (x_i + u_i)(y_i + v_i) - \sum_{i=1}^m (x_i + u_i) \sum_{i=1}^m (y_i + v_i) \right), \quad (10)$$

$$b^* = \frac{1}{d} \left(- \sum_{i=1}^m (x_i + u_i) \sum_{i=1}^m (x_i + u_i)(y_i + v_i) - \sum_{i=1}^m (x_i + u_i)^2 \sum_{i=1}^m (y_i + v_i) \right), \quad (11)$$

wo $d = \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x} + u_i - \bar{u})^2$ bzw. für (9)

$$a^* = \frac{1}{d} \left(m \sum_{i=1}^m x_i y_i (1 + u_i)(1 + v_i) - \sum_{i=1}^m x_i (1 + u_i) \sum_{i=1}^m y_i (1 + v_i) \right), \quad (12)$$

$$b^* = \frac{1}{d} \left(- \sum_{i=1}^m x_i (1 + u_i) \sum_{i=1}^m x_i y_i (1 + u_i)(1 + v_i) + \sum_{i=1}^m x_i^2 (1 + u_i)^2 \sum_{i=1}^m y_i (1 + v_i) \right), \quad (13)$$

$$\text{wo } d = m \sum_{i=1}^m x_i^2 (1 + u_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i (1 + u_i) \right)^2.$$

Sind wenigstens zwei der Werte $x_i + u_i$ bzw. $x_i(1 + u_i)$ verschieden, so existieren jeweils eindeutige optimale Lösungen $a^* = a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ und $b^* = b(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ von (8) bzw. (9), die linear von \mathbf{v} , aber nichtlinear von \mathbf{u} abhängen. Solche Probleme werden in allgemeiner Form in [1] behandelt.

Beispiel 1: Wir gehen von $m = 8$ gegebenen Punkten

x	1	3	4	6	7	8	9	10
y	2	1	4	5	4	4	6	5

aus. Diese sind zusammen mit der optimalen Ausgleichsgeraden (1) bzgl. (2) in Fig. 1 visualisiert. Für $u_i = v_i = 0, i = 1, \dots, m = 8$ ist

$$a = .4559, b = 1.10147, S = 5.368.$$

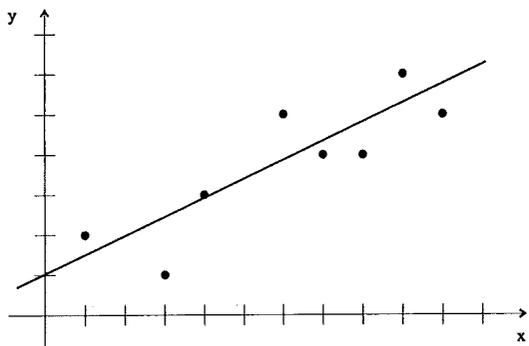


Abbildung 1

Wir betrachten nun zwei Arten von Störungen.

Fall 1: Der Reihe nach für $k = 1, \dots, m = 8$ werden nur einzelne Punkte gestört und zwar mit $u_i = v_i = 0$ für $i \neq k$ und $u_k = .5, v_k = -.5$ bei additiven und $u_k = .1, v_k = -.1$, d.h. 10%, bei multiplikativen Störungen. Die Ergebnisse finden sich in den Tabellen 1 und 2.

k	a	b	T
1	0.5126	0.5798	4.857
2	0.4739	0.8146	7.823
3	0.4743	0.8122	5.573
4	0.4604	0.8965	4.010
5	0.4393	1.0244	6.112
6	0.4259	1.1055	6.732
7	0.4269	1.0992	4.487
8	0.4072	1.2190	6.495

Tab. 1

k	a	b	U
1	0.4747	0.8710	5.137
2	0.4594	0.9638	6.070
3	0.4688	0.8762	5.404
4	0.4609	0.8874	3.956
5	0.4372	1.0385	6.092
6	0.4197	1.1396	6.798
7	0.4150	1.1385	4.354
8	0.3878	1.3122	6.907

Tab. 2

Fall 2: Wir setzen $u_i = (r - .5)f, v_i = (r - .5)f, i = 1, \dots, m$ wobei r sich bei jedem Auftreten ändert und eine in $[0, 1]$ gleichverteilte Pseudozufallszahl ist. Hier werden also gleichzeitig alle Messpunkte abgeändert. Im additiven Fall setzen wir $f = .5$, im multiplikativen Fall $f = .1$. Dabei führen wir jeweils $n = 1, \dots, 10$ Simulationen durch. Die Ergebnisse finden sich in den Tabellen 3 und 4.

n	a	b	T
1	0.4359	1.1557	6.506
2	0.4246	1.2138	5.581
3	0.4156	1.3016	6.533
4	0.4614	0.9090	5.612
5	0.4446	1.1408	5.784
6	0.4213	1.1988	6.475
7	0.4088	1.2579	6.645
8	0.4614	0.9649	4.975
9	0.4529	1.0549	6.812
10	0.4633	0.9465	4.440

Tab. 3

n	a	b	U
1	0.4545	1.0373	6.346
2	0.4063	1.2682	6.365
3	0.4767	0.9420	5.778
4	0.4758	0.9776	5.471
5	0.4603	0.9412	4.911
6	0.4504	1.0424	6.363
7	0.4384	1.0645	4.437
8	0.4502	1.0145	5.334
9	0.4360	1.1393	6.965
10	0.4519	1.0825	6.315

Tab. 4

In allen vier Tabellen kann man deutlich sehen, wie sich die unterschiedlichen Störungen auf die Ergebnisse für a und b und die zugehörigen Fehlerquadratsummen T und U auswirken.

2. Problemstellung und Beispiel für eine Exponentialfunktion

Statt (1) haben wir jetzt das Modell

$$y = c + b e^{ax}, \quad (14)$$

bei dem der Parameter a nichtlinear auftritt. (Für $b > 0$ und $a < 0$ wird ein Abklingvorgang beschrieben.) Statt (2) ist hier

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^m (c + b e^{ax_i} - y_i)^2 \quad (15)$$

zu minimieren. Die notwendigen Bedingungen $\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial S}{\partial b} = 0$ liefern

$$b \sum_{i=1}^m e^{2ax_i} + c \sum_{i=1}^m e^{ax_i} = \sum_{i=1}^m y_i e^{ax_i}, \quad (16)$$

$$b \sum_{i=1}^m e^{ax_i} + c m = \sum_{i=1}^m y_i.$$

Hieraus lassen sich b und c nach den Formeln (4) und (5), wenn man dort x_i durch e^{ax_i} ersetzt, für $a \neq 0$ eindeutig als Funktionen $b(a)$ und $c(a)$ berechnen, wenn man wieder voraussetzt, dass wenigstens zwei verschiedene x_i verschieden sind. Diese beiden Funktionen kann man in (15) einsetzen und erhält [3] mit

$$S(a) = S(a, b(a), c(a)) \quad (17)$$

eine zu minimierende Funktion in nur noch einer (aber nichtlinearen) Variablen a . Geht man von der Verfügbarkeit eines genügend kleinen Intervalls $[a_1, a_2]$ aus, indem das globale Minimum a^* und kein Nebenminimum liegt, so kann man z.B. mit einem Trisektionsverfahren, wie es in der Subroutine FMIN [2] implementiert ist, den Parameter a^* berechnen und anschließend $b^* = b(a^*)$ und $c^* = c(a^*)$ erhalten.

Beispiel 2: Sei [3] $m = 11$ und

x	0	1	3	4	7.5	10.5	13	15	18	20	25
y	15	13	10	10	6	5	3	4	1	2	.3

Da ein Abklingvorgang vorliegt, ist $a^* < 0$ zu erwarten. Dies legt $[a_1, a_2] = [-1, 0]$ nahe. Damit findet man für $u_i = v_i = 0$ ($i = 1, \dots, m = 11$) die Werte $a = -.102, b = 15.202, c = -.561, S = 4.254$.

Die gegebenen Daten und die ausgleichende Funktion (14) finden sich in Fig. 2.

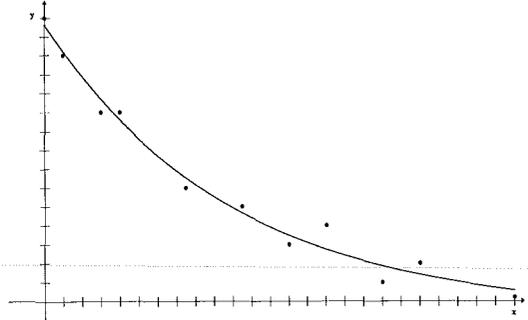


Abbildung 2

Setzt man in (15) und (16) statt x_i und y_i die additiven (6) bzw. multiplikativen Störungen (7) ein, so kann man wieder die durch diese bedingten Parameteränderungen studieren. Gehen wir wie in *Beispiel 1, Fall 2* vor, so ergeben sich die Tabellen 5 und 6. Hierbei haben T und U die (8) und (9) entsprechende Bedeutung für (14).

n	a	b	c	T
1	-0.1046	14.6415	-0.335	5.419
2	-0.1068	15.0521	-0.387	5.015
3	-0.0968	15.1915	-0.829	4.094
4	-0.1089	15.4546	-0.404	5.813
5	-0.1045	15.0188	-0.451	4.594
6	-0.1060	15.0353	-0.350	4.150
7	-0.1128	14.7381	-0.139	5.153
8	-0.1042	15.0662	-0.458	4.398
9	-0.0950	15.4531	-0.951	4.729
10	-0.0996	15.1678	-0.608	5.235

Tab. 5

n	a	b	c	U
1	-0.1002	15.1207	-0.605	4.811
2	-0.1094	14.8179	-0.142	4.993
3	-0.1080	15.2269	-0.354	5.304
4	-0.1011	15.0254	-0.481	4.056
5	-0.1017	14.7699	-0.503	3.891
6	-0.1046	15.2887	-0.452	5.007
7	-0.101	14.9729	-0.478	3.828
8	-0.1065	15.3062	-0.531	4.145
9	-0.0982	15.3072	-0.689	4.642
10	-0.1030	15.5951	-0.596	3.854

Tab. 6

Literatur

- [1] Alt. W.: Nichtlineare Optimierung. Vieweg 2002.
- [2] Forsythe. G.E.; Malcolm. M.A.; Moler. C.B.: Computer Methods for Mathematical Computations. Prentice Hall 1977.
- [3] Späth. H.: Algorithmen für elementar Ausgleichsmodelle. München 1973.

Anschrift des Autors:

Prof. Dr. Helmuth Späth. Fachbereich Mathematik. Carl von Ossietzky Universität Oldenburg. Postfach 2503. D-26111 Oldenburg. Germany. e-mail: spaeth@mathematik.uni-oldenburg.de



Metro Delhi – Projektmanagement in der Ingenieurgeodäsie

Albrecht Prader, Wien und Gerald Muhr, Graz

Zusammenfassung

Im Rahmen des beginnenden U-Bahn-Ausbaus in der indischen Metropole Neu Delhi beauftragte die DMRC (Delhi Metro Rail Corporation) das Joint Venture IMCC (International Metro Civil Contractors) mit dem Bau des ersten untertägigen U-Bahn-Bauloses in Delhi. IMCC besteht aus den Firmen DYWIDAG (Deutschland), SAMSUNG (Südkorea), L&T (Indien), SHIMIZU (Japan) und IRCON (Indien).

Da die organisatorischen Anforderungen erfahrungsgemäß mit der Projektgröße exponentiell ansteigen, waren angesichts der im U-Bahn-Bau einzigartigen Dimensionen des Projektes (Bauloslänge ca. 7 km, Auftragssumme ca. 400 Mio. Dollar) besondere methodische Vorarbeiten unerlässlich. In monatelanger Entwicklung wurde daher ein Gesamtkonzept für Vermessung und Deformationsmessung, für Daten-, Personal-, Subunternehmer-, Geräte- und Fuhrparkmanagement erstellt. In der Umsetzungsphase musste das Konzept laufend an die lokalen Rahmenbedingungen angepasst werden. Mangels Vorprojekten und aufgrund der in Indien herrschenden schwierigen Zustände erforderte dies sowohl organisatorische als auch persönliche Höchstleistungen.

In fachlicher Hinsicht umfasst das Projekt ein umfangreiches Konglomerat von Tunnelbau-Techniken: vom Tübbing-Fertigteilewerk über maschinelle Tunnelvortriebe und unterirdischen Ausbruch ganzer Stationen mit Sprengvortrieb und NATM (New Austrian Tunneling Method) bis hin zu Stationsbau mit Schlitzwandtechnik.

Die Verantwortung für die Konzeption und Organisation der gesamten Vermessung und Deformationsmessung, sowie der Vortriebssteuerungen oblag dem zuständigen Chief Surveyor (Autor), der von der Firma Geodata GmbH, Leoben, Österreich, gestellt wurde.

Abstract

Since the need of public transportation became obvious in the congested urban areas of India a metro concept was developed for the capital New Delhi by Indian authorities represented by DMRC (Delhi Metro Rail Corporation). The Joint Venture IMCC, consisting of the partners DYWIDAG (Germany), SAMSUNG (South Korea), L&T (India), SHIMIZU (Japan) and IRCON (India), got the contract to build the first underground metro line in Delhi.

Experience shows that an increase of the project size leads to an exponential increase of organisation and management requirements. With a length of about 7 km and a contract sum of about 400 million dollars the Metro Delhi Project MC1B was unique worldwide. Therefore a methodical development of a concept for survey, monitoring, data-, staff- and subcontractor-management, instrument- and car park-administration was required. The implementation and adaptation of the concept was difficult because of the non-availability of similar projects in the past and the actual conditions in India. It required high performance in organisation and strong personal commitment.

The project covers a huge conglomeration of tunnelling techniques: the installation of a tunnel segment factory, Tunnel Bore Machines (TBM), Earth Pressure Balance Machines (EPBM), the New Austrian Tunneling Method (NATM) excavation for underground tunnels and stations and the construction of stations and structures with diaphragm walls are only some highlights of the project.

The responsibility for the conception and organisation of all survey works, optical monitoring and tunnel guidance was with the Chief Surveyor (author) from the company Geodata GmbH, Leoben, Austria.

1. Das Projekt MC1B

Das Joint Venture IMCC erhielt nach langwierigen Vertragsverhandlungen mit dem Bauherrn DMRC (Delhi Metro Rail Corporation) im Frühjahr

2001 den Zuschlag für den Bau des ersten untertägigen U-Bahn-Abschnittes der indischen Metropole New Delhi.

Das Projekt wurde als Turn-Key-Project vergeben. Damit muss der Auftragnehmer bei Ver-