



## Der Trennkreis und seine numerische Berechnung

Helmuth Späth <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Fachbereich Mathematik, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Postfach 2503, D-26111 Oldenburg, Germany*

VGI – Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation **90** (3–4), S. 126–129

2002

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Spaeth_VGI_200213,  
Title = {Der Trennkreis und seine numerische Berechnung},  
Author = {Sp{"a}th, Helmuth},  
Journal = {VGI -- {"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessung und  
Geoinformation},  
Pages = {126--129},  
Number = {3--4},  
Year = {2002},  
Volume = {90}  
}
```



Solche 3D-Auswertungen und die darauf folgende virtuelle Visualisierung sind wichtig und zukunftsweisend für die Dokumentation und Rekonstruktion von Tunnelanlagen, Höhlen, Kelleranlagen, unterirdischen archäologischen Fundstätten und historischen Plätzen und Gebäuden.

In Zukunft soll dem Institut ein Laserscanner zur Verfügung gestellt werden. Die herkömmliche Aufnahme mittels einer Totalstation wird damit ersetzt durch das Abtasten mit Hilfe eines Laserscanner.

Bei dieser Anwendung ergibt sich der Vorteil, dass bei der 3D-Aufnahme gleichzeitig die Farbe im Aufnahmepunkt gespeichert wird und bei der Auswertung auf die Flächen als zusätzliches Merkmal (Kennzeichnung) gespeichert werden kann.

Für den Geodäten wird dies eine erhebliche Zeitersparnis bei der Auswertung und eventuellen Weiterverarbeitung der 3D-Modelle bedeuten.

Abschließend kann bemerkt werden, dass mit Spannung die neue Homepage der Stadtge-

meinde Waidhofen erwartet wird um schlussendlich die faszinierende Kellerwelt virtuell durchschreiten zu können.

**Quellenverzeichnis:**

- [1] *Sauer, Helmut*: Waldviertler Heimatbuch, 1977
- [2] *Jeschek, Rainer u. Neuwirt, Dr. Ernst*: 800 Jahre Waidhofen an der Thaya, 1971
- [3] *Neuwirt, Dr. Ernst*: Das Leben in den Städten des Waldviertels im Mittelalter, 1979
- [4] *Steininger, Fritz*: Erdgeschichte des Waldviertels, 1999  
[www.naturpark.at](http://www.naturpark.at) (Nordwald-News)  
[www.wko.at](http://www.wko.at) (Waidhofen an der Thaya)  
[www.tiscover.com](http://www.tiscover.com) (TIScover-Waidhofen an der Thaya)  
[www.ams.or.at](http://www.ams.or.at) (Stadtplan Waidhofen an der Thaya)  
[www.rmdata.at](http://www.rmdata.at) (Firma rm-DATA)  
[www.autodesk.at](http://www.autodesk.at) (Firma AutoDesk)  
[www.abbyy.com](http://www.abbyy.com) (Firma Abbyy)

*Anschrift der Autoren:*

Dipl.-Ing. Dr. Johannes Fabiankowski: TU Wien, Institut für Geodäsie und Geophysik, Abteilung Angewandte Geodäsie und Ingenieurgeodäsie, Gusshausstrasse 27–29, A 1040 Wien  
 Dipl.Ing. Gerald Wagner: Heiligenstädter Strasse 131–135/3/63, A 1190 Wien



## Der Trennkreis und seine numerische Berechnung

*Helmut Späth, Oldenburg*

**Zusammenfassung**

Die Bestimmung von Hüllkreis und von Pferchkreis gehört zu den Standardaufgaben in der Koordinatenmesstechnik [1]. Wir behandeln hier die Bestimmung eines Trennkreises. Das ist ein Kreis mit kleinstem Radius, der einerseits eine gegebene Punktemenge enthält und der andererseits eine zweite Punktemenge ausschließt.

**1. Problemstellung**

Der Hüllkreis für eine in der Ebene gegebene Punktemenge

$$(x_i, y_i), i=1, \dots, m. \tag{1}$$

ist derjenige Kreis mit Mittelpunkt  $(x, y)$  und Radius  $u$ , der alle gegebenen Punkte enthält und minimalen Radius  $u$  hat. Somit ist das zu lösende mathematische Problem

$$u^2 \rightarrow \min$$

s.t.  $(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 \leq u^2 (i = 1, \dots, m). \tag{2}$

Die Lösung ist eindeutig [1].

Pferchkreise mit Mittelpunkt  $(x, y)$  und Radius  $w$ , sind solche, die keinen der gegebenen Punkte enthalten und maximalen Radius  $w$  haben. Das Problem ist hier [1]

$$w^2 \rightarrow \max$$

s.t.  $(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 \geq w^2 (i = 1, \dots, m). \tag{3}$

Hier kann die Lösung  $(x, y, w)$  unbeschränkt sein; sie ist also insbesondere nicht eindeutig.

Die Anwendung der sequentiellen linearen Optimierung auf beide Probleme ist in [3, 4] geschildert und in [5] bezüglich ihrer Wirksamkeit beleuchtet.

Hier behandeln wir das folgende verwandte Problem [2]. Gegeben seien zwei Punktemengen  $S$  und  $T$  durch

$$S = \{(x_i, y_i), i = 1, \dots, k\},$$

$$T = \{(x_i, y_i), i = k+1, \dots, m\}. \tag{4}$$

Wir suchen einen Kreis mit Mittelpunkt  $(x, y)$  und Radius  $v$ , der alle Punkte von  $S$  und alle von  $T$  nicht enthält (jeweils einschließlich Rand)

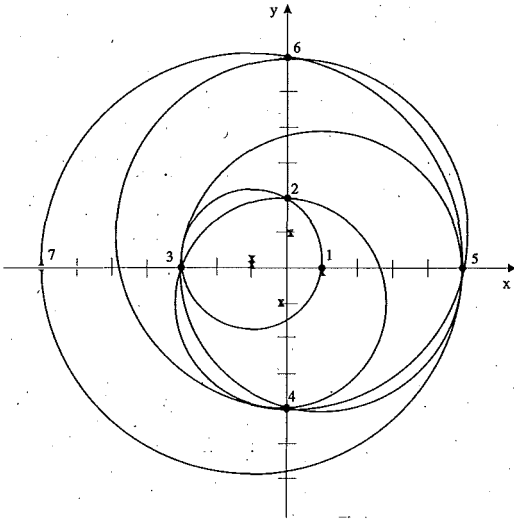


Abb. 1

und kleinsten Radius  $v$  hat. Die mathematische Problemstellung für diesen Trennkreis ist

$$\begin{aligned} & v^2 \rightarrow \min \\ \text{s.t. } & (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 \leq v^2 \quad (i = 1, \dots, k), \\ & (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 \geq v^2 \quad (i = k+1, \dots, m). \end{aligned} \quad (5)$$

Für  $k = m$  erhalten wir das Hüllkreisproblem (2) zurück. Es ist leicht einsehbar, wie die Problemstellung auf eine Trennkugel übertragen werden kann: in den Nebenbedingungen (s.t.) wird ein Term  $(z-z_i)^2$  in (5) links hinzugefügt.

## 2. Ein numerisches Verfahren

Führen wir als neue Unbekannte

$$s = \frac{1}{2} (v^2 - (x^2 + y^2)) \quad (6)$$

ein, so lässt sich (5) als

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + s \rightarrow \min \\ \text{s.t. } & -x_i x - y_i y - s \leq -\frac{1}{2} (x_i^2 + y_i^2) \quad (i = 1, \dots, k), \\ & x_i x + y_i y + s \leq \frac{1}{2} (x_i^2 + y_i^2) \quad (i = k+1, \dots, m) \end{aligned} \quad (7)$$

(8) schreiben. Dies ist eine quadratische Zielfunktion mit linearen Nebenbedingungen. Die Variablen  $x$ ,  $y$  und  $s$  sind freie Variable, d. h. ohne Vorzeichenbeschränkung.

Geben wir für  $t = 0$  einen Startwert  $(x^{(0)}, y^{(0)})$  vor (z. B. den Schwerpunkt von  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , aber auch andere beliebige Werte), so lässt sich die Zielfunktion (7) in der  $t$ -ten Iteration gemäß

$$\frac{1}{2} (x^{(t)} x + y^{(t)} y) + s \rightarrow \min \quad (9)$$

linearisieren. Das lineare Programm (9) unter den Nebenbedingungen (8) lässt sich – Zulässigkeit

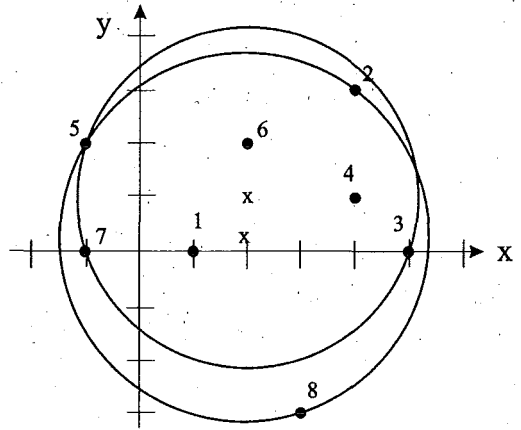


Abb. 2

und Beschränktheit vorausgesetzt – nach  $(x, y, s)$  lösen. Dann setzt man  $(x^{(t+1)}, y^{(t+1)}) = (x, y)$  und führt die nächste Iteration durch. Dabei muss, um die Standardform, wie sie viele Software-Produkte voraussetzen, nämlich

$$\begin{aligned} & c^T z \rightarrow \max \\ & A z \leq b, z \geq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

eines linearen Programms zu erreichen, zuvor

$$\begin{aligned} x &= x^+ - x^-, \\ y &= y^+ - y^-, \\ s &= s^+ - s^- \end{aligned} \quad (11)$$

mit  $x^+, y^+, s^+, x^-, y^-, s^- \geq 0$  gesetzt werden. Dann ist in (10)

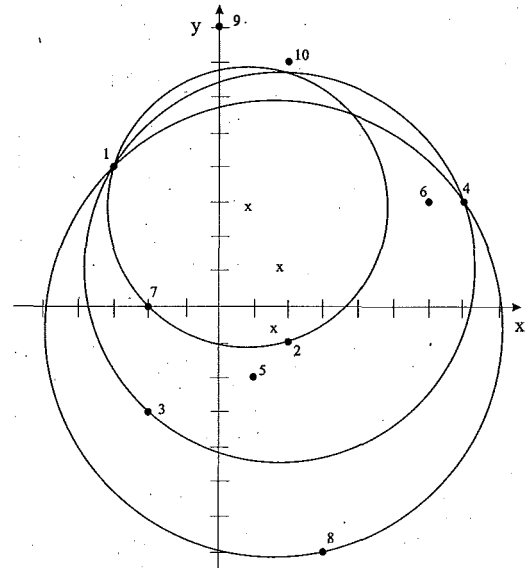


Abb. 3

$$\begin{aligned}
z &= (x^+, x^-, y^+, y^-, s^+, s^-)^T, \\
b_i &= -\frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2), \quad i = 1, \dots, k \\
b_i &= \frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2), \quad i = k+1, \dots, m \\
c &= (-\frac{1}{2}x^{(0)}, +\frac{1}{2}x^{(0)}, -\frac{1}{2}y^{(0)}, +\frac{1}{2}y^{(0)}, -1, 1)^T \\
a_i^T &= (-x_i, x_i, -y_i, y_i, -1, 1), \quad i = 1, \dots, k \\
a_i^T &= (x_i, -x_i, y_i, -y_i, 1, -1), \quad i = k+1, \dots, m
\end{aligned} \tag{12}$$

wobei  $a_i^T$  die  $i$ -te Zeile von  $A$  bedeutet.

Nach den Erklärungen in [5] konvergiert das Verfahren, falls nicht Unzulässigkeit oder Unbeschränktheit der linearen Programme vorliegt, in Abhängigkeit vom Startwert, häufig in einer Iteration; empirisch werden bis zu drei Iterationen benötigt, um Konvergenz zu erreichen. Sehr häufig wird das globale Optimum erreicht, aber die Konvergenz zu einem lokalen Optimum kann nicht ausgeschlossen werden. Benutzt man einen Standard-Algorithmus zur Lösung der linearen Programme, so ist die Implementation des Verfahrens sehr einfach.

### 3. Numerische Beispiele

In den folgenden drei Beispielen werden die beiden Punktemengen  $S$  und  $T$  nach (4) jeweils für  $k = 2, \dots, m$  benutzt. Stets wurden neben dem Schwerpunkt von  $S$  auch andere Startwerte  $(x^{(0)}, y^{(0)})$  verwandt und im Falle mehrerer Lösungen für (5) die jeweils beste angegeben. Für bestimmte Werte von  $k$  kann das anfängliche lineare Programm natürlich unzulässig oder unbeschränkt sein, was auf keine Lösung hindeutet.

*Beispiel 1:* Die Koordinaten von  $m = 7$  gegebenen Punkten

k	1	2	3	4	5	6	7
x	1	0	-3	0	5	0	-7
y	0	2	0	-4	0	6	0

waren hier so gewählt, dass für  $k = 2, \dots, 7$  optimale Trennkreise existieren. Diese und die gegebenen Punkte findet man in Abb. 1. Für  $k = 5$  z. B. ist der Kreismittelpunkt  $(1, -1.25)$  und der Radius 4.00195.

*Beispiel 2:* Die  $m = 8$  Punkte

k	1	2	3	4	5	6	7	8
x	1	4	5	4	-1	2	-1	3
y	0	3	0	1	2	2	0	-3

sind so gewählt, dass für  $k = 2, \dots, 6$  keine Trennkreise möglich sind. Dies wurde auch durch das Verfahren bestätigt. Für  $k = 7$  und  $k = 8$  (Hüllkreis) sind die Ergebnisse in Abb. 2 zu finden. Für  $k = 7$  ist der Mittelpunkt  $(2, 1)$  und der Radius 3.16228; für  $k = 8$  ist der Mittelpunkt  $(1.94828, .25862)$  und der Radius 3.42414.

*Beispiel 3:* Die  $m = 10$  Punkte

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	-3	2	-2	7	1	6	-2	3	0	2
y	4	-1	-3	3	-2	3	0	-7	8	7

sind willkürlich gewählt worden. Die für  $k = 2, 7, 8$  gefundenen Trennkreise samt der Punkte finden

**Steigende Portokosten !**  
**Hoher Manipulationsaufwand !**  
**Lang dauernde Postwege !**

**Helfen Sie uns Geld und Zeit zu sparen !**

*Das OVG-Team möchten Sie gerne über Termine, Veranstaltungen und Neuigkeiten per email informieren. Senden Sie einfach Ihren Namen und Ihre email-Adresse an*

**office@ovg.at**

sich in Abb. 3. Für  $k = 3, \dots, 6, 9$  gibt es keine Lösung. Für  $k = 10$  wurde bei den benutzten Startwerten der Hüllkreis (mit sehr großem Radius) durch die Punkte mit den Nummern 4, 9 und 10 nicht gefunden.

#### Literatur

- [1] *Dörflinger, J.*: Approximation durch Kreise: Algorithmen zur Ermittlung der Formabweichung mit Koordinatenmessgeräten, Diplomarbeit in Mathematik, Universität Ulm 1986.  
 [2] *O'Rourke, J., Kosaraju, S. R., Meggido, N.*: Computing Circular Separability, *Discrete Comput. Geom.* 1, 105 – 113 (1986).

- [3] *Späth, H.*: Bestimmung von Hüllkreis und -kugel mittels sequentieller linearer Optimierung, *AVN 7/1999*, 239 – 242.  
 [4] *Späth, H.*: Bestimmung von Pferchkreisen und -kugeln mittels sequentieller linearer Optimierung, *AVN 10/1999*, 343 – 345.  
 [5] *Späth, H., Watson, G. A.*: On a sequential linear programming approach to finding the smallest circumscribed, largest inscribed, and minimum zone circle or sphere, *Math. Commun.* 6, 29 – 38 (2001).

#### Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Helmuth Späth, Fachbereich Mathematik, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Postfach 2503, D-26111 Oldenburg, Germany. e-mail: spaeth@mathematik.uni-oldenburg.de



## Der Beitrag Österreichs an UNIGRACE – Unification of Gravity Systems of Central and Eastern European Countries.

*Diethard Ruess, Wien*

#### Zusammenfassung

Das BEV beteiligte sich an dem, von der EU teilfinanzierten Projekt UNIGRACE, (Unification of Gravity Systems of Central and Eastern European Countries) in den Jahren 1998 – 2002. Ziel war es, unter Einsatz mehrerer Absolutgravimeter die verschiedenen historisch gewachsenen Schwerenetze der beteiligten Länder in ein einheitliches System überzuführen. Dieses neue auf modernster Technik aufbauende System dient als Grundlage für weiterführende, grenzüberschreitende Problemstudien in Geodäsie, Geophysik und physikalisch-technischen Anwendungen.

#### Abstract

The BEV took part at the UNIGRACE project between 1998 and 2002 which was promoted by the EC. The aim was to unify the different grown gravity systems of the participating countries using absolute gravity techniques. This new modern system will be the base of further international and interdisciplinary studies in Geodesy, Geophysics and technical employment.

#### 1. Einleitung

Das Projekt UNIGRACE wurde in den Jahren 1998 - 2002 durchgeführt. Es entstand auf Anregung der Zentraleuropäischen Initiative (CEI) 1995 [1]: In einem Forschungsprogramm sollten Beobachtungen der mittleren Meeresoberflächen und Absolutschweremessungen im Raume Mitteleuropas in Zusammenhang gebracht werden. Es entwickelte sich die Konzeption, Absolutschweremessungen an besonders ausgewählten geodätischen Fundamentalknoten durchzuführen und darüber hinaus Gezeitenpegel der Ostsee, der Adria und des Schwarzen Meeres einzubinden. Es wurden 21 Stationen in 12 Ländern ausgewählt, die eine Traverse von Absolutschweremessungen zwischen Ostsee und Adria mit einer Verbindung zum Schwarzen Meer bilden. Das Projekt wurde von der EC im

Rahmen des INCO-COPERNICUS gefördert und teilfinanziert, mit dem volkswirtschaftlichen Ziel, die Schweresysteme der beteiligten Länder, die sich historisch unterschiedlich entwickelt hatten, zu vereinheitlichen. In Österreich wurde die Beteiligung an UNIGRACE vom BEV wahrgenommen.

#### 2. Ziele des Projektes

Die Schwerkraft ist eine physikalische Größe, die von der geographischen Position (Lage und Höhe) einerseits und von der Zeit andererseits abhängig ist. Bei verschiedenen messtechnischen Problemstellungen wird sie als konstant vorausgesetzt, wie z.B. bei der Festlegung von Standards, die Kräftevergleiche nutzen (Strom, Druck, Masse). Sie beeinflusst ebenso die Defini-