Paper-ID: VGI_200318

Zur numerischen Berechnung von Schnittkurven zwischen Zylinder und Kugel

Helmuth Späth [1]

[1] *Fachbereich Mathematik, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Postfach 2503, D-26111 Oldenburg, Germany*

VGI – Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation **91** (2), S. 129–132

2003

BibTEX:

```
@ARTICLE{Spaeth_VGI_200318,
Title = {Zur numerischen Berechnung von Schnittkurven zwischen Zylinder und
   Kugel},
Author = {Sp{\"a}th, Helmuth},
Journal = {VGI -- {\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessung und
   Geoinformation},
Pages = {129--132},
Number = {2},
Year = {2003},
Volume = {91}
}
```

Literatur

[1] BBT-EWIV: Kurzbericht 2002, Band 3: Vermessung. Quelle: www.bbt-ewiv.com

[2] *Bernhard Jüptner:* Geobasisdaten in Österreich. Vermessung und Geoinformation, Heft 2, 2000, S. 117–121.

[3] ARGE Obex-Pfeifer-Tiwag / BBT-EWIV: Geodätische Grundlagenvermessung. Abschlussbericht zum Auftrag D0021 der BBT EWIV, unveröffentlicht.

[4] BEV-Produktinformationen: Digitales Geländehöhenmodell. Quelle: www.bev.at/prodinfo/dgm/dgm_3f_main.htm

Anschrift der Autoren

Baurat h.c. Dipl.-Ing. Klaus Wenger-Oehn, Dipl.-Ing. Roland Würländer, Ziviltechnikerbüro Wenger-Oehn, Franz-Josef-Str.33, A-5020 Salzburg. Email: office@-wenger-oehn.at

Zur numerischen Berechnung von Schnittkurven zwischen Zylinder und Kugel

Helmuth Späth, Oldenburg

Zusammenfassung

Gegeben sei ein beliebig im Raum gedrehter Zylinder und eine Kugel. Wir entwickeln ein numerisches Verfahren, mit dem entschieden werden kann, ob die beiden Körperoberflächen eine gemeinsame Schnittkurve haben oder nicht und bestimmen diese gegebenenfalls durch Berechnung beliebig dichter Punkten auf ihr.

1. Problemstellung

Es seien $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$. Ist $\boldsymbol{p}$ der Mittelpunkt einer Kugel mit Radius R, so lautet deren Gleichung

$$\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p} \|^2 = R^2 \qquad (1)$$

Ist $\boldsymbol{a}$ mit $\|\boldsymbol{a}\| = 1$ ($\| \, \|$ bezeichnet die Euklidische Norm) die Achsenrichtung eines Zylinders mit Radius r und einem Achsenpunkt $\boldsymbol{q}$, so lautet dessen Gleichung [1]:

$$\| (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}) \times \boldsymbol{a} \|^2 = r^2 \qquad (2)$$

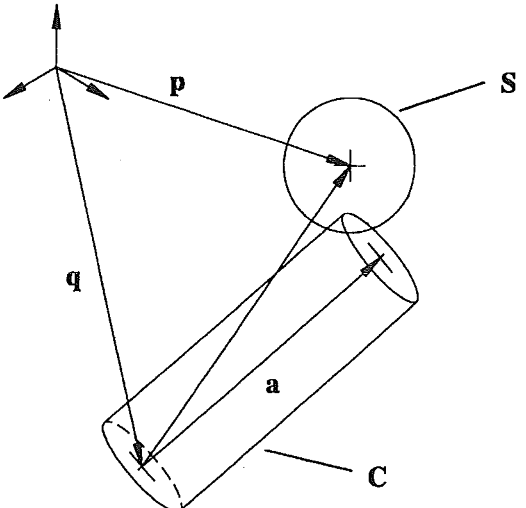

Abb. 1

Hierbei bedeutet das $\times$ Vektorprodukt. Für diese Darstellung (siehe Fig. 1, wo S die Kugel und C den Zylinder bedeutet) kann man zwar entscheiden [2], ob sich die beiden Körperoberflächen schneiden oder nicht, aber man kann die gegebenenfalls vorhandene Schnittkurve nicht berechnen. Es wird sich herausstellen, dass eine Berechnung der Schnittkurve und damit auch eine Entscheidung über ihre Existenz relativ einfach möglich wird, indem man zu einer parametrischen Darstellung eines Zylinders übergeht [3]. Ein Zylinder mit der z-Achse $\boldsymbol{a} = (0,0,1)$ als Achsenrichtung und $\boldsymbol{q} = (a, b, 0)$ lautet in Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x &= a + r\cos t, && 0 \le t < 2\pi \\ y &= b + r\sin t, && \\ z &= u, && -\infty < \boldsymbol{u} < \infty. \end{aligned} \qquad (3)$$

Setzt man in (2) ein, so erhält man die Kreisgleichung

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

zurück und z ist beliebig). Aus (3) erhält man einen beliebigen Zylinder im Raum, indem man noch in der y–z-Ebene um den Winkel γ und in der x–z-Ebene um den Winkel β dreht, d. h. festlegt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + r\cos t \\ b + r\sin t \\ u \end{pmatrix}$$

Wir setzen also im folgenden a, b, r, β, γ *als bekannt voraus; man kann diese Werte bei Vorliegen der Darstellung (2) daraus berechnen. Ausmultipliziert lautet (4)*

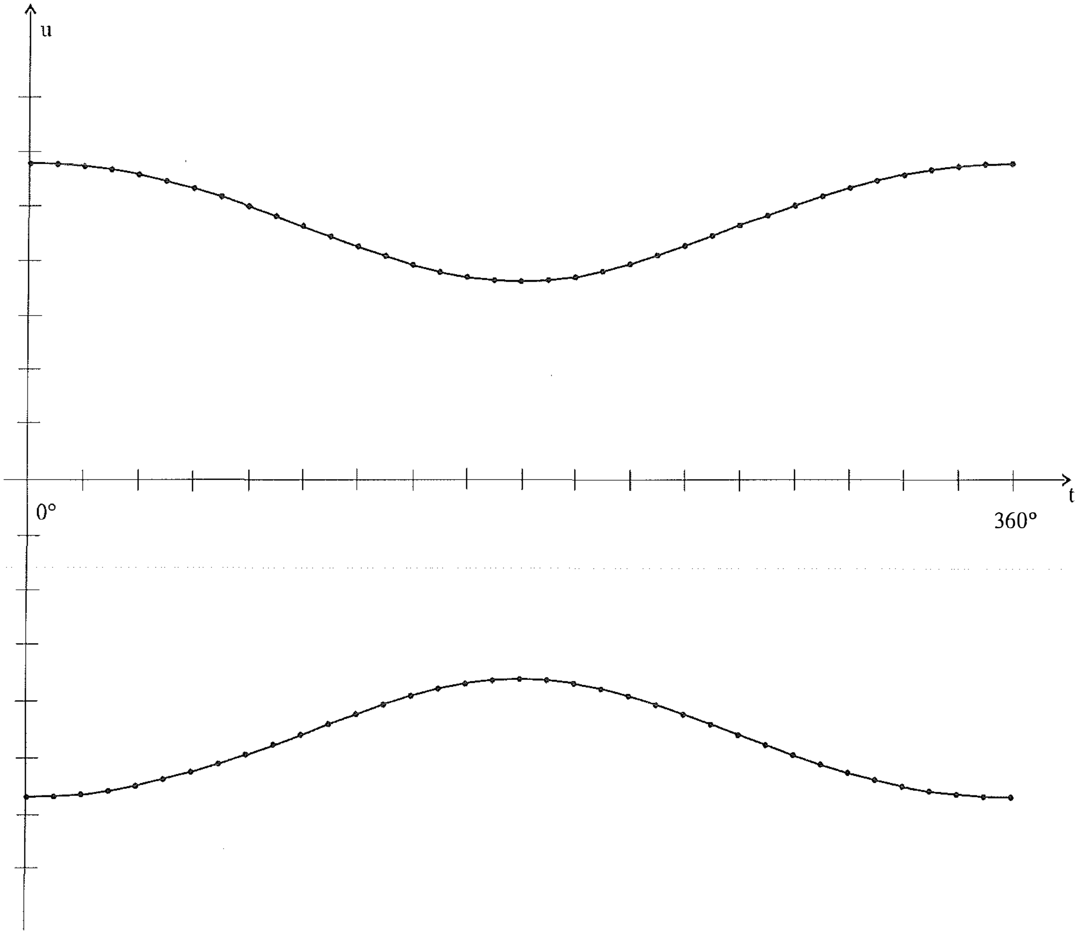

Abb. 2

$$x = \cos\beta\,(a + r\cos t) + u\sin\beta,$$
$$y = \cos\gamma\,(b + r\sin t) + \sin\gamma\,(-\sin\beta\,(a + r\cos t) + u\cos\beta), \quad (5)$$
$$z = -\sin\gamma\,(b + r\sin t) + \cos\gamma\,(-\sin\beta\,(a + r\cos t) + u\cos\beta).$$

Setzt man in der Kugelgleichung (1) $\boldsymbol{p} = (d, e, f)$, $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ und schreibt ausführlich als

$$(x-d)^2 + (y-e)^2 + (z-f)^2 = R^2, \quad (6)$$

so ergibt sich die Schnittmenge der beiden Oberflächen (Kugel und Zylindermantel), wenn man (5) in (6) einsetzt. Dies liefert die Bestimmungsgleichung

$$\begin{aligned} F(v,t) = {} & [\cos\beta\,(a + r\cos t) + u\sin\beta - d]^2 \\ & + [\cos\gamma\,(b + r\sin t) + \sin\gamma\,(-\sin\beta\,(a + r\cos t) + u\cos\beta) - e]^2 \\ & + [-\sin\gamma\,(b + r\sin t) + \cos\gamma\,(-\sin\beta\,(a + r\cos t) + u\cos\beta - f)]^2 \\ & - R^2 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

2. Numerische Verfahren

Es sind also diejenigen Wertepaare (t, u) mit $F(u, t) = 0$ zu bestimmen bzw. es ist festzustellen, ob es keine solchen gibt. Hat man Paare (t, u) mit $F(u, t) = 0$ gefunden, so erhält man die entsprechenden Kurvenpunkte im Raum, indem man (t, u) in (5) einsetzt. Da wir nur eine Gleichung, aber zwei Unbekannte haben, liegt es nahe, entweder Werte $u = u^*$ vorzugeben und zu versuchen die Gleichung $G(t) = F(u^*, t) = 0$ nach t aufzulösen oder $t = t^*$ vorzugeben und zu versuchen, die Gleichung $H(u) = F(u, t^*) = 0$ zu lösen. Da die Ableitungen $\frac{dG}{dt}$ bzw. $\frac{dH}{dt}$ leicht zu bilden sind, läge etwa das Newton-Verfahren nahe, das natürlich nicht konvergieren kann, wenn es keinen Schnittpunkt gibt. Bei sinnvollen Startwerten konvergiert es im Falle eines vorliegenden Schnittpunktes empirisch aber hier stets.

Wesentlich einfacher ist das folgende Verfahren. Betrachtet man die Gleichung (7) genauer, so sieht man, dass sie zwar kompliziert von der

Variablen t abhängt aber bzgl. u eine quadratische Gleichung (mit kompliziert aussehenden Koeffizienten) ist. Statt (7) kann man auch

$$F(u, t) = u^2 + 2\,A(t)\,u + B(t) = 0 \tag{8}$$

schreiben mit

$$\begin{aligned} A(t) = {} & \sin\beta\,[\cos\beta\,(a + r\cos t) - d] \\ & + \sin\gamma\cos\beta\,[\cos\gamma\,(b + r\sin t) - \sin\gamma\sin\beta\,(a + r\cos t) - e] \\ & + \cos\gamma\cos\beta\,[\sin\gamma\,(b + r\sin t) + \cos\gamma\sin\beta\,(a + r\cos t) + f], \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} B(t) = {} & [\cos\beta\,(a + r\cos t) - d]^2 \\ & + [\cos\gamma\,(b + r\sin t) - \sin\gamma\sin\beta\,(a + r\cos t) - e]^2 \\ & + [\sin\gamma\,(b + r\sin t) + \cos\gamma\sin\beta\,(a + r\cos t) + f]^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Für ein festes t^* und $A^* = A(t^*)$, $B^* = B(t^*)$ hat die in u quadratische Gleichung (8) die Lösungen

$$u_{1,2}(t^*) = -A^* \pm \sqrt{A^{*2} - B^*}. \tag{11}$$

Ist der Radikand in (11) größer Null, so gibt es zwei reelle Schnittpunkte $(u_1(t^*),t^*)$ und $(u_2(t^*),t^*)$, ist er (zufällig) gleich Null, so gibt es einen Schnittpunkt $(u_1(t^*),t^*) = (u_2(t^*),t^*)$ und sonst keinen. Variiert man nun t^* im Intervall $[0,2\pi]$, etwa in Schritten um 5° oder 10°, so erhält man die zugehörigen Punkte der Schnittkurve, falls solche für den momentanen Wert von t^* existieren. Erhält man für eine genügend kleine Schrittweite bei den Winkeln keinerlei Nullstellen für alle t^*, so. ist aus Stetigkeitsgründen klar, dass sich die gegebene Kugel und der gegebene Zylinder nicht schneiden.

3. Numerische Beispiele

Beispiel 1: Wir gehen von einem Zylinder mit der z-Achse als Achse und dem Radius $r = 5$ aus, d. h. es ist $a_1 = b = \beta = \gamma = 0$. Die Kugel habe den Mittelpunkt $(d, e, f) = (1, 0, 0)$ und den Radius $R = 7$. Variiert man t als Winkel (in der Formel ist stets das Bogenmaß zu nehmen) von 0° bis 360° in Schritten von 10°, so erhält man

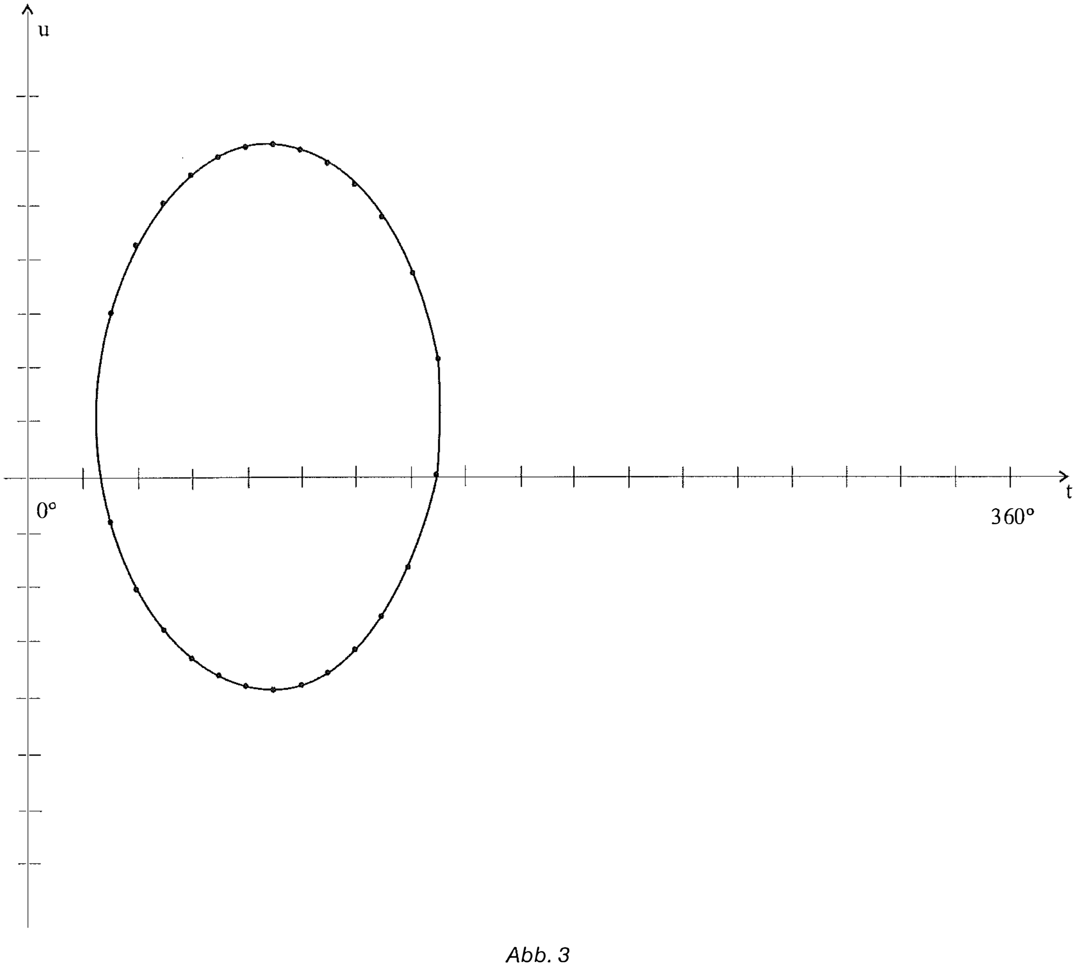

Abb. 3

stets Werte u_i und $u_2 = -u_1$. Fig. 2 zeigt das entsprechende (t, u)-Diagramm.

Beispiel 2: Der Zylinder sei derselbe wie oben, nur gedreht mit $\beta = 1$ und $\gamma = -1$. Die Kugel habe den Mittelpunkt (1, 2, 4) und den Radius $R = 5$. Hier gibt es nicht für alle Werte von t wie oben reelle Lösungen u. Das entsprechende (t, u)-Diagramm findet sich in Fig. 3. Beide Diagramme sind typisch für eine Reihe von weiteren Beispielen.

Beispiel 3: Nimmt man wieder den Zylinder aus Beispiel 1 und die Kugel mit Mittelpunkt (6, 7, 8) und Radius $R = 1$, so gibt es offensichtlich keine Schnittkurven, was durch den beschriebenen Algorithmus (natürlich) bestätigt wird.

Literatur

[1] *Heinrichowski, M.:* Normgerechte und funktionsorientierte Auswerteverfahren für punktweise erfasste Standardformelemente. Dissertation, Fachbereich Maschinenbau, Universität der Bundeswehr Hamburg 1989.

[2] *Hui, K. C., Wong, N. N.:* Hands on a virtually elastic object. The Visual Computer 18, 150–163 (2002).

[3] *Späth, H.:* Ein Verfahren zur Bestimmung des Least-Squares-Zylinders. AVN 2/2000, 65–67.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Helmuth Späth, Fachbereich Mathematik, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Postfach 2503, D-26111 Oldenburg, Germany e-mail: spaeth@mathematik.uni-oldenburg.de

Verleihung der Friedrich-Hopfner-Medaille an Univ.-Prof. Dr. Thomas A. Wunderlich

Die Friedrich-Hopfner-Medaille
Einleitende Worte des Sekretärs der ÖGK, Univ.-Doz. Dipl.-Ing. Dr. Christoph Twaroch

In Würdigung der Verdienste Friedrich Hopfners, Professor für Höhere Geodäsie an der Technischen Hochschule Wien von 1934 bis 1949, um die Internationale Erdmessung, beschloss 1976 die damalige Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung (jetzt Österreichische Geodätische Kommission) die Stiftung einer Friedrich Hopfner-Medaille für hervorragende Leistungen auf dem Gebiete der Geodäsie.

Die Bestimmungen für die Verleihung der Friedrich Hopfner-Medaille lauten auszugsweise:

- Die Friedrich Hopfner-Medaille wird von der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung (ÖKIE) – jetzt Österreichische Geodätische Kommission (ÖGK) – im Abstand von 4 Jahren, beginnend mit 1977, verliehen.
- Die Medaille wird im Regelfall an österreichische Staatsbürger für hervorragende wissenschaftliche Leistungen auf einem Gebiet verliehen, das in den Aufgabenbereich der Internationalen Assoziation für Geodäsie fällt.
- Mitglieder der ÖKIE sind von der Verleihung ausgeschlossen. Jedes Mitglied der ÖKIE ist zum Vorschlag von Kandidaten für die Verleihung der Friedrich Hopfner-Medaille berechtigt.
- Die ÖKIE wählt aus den vorgeschlagenen Kandidaten den ihr am Geeignetsten erscheinenden aus. Erfüllt nach Ansicht der Kommission keiner der vorgeschlagenen Kandidaten die notwendigen Bedingungen, so wird die Friedrich Hopfner-Medaille in dem betreffenden Jahr nicht vergeben; die nächste Verleihung erfolgt wieder in 4 Jahren.
- Die Medaille wird dem Preisträger anlässlich einer Sitzung der ÖKIE durch deren Präsidenten überreicht.

Die ÖGK ist gemäß ihren Statuten das Organ der Internationalen Geodäsie für Österreich. Sie vertritt die Belange Österreichs in der Internationalen Assoziation für Geodäsie und bei zwischenstaatlich vereinbarten geodätischen Arbeiten, soweit diese nicht im Vollzug des Vermessungsgesetzes erfolgen. Sie ist die offizielle Verbindungsstelle Österreichs zur Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik (IUGG).

Die Kommission setzt sich aus Universitätsprofessoren, Vertretern der fachlich zuständigen Bundesministerien, des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesens, der Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik sowie der Bundeskammer der Architekten- und Ingenieurkonsulenten zusammen. Die ÖGK ist damit in dieser personellen Zusammensetzung eine einzigartige Plattform, in der Persönlichkeiten aus Wissenschaft, Verwaltung und Praxis vor dem gemeinsamen fachlichen Hintergrund beurteilend und lenkend tätig werden können.

Die Verleihung der Friedrich Hopfner-Medaille durch dieses Gremium stellt somit eine ganz besondere Auszeichnung dar und ist die höchste Würdigung, die die österreichische Geodäsie vergeben kann.