



Gebrauchsformeln für die UTM-Projektion nach Krüger

Kurt Bretterbauer ¹

¹ *Inst. f. Geodäsie u. Geophysik, TU Wien, Gusshausstrasse 27-29, A-1040 Wien*

VGI – Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation **91** (3), S. 163–165

2003

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Bretterbauer_VGI_200321,  
Title = {Gebrauchsformeln f{"u}r die UTM-Projektion nach Kr{"u}ger},  
Author = {Bretterbauer, Kurt},  
Journal = {VGI -- {"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessung und  
Geoinformation},  
Pages = {163--165},  
Number = {3},  
Year = {2003},  
Volume = {91}  
}
```





Gebrauchsformeln für die UTM-Projektion nach Krüger

Kurt Bretterbauer, Wien

Zusammenfassung

Es existieren verschiedene Lösungen der konformen Meridianstreifenprojektion nach Gauss. Die gebräuchlichsten beruhen auf Taylorentwicklungen und sind für 3°-Streifen ausgelegt. Die UTM-Projektion beruht auf 6°-Streifen, was eine Erweiterung der Taylorentwicklung, oder den Rückgriff auf mathematisch anspruchsvollere Lösungen erforderlich macht. Vor bald hundert Jahren hat *Krüger* seine grundlegende Arbeit über die konforme Abbildung des Erdellipsoides veröffentlicht. Sie verdient es, wieder in Erinnerung gerufen zu werden. Die *Krüger'schen* Formeln sind bemerkenswert symmetrisch gebaut und liefern über sehr kurze Reihen mm-Genauigkeit selbst für extrem breite Meridianstreifen. Die Formeln werden ohne Herleitung für den praktischen Gebrauch aufbereitet und wurden bis 50° Längendifferenz getestet.

Abstract

There are several solutions for the conformal meridian strip projection as developed by Gauss in use. Commonly they are based on Taylor expansions for 3°-strips. The UTM-projection, however, demands 6°-strips which fact necessitates an extension of the Taylor series or the employment of mathematically more advanced solutions. Almost a hundred years ago, *Krüger* published his fundamental work on the conformal projection of the Earth ellipsoid. His formulas deserve to be brought back to memory because of their high accuracy even for extremely wide strips and their remarkable symmetrical construction. The formulas are prepared for practical usage without the theoretical background and have been tested up to 50° distance from the initial meridian.

1. Einführung

Die Transformation der ellipsoidischen Koordinaten (B, L) in konforme *Gauss-Krüger*-Koordinaten (x, y) wird meist mit Formeln durchgeführt, die auf Taylorreihen beruhen (siehe z.B. [1], [2]). Diese Reihen konvergieren schlecht, garantieren aber mm-Genauigkeit für die in vielen Ländern üblichen 3°-Meridianstreifen. Diese Reihen sind nicht sehr übersichtlich, weshalb ich selbst immer die auf *Hirvonen* zurückgehenden einfachen, kurzen Näherungsformeln benützt habe [3]. Allerdings können diese ab 2°-Abstand vom Mittelmeridian zu Fehlern von 2 – 3 mm vor allem in der x -Koordinate führen, sind also für die 6°-UTM-Streifen nur bedingt geeignet. Zwar existieren Entwicklungen zur konformen Abbildung sehr breiter Streifen, ja praktisch des ganzen Ellipsoides mit beliebiger Genauigkeit, diese sind mathematisch aber erheblich anspruchsvoller [4], [5], [6]. Es liegt in der Natur des Problems, dass keine dieser Lösungen ohne numerische Approximationen auskommt, wie z.B. die numerische Integration elliptischer Integrale. Das gilt auch für das klassische Werk von *Krüger* [7], des zweiten Namensgeber der Meridianstreifenprojektion aus dem Jahre 1912. Es wurde viel zitiert aber kaum für praktische Berechnungen herangezogen. Der Grund lag in *Krüger's* ausgie-

bigen Gebrauch von Hyperbelfunktionen, deren Berechnung ohne elektronische Hilfsmittel sehr aufwendig ist. Dieses Argument fällt nun weg da jeder bessere Taschenrechner diese Funktionen darstellen kann. Gegenüber anderen Entwicklungen besticht die *Krüger'sche* Lösung durch bemerkenswerte Symmetrien in den Formeln und durch die hohe Genauigkeit selbst für extrem breite Meridianstreifen trotz relativer Kürze der Reihen.

2. Die Formeln von *Krüger*

Im folgenden zitiere ich die Formeln ohne Herleitung; sie kann bei Bedarf in [7] nachgelesen werden. Der Algorithmus ist für die praktische Berechnung bzw. Programmierung aufbereitet. In den Bezeichnungen habe ich leichte Änderungen vorgenommen, da diese in der älteren Literatur manchmal verwirrend sind. Zur besseren Hervorhebung werden die Hyperbelfunktionen in Grossbuchstaben geschrieben. So steht z.B. ATANH für area tan hyp, also die Umkehrfunktion des TANH. Wichtig ist zu beachten, welche Grössen im Winkelmass und welche im Bogenmass einzuführen sind, was aber in jedem Fall leicht einsichtig sein sollte.

Für ein durch die grosse Halbachse a und die 1. Exzentrizität e^2 gegebenes Ellipsoid werden für die konforme Abbildung und ihre Inversion die folgenden Ellipsoidkonstanten berechnet und gespeichert:

$$(1) \quad n = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}}, \quad A = \frac{a}{(1 + n)} \left(1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64} \right),$$

$$\beta_1 = \frac{n}{2} - \frac{2}{3}n^2 + \frac{37}{96}n^3 - \frac{1}{360}n^4,$$

$$(2) \quad \beta_2 = \frac{1}{48}n^2 + \frac{1}{15}n^3 - \frac{437}{1440}n^4,$$

$$\beta_3 = \frac{17}{480}n^3 - \frac{37}{840}n^4.$$

$$\gamma_1 = \frac{n}{2} - \frac{2}{3}n^2 + \frac{5}{16}n^3 + \frac{41}{180}n^4,$$

$$(3) \quad \gamma_2 = \frac{13}{48}n^2 - \frac{3}{5}n^3 + \frac{557}{1440}n^4,$$

$$\gamma_3 = \frac{61}{240}n^3 - \frac{103}{140}n^4.$$

$$\delta_1 = 2n - \frac{2}{3}n^2 - 2n^3 + \frac{116}{45}n^4,$$

$$(4) \quad \delta_2 = \frac{7}{3}n^2 - \frac{8}{5}n^3 - \frac{227}{45}n^4,$$

$$\delta_3 = \frac{56}{15}n^3 - \frac{136}{35}n^4.$$

2.1. Transformation ellipsoidischer Koordinaten (B, L) in konforme ebene Koordinaten (x, y)

Gegeben seien die ellipsoidische Breite B und die Längendifferenz zum Mittelmeridian ΔL . Es gilt:

$$(5) \quad k = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \cdot \left(\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right)^{e/2}.$$

Achtung! Hierin ist e die Wurzel aus der 1. Exzentrizität und nicht die Basis des natürlichen Logarithmus.

$$(6) \quad b = 2 \arctan(k) - \pi/2,$$

$$(7) \quad \xi = \arctan(\tan b \sec \Delta L), \quad \eta = \text{ATANH}\{\sin \Delta L \cos b\}$$

Damit folgen die gesuchten konformen Koordinaten aus:

$$(8) \quad \begin{aligned} x &= A\{\xi + \gamma_1 \sin(2\xi)\text{COSH}(2\eta) + \gamma_2 \sin(4\xi)\text{COSH}(4\eta) + \\ &\quad + \gamma_3 \sin(6\xi)\text{COSH}(6\eta)\}, \\ y &= A\{\eta + \gamma_1 \cos(2\xi)\text{SINH}(2\eta) + \gamma_2 \cos(4\xi)\text{SINH}(4\eta) + \\ &\quad + \gamma_3 \cos(6\xi)\text{SINH}(6\eta)\}, \end{aligned}$$

Die für das UTM-System charakteristische Reduktion dieser Koordinaten mit dem Faktor 0.9996 und die Begriffe „Northing“ bzw. „Easting“ werden hier, da nicht wesentlich, übergangen.

2.2. Transformation konformer ebener Koordinaten (x, y) in ellipsoidische Koordinaten $(B, \Delta L)$

Berechne die Hilfsgrössen:

$$(9) \quad \xi = x/A, \quad \eta = y/A,$$

und damit zunächst

$$(10) \quad \begin{aligned} \xi^* &= \xi - \beta_1 \sin(2\xi)\text{COSH}(2\eta) - \beta_2 \sin(4\xi)\text{COSH}(4\eta) - \\ &\quad - \beta_3 \sin(6\xi)\text{COSH}(6\eta), \\ \eta^* &= \eta - \beta_1 \cos(2\xi)\text{SINH}(2\eta) - \beta_2 \cos(4\xi)\text{SINH}(4\eta) - \\ &\quad - \beta_3 \cos(6\xi)\text{SINH}(6\eta). \end{aligned}$$

Das gesuchte Endergebnis gewinnt man aus:

$$(11) \quad b = \arcsin \left(\frac{\sin(\xi^*)}{\text{COSH}(\eta^*)} \right),$$

$$(12) \quad B = b + \delta_1 \sin(2b) + \delta_2 \sin(4b) + \delta_3 \sin(6b),$$

$$(13) \quad \Delta L = \arctan \left(\frac{\text{SINH}(\eta^*)}{\cos(\xi^*)} \right).$$

Diese Formeln mögen umständlich erscheinen, vor allem wegen der Berechnung der β , γ und δ . Man bedenke aber, dass diese Grössen Ellipsoidkonstanten sind, die man ein für alle Mal berechnet und speichert. Alles übrige ist sehr einfach zu programmieren, sogar auf einem Taschenrechner. Der besondere Wert dieser übersichtlichen Formeln liegt in ihrer hohen Genauigkeit auch für extrem grosse Abstände vom Zentralmeridian.

3. Numerische Berechnungen

In der Tabelle sind die numerischen Werte der Konstanten für das Ellipsoid von Bessel und für jenes des GRS 80 angegeben. Nach den Formeln (1) – (4) erhält man:

Term	Bessel	GRS 80
A	6 377 397.1550 m	6 378 137.0000 m
e^2	6.674 372 231·10 ⁻³	6.694 380 023·10 ⁻³
n	1.674 184 801·10 ⁻³	1.679 220 395·10 ⁻³
A	6 366 742.5202 m	6 367 449.1458 m
γ_1	8.352 252 72·10 ⁻⁴	8.377 318 25·10 ⁻⁴
γ_2	7.563 05·10 ⁻⁷	7.608 53·10 ⁻⁷
γ_3	1.187·10 ⁻⁹	1.198·10 ⁻⁹
β_1	8.352 256 13·10 ⁻⁴	8.377 321 68·10 ⁻⁴
β_2	5.870 4·10 ⁻⁸	5.905 9·10 ⁻⁸
β_3	1.66·10 ⁻¹⁰	1.67·10 ⁻¹⁰
δ_1	3.346 491 641·10 ⁻³	3.356 551 486·10 ⁻³
δ_2	6.532 540·10 ⁻⁶	6.571 873·10 ⁻⁶
δ_3	1.748 8·10 ⁻⁸	1.764 7·10 ⁻⁸

Als Demonstrationsbeispiel habe ich jenes gewählt, das *Krüger* seinerzeit logarithmisch berechnet hat. Gegeben: $B = 48^\circ$, $\Delta L = 8^\circ$, gesucht: x, y auf Basis des Bessel-Ellipsoides. Zur Erläuterung werden auch die Zwischenergebnisse ausgewiesen. Man erhält:

aus (5) $k = 2.5921839169$,
 aus (6) $b = 47^\circ.8092551995$,
 aus (7) $\xi = 48^\circ.0879361926$,
 $\eta = 0.0937424118$,
 aus (8) $x = 5\,348\,940.146\text{ m}$,
 $y = 596\,724.111\text{ m}$,

in vollkommener Übereinstimmung mit dem Ergebnis von *Krüger*.

Für die umgekehrte Transformation $x, y \rightarrow B, \Delta L$ wird von den soeben errechneten Werten ausgegangen. Man erhält:

aus (9) $\xi = 48^\circ.1363419735$,
 $\eta = 0.0937251833$,
 aus (10) $\xi^* = 48^\circ.0879361929$,
 $\eta^* = 0.0937424118$,
 aus (11) $b = 47^\circ.8092551999$,
 aus (12) $B = 48^\circ 00' 00''.0000$,
 aus (13) $\Delta L = 8^\circ 00' 00''.0000$.

Um die wirkliche Leistungsfähigkeit der *Krügerschen* Formeln zu testen, habe ich ein Programm benützt, das von dem leider zu früh verstorbenen Wiener Mathematiker *Dr. Walter Heindl* erstellt wurde. Am Beginn einer sich anbahnenden Kooperation in kartographischen Fragen hat er mir ein EXE-File seiner Lösung der *Gauss-Krüger* Abbildung übergeben. Sein Verfahren erlaubt die Abbildung nahezu des ganzen Ellipsoides mit extrem hoher Rechengenauigkeit. Leider ist es nicht mehr zur Publikation dieser Lösung gekommen. Vergleichsrechnungen nach obigem Algorithmus und dem Programm von *Dr. Heindl* haben erst bei einem Längenabstand

vom Mittelmeridian $\Delta L = \pm 50^\circ$ Abweichungen von 1 mm in beiden Koordinaten ergeben! Hier das Ergebnis dieser Berechnung:

Ellipsoid Bessel: $B = 48^\circ, \Delta L = 50^\circ$,

Dr. Heindl: $x = 6\,649\,901.177\text{ m}$
 $y = 3\,617\,710.791\text{ m}$

Krüger: $x = 6\,649\,901.176\text{ m}$
 $y = 3\,617\,710.792\text{ m}$.

Wer will, kann also ganz Europa auf einen einzigen Streifen und auf den Millimeter genau konform abbilden.

Literatur

- [1] *Jordan-Eggert-Kneissl*: Handbuch der Vermessungskunde, Bd. IV, Metzler, Stuttgart, 1959.
- [2] *Heck, B.*: Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung. Wichmann, Karlsruhe, 1987.
- [3] *Bretterbauer, K.*: Die Gauss-Krüger-Abbildung einfach dargestellt. Österr. Zeitschr. f. Verm. u. Geoinformation, Heft 3, 1995.
- [4] *Ecker, E.*: Über die Gauss-Krüger-Abbildung. Österr. Zeitschr. f. Verm. u. Photogrammetrie, Heft 3/4, 1977.
- [5] *Gerstl, M.*: Die Gauss-Krügersche Abbildung mit direkter Berechnung . . . , DGK, Reihe C, Nr. 296, 1984
- [6] *Glasmacher, H.*: Die Gaußsche Ellipsoid-Abbildung mit komplexer Arithmetik. Univ. d. BW. München, Heft 29, 1987.
- [7] *Krüger, L.*: Konforme Abbildung des Erdellipsoides in die Ebene. Veröff. d. königl. Preussischen Geodätischen Instituts, Folge Nr. 52, Teubner, Leipzig, 1912.

Anschrift des Autors:

em. o. Univ. Prof. Dr. Kurt Bretterbauer, Inst. f. Geodäsie u. Geophysik, TU Wien, Gusshausstrasse 27-29, A-1040 Wien, e-mail: kbretter@luna.tuwien.ac.at