



## Erforschung mittelalterlicher städtischer Kelleranlagen im Waldviertel

Johannes Fabiankowitsch <sup>1</sup>, Gerald Wagner <sup>2</sup>

<sup>1</sup> TU Wien, Institut für Geodäsie und Geophysik, Abteilung Angewandte Geodäsie und Ingenieurgeodäsie, Gusshausstrasse 27-29, A-1040 Wien

<sup>2</sup> Heiligenstädter Strasse 131-135/3/63, A-1190 Wien

VGI – Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation **90** (3–4), S. 119–126

2002

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Fabiankowitsch_VGI_200212,  
Title = {Erforschung mittelalterlicher städtischer Kelleranlagen im  
Waldviertel},  
Author = {Fabiankowitsch, Johannes and Wagner, Gerald},  
Journal = {VGI -- Österreichische Zeitschrift für Vermessung und  
Geoinformation},  
Pages = {119--126},  
Number = {3--4},  
Year = {2002},  
Volume = {90}  
}
```





## Erforschung mittelalterlicher städtischer Kelleranlagen im Waldviertel

Johannes Fabiankowitsch und Gerald Wagner, Wien

gewidmet dem Initiator und Mentor Hans Plach

### Zusammenfassung

Die Stadt Waidhofen an der Thaya, im nördlichen Waldviertel gelegen, ist im Besitz von interessanten und sehenswerten Kelleranlagen aus dem Mittelalter.

Ein Grossteil dieser Anlagen ist im Laufe der Zeit von Studenten im Rahmen der Feldübung „Ingenieurgeodäsie“ aufgemessen worden (1983–1994), ihre Messdaten lagen meist nur in analoger Form vor. Die restlichen Keller wurden ingenieurgeodätisch neu vermessen. Nachdem sämtliche Daten in digitaler Form vorlagen, konnten mit Hilfe einer grafischen Auswertung Gittermodelle erzeugt werden. Diese dreidimensionalen Modelle werden mit einer vorhandenen zweidimensionalen oberirdischen Vermessung des Hauptplatzes kombiniert und lagerichtig dargestellt. Des weiteren dienen sie als Grundlage zur Erstellung einer Computeranimation für einen virtuellen Rundgang durch diese Kellerwelt, welche von der Gemeinde Waidhofen in Auftrag gegeben und finanziell unterstützt wurde.

### Abstract

Waidhofen at the river Thaya is located in the northern part of Lower Austria and holds one of the most remarkable and interesting cellar systems dating back to the Middle Ages.

The most cellars had been surveyed previously within a field study by students (1983–1994). However, some adjustments in surveying have had to be done. The surveying of parts of the remaining cellar systems was realized by using electronic total station (2002).

The data will be compiled and digitised. By means of graphical data processing three-dimensional cellar models will be produced. Based on these data, the current two-dimensional overground surveying of the market square will be matched with the three-dimensional cellar models and presented according to their correct position. Additional these models are the basis to prepare a computeranimation for a virtual walk through the cellar systems, ordered and partially financed by the local government Waidhofen.

### 1. Einleitung

In vielen Städten des Waldviertels und teilweise des angrenzenden Weinviertels wurden im Mittelalter weitläufige Kelleranlagen angelegt. Auch die Stadt Waidhofen an der Thaya, im nördlichen Waldviertel gelegen, ist im Besitz von archäologisch interessanten und sehenswerten Kelleranlagen aus dieser Epoche. [1,2,3]

Auf Grund der Initiative des leider viel zu früh verstorbenen Herrn Hofrat Dipl.-Ing. Hans Plach aus Thaya, einem leidenschaftlichen Heimatforscher, wurden mit viel Engagement und Begeisterung in den Jahren 1983 bis 1994 von Studenten der Fachrichtung Vermessungswesen im Zuge der Feldübung Ingenieurgeodäsie die Kelleranlagen unter dem Hauptplatz vermessen. Hans Plachs diesbezügliche Aktivitäten waren durch Einfallsreichtum, Liebe zu seiner engeren Heimat, breit gefächertes und gründliches Wissen (vor allem in den Bereichen Geodäsie, Archäologie und Heimatkunde) und Neugier, eine hohe praktische Begabung, Beharrlichkeit und Ausdauer in der Verfolgung seiner Ziele und sei-

ner sprichwörtlichen Genauigkeit gekennzeichnet. In diesem Sinne möchten die beiden Autoren diesen Artikel dem Mentor und geistigem Vater Hans Plach widmen.

Die Ergebnisse dieser Arbeiten lagen in analoger Form auf Folien im Format A2 (Grund- und Schrägansichten sowie aufgenommene Profile) im Institut für Geodäsie und Geophysik auf.

### Zielsetzung

Um die mittelalterliche, sehenswerte Kellerwelt unter dem Hauptplatz der Stadt Waidhofen an der Thaya einer interessierten Öffentlichkeit zu zeigen und diese zu einem virtuellen Rundgang zu animieren, war es notwendig, diese Keller dreidimensional lagerichtig darzustellen und mit einer bereits vorhandenen zweidimensionalen Aufnahme des Hauptplatzes zu verknüpfen.

Die von der Abteilung Ingenieurgeodäsie erarbeiteten Gittermodelle werden in Zusammenarbeit mit einem Ingenieurbüro für die Erstellung einer Computeranimation verwendet.

## 2. Die Kellerwelt von Waidhofen

Die Stadt Waidhofen wurde ungefähr 30 Meter über dem linken Thayaufer auf einem Terrassensporn, bestehend aus Gföhler Gneis, auch Flins genannt, angelegt [4]. Die dreieckige Form des oben genannten Gneissporns hat auf natürliche Weise die Anlage der Stadt vorgegeben (siehe Abbildung 1).

Das Besondere der Kelleranlagen ist nun, dass sie einerseits unter den Häusern entlang der Stadtmauer und vereinzelt auch knapp außerhalb liegen und andererseits auch bis zum Hauptplatz führen. Die mächtigen Gewölbe sind oft zwei Stockwerke tief aus dem Gneis geschlagen worden.

Verschiedene Theorien versuchen den aufwendigen Ausbau dieser Kelleranlagen zu belegen. Die derzeit gängigste Ansicht besagt, dass es Fluchtwege nach außen gewesen sind. Ursprünglich sollen die Kelleranlagen durch Stollen miteinander verbunden gewesen sein. Diese Stollen sind vermutlich in späteren Jahren von ihren Besitzern zugemauert worden.



Abb. 1: Dreiecksanlage Waidhofen an der Thaya, private Luftaufnahme aus einem Heußluftballon [Michl 2002]

Eine andere besagt, dass die Kelleranlagen den Menschen als Vorratslager bei Belagerungen gedient haben, allerdings wahrscheinlich nur in beschränktem Maße infolge Wassereintritts in der feuchten Jahreszeit, wie es auch heute noch der Fall ist. Auf Grund des mächtigen Ausbaues können sie auch als Statussymbol angesehen worden sein und über den möglichen Reichtum der früheren Eigentümer Auskunft gegeben haben.

Möglicherweise sind diese großen Kelleranlagen sukzessive entstanden, da man sich wegen Platzmangels infolge der wachsenden Bevölkerungszahl in den engen mittelalterlichen Städten nur nach oben oder eben nach unten ausbreiten konnte.

## 3. Bereitstellen der Daten

Die Messdaten sind historisch gewachsen und daher sehr heterogen. Bei der Durchsicht des gesamten Datenbestandes wurde festgestellt, dass zusätzlich noch fünf Kelleranlagen (ON 3, 7, 9, 10 und 15) zu vermessen waren. Im Zuge der Begehung stellte sich dann heraus, dass zwei Eigentümer (ON 10 und 15) trotz Intervention des Bürgermeisters keinen Zutritt zu ihren Kelleranlagen gewährten.

Das Datenmaterial aus den Jahren 1983 bis 1994 lag ursprünglich digital vor, allerdings nur lokal auf den Festplattens der jeweiligen Rechner. Im Zuge der Rechnerbewirtschaftung am Institut ist leider ein Großteil dieser digitalen Daten verloren gegangen. Da es aber noch Koordinatenlisten gab, konnten diese eingescannt werden und somit wieder digital zur Verfügung gestellt werden.

Für die dreidimensionale Erfassung der noch zu vermessenden Keller (ON 3, 7 und 9) wurde das elektronische Tachymeter Leica TCR 1105 verwendet.

Ein besonderes Merkmal der Reihe TCR bildet der koaxiale Distanzmesser mit sichtbarem roten Laser, der zusätzlich zum Standard-Hochleistungs-Koaxial-Distanzmesser integriert ist.

Dadurch ergeben sich gravierende Vorteile:

- auf Grund des sichtbar aufprojizierten roten Laserpunktes sind genaueste Messungen auch bei schlechten Lichtverhältnissen – was natürlich teilweise der Fall war – möglich, da das Ziel nicht durch das Fernrohr anvisiert werden muss, und auch keine Fokussierung notwendig ist
- die Messung erfolgt direkt auf das aufzunehmende Objekt, es sind weder Prismen, Reflexfolien oder Zieltafeln notwendig

- auf verschiedenartige Oberflächen kann bis zu 200 Meter gemessen werden

Eine motorisierte Version (TCRM) hätte ein automatisiertes rasterweises Abfahren von Objekten ermöglicht, die einfache Struktur der Kellerwände und -gewölbe und die dabei anfallenden großen Datenmengen sprachen dagegen.

Laserscanner, welche Objekte automatisch dreidimensional erfassen und deren Messdaten dann anschließend mit Hilfe einer entsprechenden Software zu 3D-Modellen verarbeitet werden können, standen leider nicht zur Verfügung

Im Straßenbereich sind zusätzlich die Stöße und Hauseingänge der betroffenen Hausfronten aufgenommen worden. Dies war notwendig, um den Bezug zwischen den Kellern und dem bereits aufgenommenen Bereich des Hauptplatzes (Vermessungskanzlei Dr. Dölller, Waidhofen) herstellen zu können.

Ergänzungsmessungen für die schon früher aufgenommenen Kelleranlagen konnten auf Grund der entsprechend markierten Stellen in den alten Feldskizzen durchgeführt werden. Dies war notwendig, weil teilweise wesentliche Angaben für die Erstellung der Gittermodelle fehlten.

#### 4. Auswertung

Alle Datenmanipulationen und Berechnungen wurden mit dem Programmsystem rm-GEO ausgeführt, wobei die direkte Schnittstelle zwischen rm-GEO und AutoCAD beziehungsweise rm-MAP von außerordentlicher Bedeutung war. Auch im Hinblick auf die geplante weitere Ausarbeitung der erstellten Gittermodelle zu einer Videoanimation durch ein Architekturbüro erscheint AutoCAD 2000 geeignet, da die Erzeugerfirma von AutoCAD (AutoDesk) auch ein Programm namens 3D-Studio anbietet, welches eine fotorealistische Herstellung von gezeichneten Objekten sowie deren Animation ermöglicht.

Für jeden Keller wurde in rm-GEO eine eigene Geschäftszahl eröffnet, in welche die Koordinaten eingelesen wurden. Anschließend wurde in rm-MAP eine leere Zeichnung erstellt, welche die erforderliche dreidimensionale Darstellung der einzelnen Kelleranlagen ermöglichte. Mit Hilfe der „Übertragung von Messdaten“ konnten die Koordinaten nach rmMAP übertragen werden.

##### 4.1. Erstellung von Gittermodellen

Für die Erstellung der Gittermodelle wurde eine Genauigkeit von 20 cm in Lage und Höhe

festgelegt. Das Konzept zur Ausarbeitung sah nun für jeden Keller folgende Schritte vor, wobei verschiedene Bearbeitungsmethoden in AutoCAD 2000 umgesetzt wurden:

- Komplettansicht der Punktwolke
- Ausblendung der Höhen und isometrische Ansicht
- Hineinzoomen zum aktuellen Bearbeitungsbereich
- Verbindung der Punktsymbole laut Feldskizzen
- Zeichnen von räumlichen Bögen, Verschneidungen und Treppen

Durch Hineinzoomen in die Punktwolke konnte ein Ausschnitt vergrößert und an einem beliebigen Punkt mit der Zeichnung begonnen werden. Laut Feldskizzen wurden mittels 3DPolylinien Punkte räumlich verbunden. Gearbeitet wurde grundsätzlich im übergeordneten Koordinatensystem (=Weltkoordinatensystem), dessen Koordinaten im Gauß-Krüger System definiert waren.

Schwierigkeiten ergaben sich bei den 3D-Bearbeitungen, da das Programm AutoCAD 2000 nur zweidimensional arbeitet. An drei Beispielen, der Erzeugung von räumlichen Bögen, dem räumlichen Schnitt zweier Geraden und der räumlichen Verschneidung von Geraden und Bögen, soll dies gezeigt werden.

Bögen werden durch die Projektion von Anfangs-, Mittel- und Endpunkt in einer Ebene definiert. Diese Ebene verläuft parallel zur XY-Ebene und beinhaltet gleichzeitig auch den räumlichen Anfangspunkt des Bogens (siehe Abb. 2). Zur Lösung dieses Problems war es notwendig, ein lokales Koordinatensystem zu definieren, dessen xy-Ebene durch Anfangs-, Mittel- und Endpunkt des Bogens festgelegt war. Nun konnte der Bogen durch diese drei Punkte gelegt und auch im Raum lagerichtig dargestellt werden (siehe Abb.3)

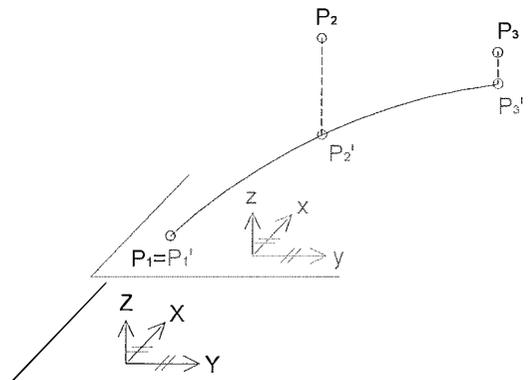


Abb. 2: Bogen in XY-paralleler Ebene

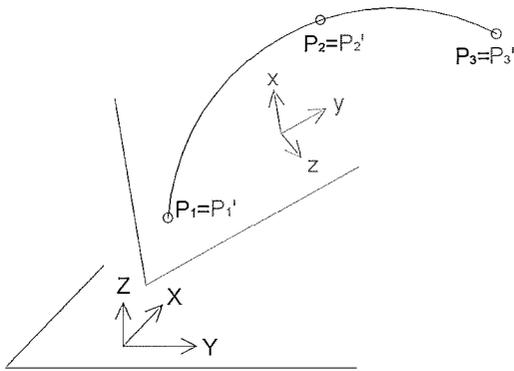


Abb. 3: Bogen in lagerichtig räumlicher Ebene

Eine weitere Schwierigkeit zeigte sich bei der notwendigen Verschneidung von zwei windschiefen Geraden (siehe Abb. 4a bis 4f). Mit der Funktion „Ändern der Länge“ konnte der Endpunkt der Strecke  $b$  dynamisch verlängert (4b) werden. Die Funktion „Dehnen“ verlängerte die Strecke  $a$  bis zum Punkt  $S_1$ . Dieser Punkt lag senkrecht über dem Schnittpunkt  $S'$  der in die  $xy$ -Ebene projizierten Strecken  $a$  und  $b$  (4c). Durch Punkt  $S_1$  wurde nun senkrecht auf die  $xy$ -Ebene eine Verbindungslinie zu Strecke  $b$  gezogen und so Punkt  $S_2$  erhalten (4d). Strecke  $b$  wurde mit der Funktion „Stutzen“ bei  $S_2$  abgeschnitten (4e). Letztendlich wurden die Lagen der Strecken  $a$  und  $b$  so verändert, dass sie einander in der Mitte der Strecke  $S_1S_2$  trafen. Der gesuchte Schnittpunkt  $S$  wird so in einer Näherungslösung gefunden (4f).

Bei allen notwendigen Verschneidungen von zwei windschiefen Geraden betrug der Abstand von  $S_1$  zu  $S_2$  weniger als 5 cm, was bei weitem unter der geforderten Genauigkeit lag.

Ein weiteres Problem ergab sich dadurch, dass Geraden mit räumlichen Bögen verschritten werden mussten (siehe Abb. 5). Die Funktion „Stutzen“ ermöglichte es, die Gerade  $g$  auf der Höhe des Bogens abzuschneiden. Dadurch wurde der Durchstoßpunkt  $D$  der Geraden  $g$  mit der  $xy$ -Ebene gefunden. Von Punkt  $D$  aus fiel man das Lot auf den Bogen, das Ergebnis war der Schnittpunkt  $S$ . Schlussendlich wurde die Lage der Geraden  $g$  vom Punkt  $D$  nach  $S$  verlegt. Diese Lageveränderungen betragen höchstens 4,5 cm.

Nachdem sämtliche Konstruktionspunkte erzeugt waren, wurden die Gittermodelle von allen 26 Kellern erstellt. Abschließende erfolgte eine Kontrolle auf Vollständigkeit und Plausibilität durch Vergleich mit den Feldskizzen. Die Abbildungen 6, 7, 8 und 9 zeigen exemplarisch

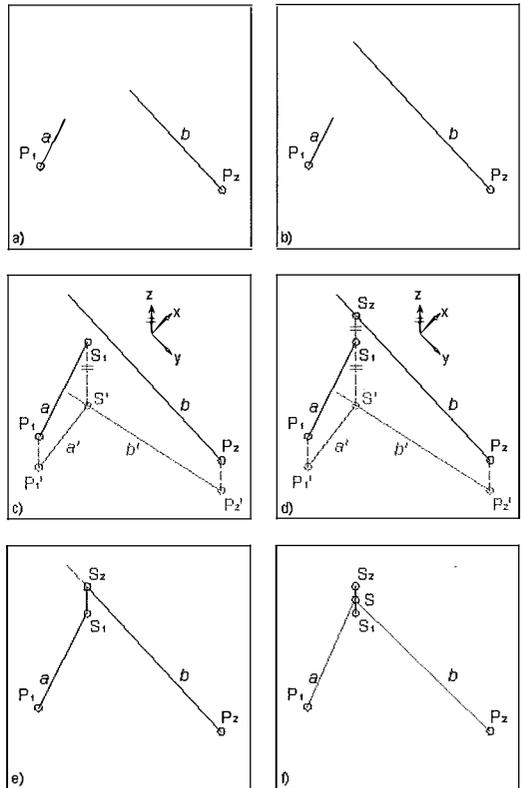


Abb. 4a – 4f: Prinzipskizzen zur Verschneidung zweier windschiefer Geraden

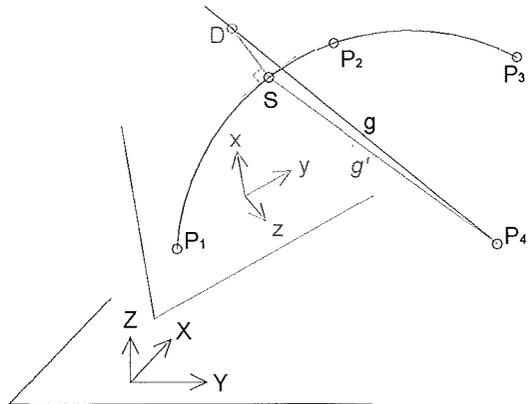


Abb. 5: Verschneidung von Bogen und Gerade

vier Gittermodelle. Diese Modelle wurden deshalb ausgesucht, weil sie aus der Übersicht (siehe Abb. 10) erkennen lassen, dass möglicherweise z.B. ON 5 und 6 bzw. ON 22 und 23 ursprünglich miteinander verbunden waren. Heute bestehen diese Verbindungen nicht

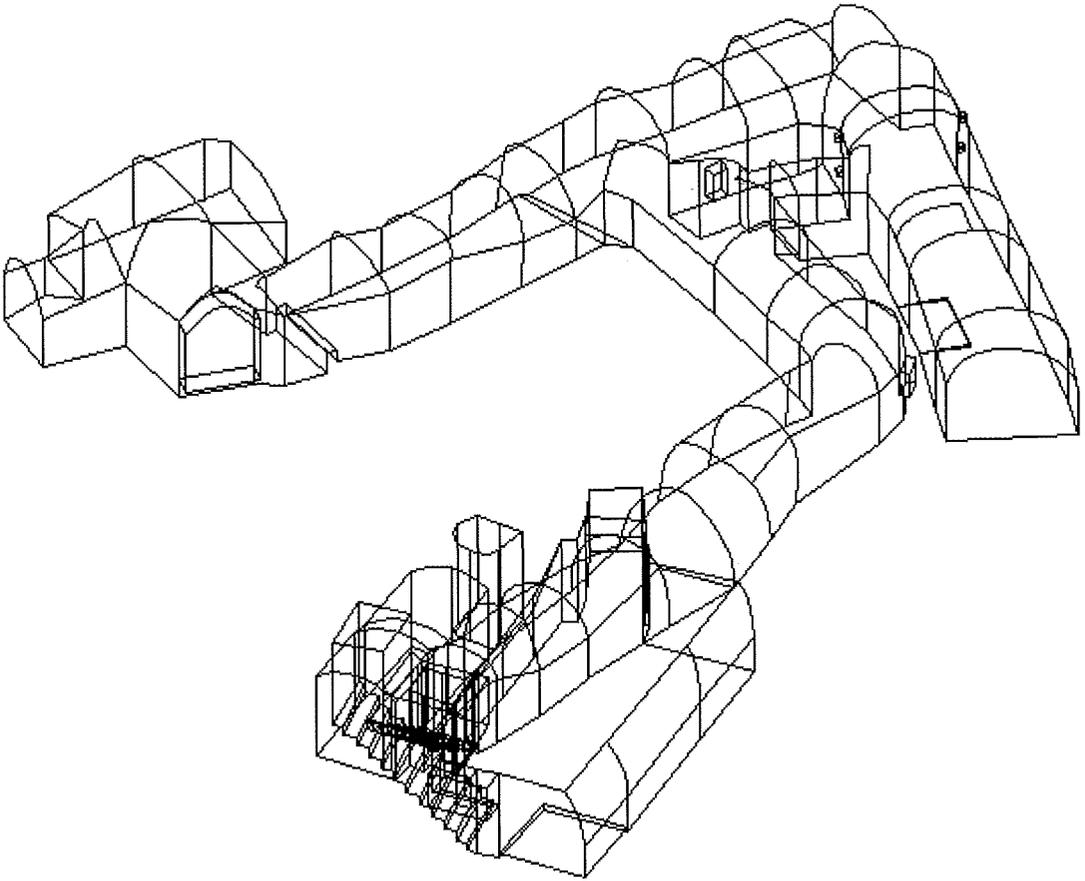


Abb. 6: Keller Hauptplatz ON 5 (Gittermodell)

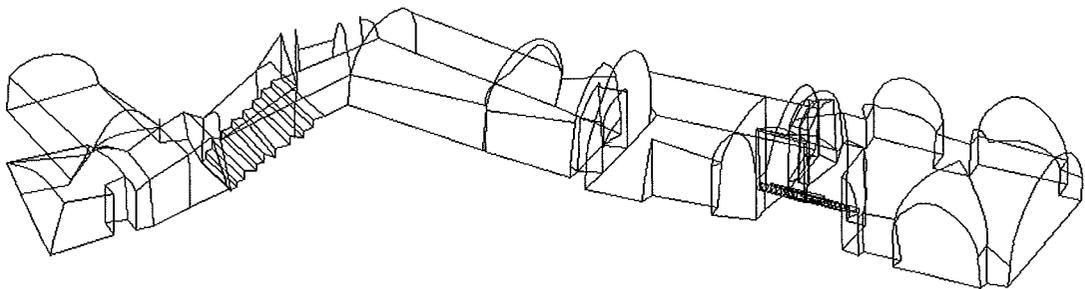


Abb. 7: Keller Hauptplatz ON 6 (Gittermodell)

mehr, an der jeweils vermeintlichen gemeinsamen unterirdischen Hausgrenze sind diese Gänge abgemauert worden. Es stellt sich die Frage, ob diese „selbstdefinierte Grenze“ zwischen zwei Nachbarn einen Bezug zur tatsächlichen Katastergrenze hat. Im Rahmen dieser Arbeit bleiben aber katastertechnische Fragen unberücksichtigt.

## 5. Zusammenführung Gittermodelle – Aufnahme Hauptplatz

Die Aufnahme des Hauptplatzes wurde vom Vermessungsbüro Dr. Döller aus Waidhofen zur Verfügung gestellt. Diese Auswertung erfolgte in einem anderen CAD-Programm und musste daher für diese Arbeit konvertiert werden.

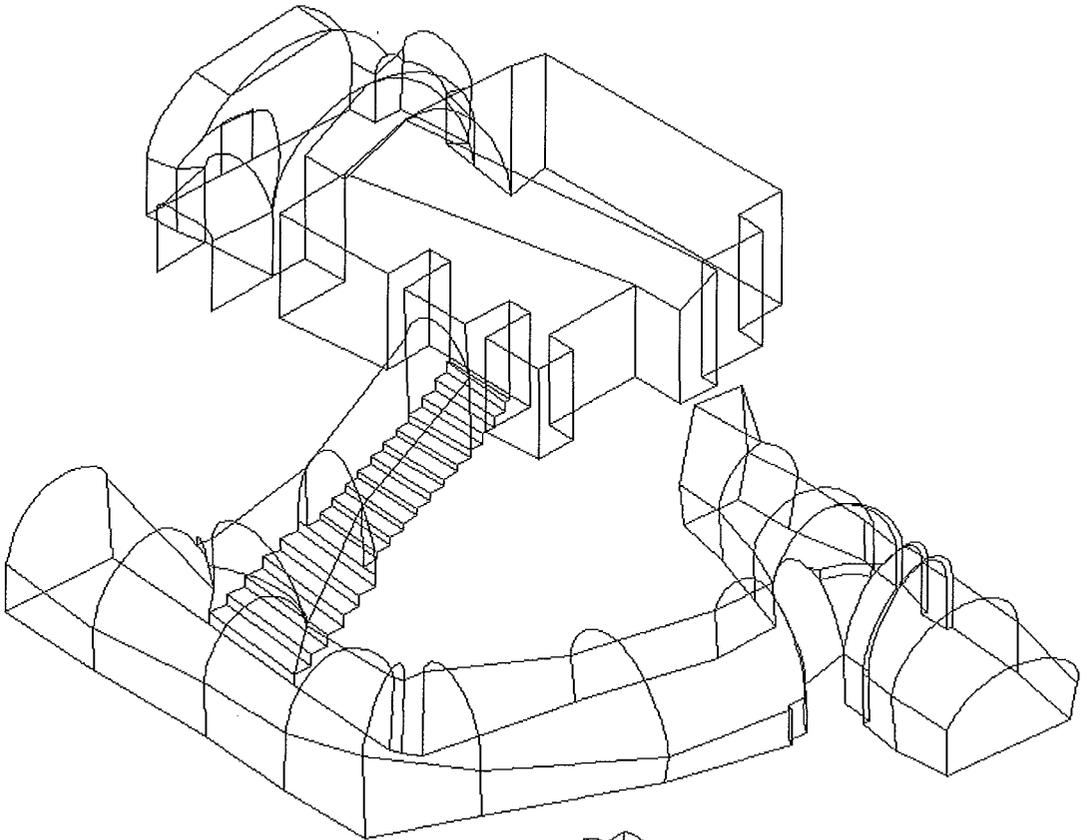


Abb. 8: Keller Hauptplatz ON 22 (Gittermodell)

Bei dieser Konvertierung war die Referenzierung der Linien zu den Punktsymbolen verloren gegangen, was zur Folge hatte, dass zwar die Punkt- und einige Einbausymbole in der richtigen Höhe dargestellt wurden, aber die Linien, Polylinien und Punktnummern zweidimensional auf der Höhe Null lagen.

Unter Verwendung der Funktion „Einfügen von Blöcken“ wurde ein Gittermodell einer Kelleranlage in die geöffnete Hauptplatzzeichnung eingefügt, wobei der Ursprung  $XYZ = 0$  gewählt, die Skalierung 1:1 übernommen und der Drehwinkel mit  $0^\circ$  angenommen wurde. Die dreidimensionalen Punktsymbole mussten mit der zweidimensionalen Zeichnung zur Deckung gebracht werden.

Ein Vergleich von ident aufgenommenen Punkten (Hausecken, Eingänge) zeigte, dass die Abweichungen im Durchschnitt bei rund 1,5–2 cm lagen. Eine Verschiebung der für die Keller aufgenommenen Punkte in jene der Aufnahmepunkte des Hauptplatzes war unvermeidlich. Zwangsweise wurde dadurch der gesamte Kel-

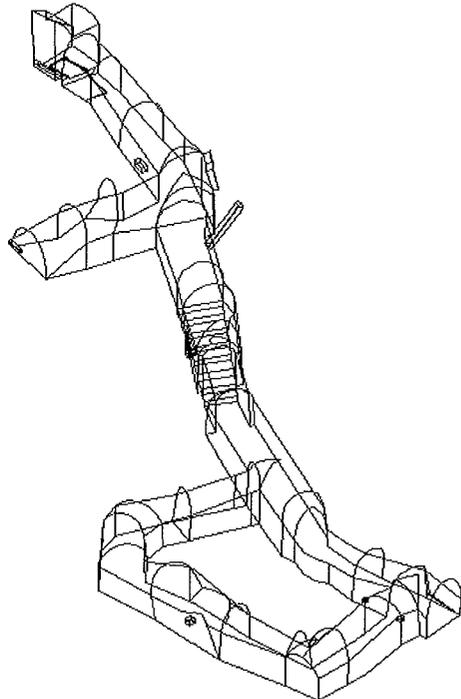


Abb. 9: Keller Hauptplatz ON 23 (Gittermodell)

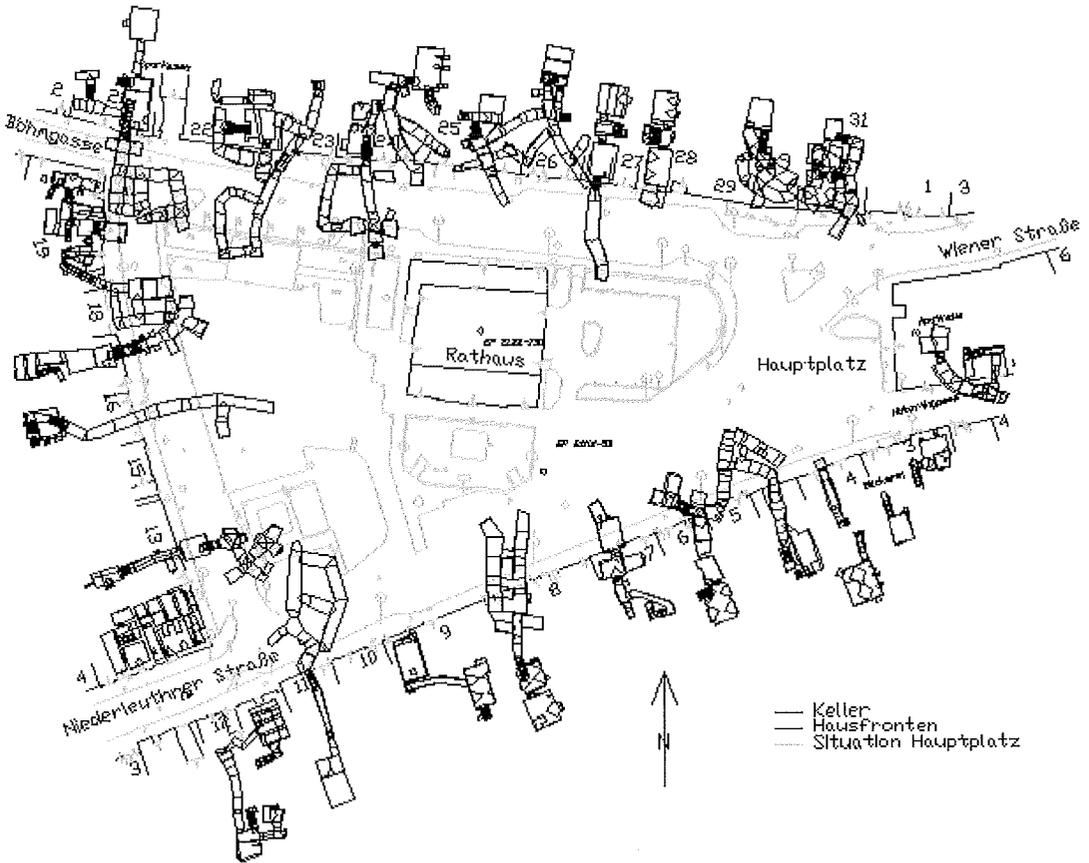


Abb. 10: Kellermodell – Hauptplatz

lerblock um diese Distanz in die Punkte der Hausecken verschoben.

Waren bei den Kellern die zugehörigen Hausfronten auch dreidimensional vorhanden, konnte der gesamte Keller in die Punktsymbole der vom Büro Dr. Döller vermessenen Hausfronten verschoben werden. Waren die Hausfronten der Keller zweidimensional vorhanden, wurde der Keller nur in die zweidimensionalen Hausecken der Zeichnung des Hauptplatzes verschoben. Bei diesen Kellern kam es daher zu keiner Höhenänderung. Die Abbildung 10 zeigt im Grundriss die Zusammenführung der Kellermodelle mit dem Hauptplatz, dabei sind zwei Besonderheiten sehr auffällig:

1. Wie am Ende von Kapitel 4.1. bereits erwähnt, sieht man, dass möglicherweise einige Keller untereinander verbunden waren. Diese Erkenntnis wird für Archäologen von Interesse sein und möglicherweise neue Interpretationen zulassen.

2. Beträchtliche Teile einiger Kelleranlagen liegen auf dem öffentlichen Grund bzw. auch teil-

weise auf dem Nachbargrund. Dies ist nicht nur im üblichen Sinn des Katasters (zweidimensional) erstaunlich und interessant, sondern auch im Hinblick auf die Notwendigkeit eines 3D-Katasters.

## 6. Schlussbemerkungen

Die anfangs gesetzte Aufgabenstellung, aus historischen und neu erstellten Datenmaterialien digitale dreidimensionale Gittermodelle zu erstellen, konnte durch trickreiche Erfindungsgabe, individuelle Konzepte, viel Überlegungsarbeit und intensive Computertätigkeit gelöst werden. Die umfangreiche Grafik-Software AutoCAD mit ihren hilfreichen Tools ermöglichte im Zusammenspiel mit rm-MAP eine problemlose Ausarbeitung.

Durch die lagerichtige Einbindung der 3D-Modelle der mittelalterlichen Kelleranlagen in die vorhandene 2D-Vermessung des Hauptplatzes wurde die Voraussetzung für eine virtuelle Begehung der unterirdischen Kellerwelt Waidhofens mittels Computeranimation geschaffen.

Solche 3D-Auswertungen und die darauf folgende virtuelle Visualisierung sind wichtig und zukunftsweisend für die Dokumentation und Rekonstruktion von Tunnelanlagen, Höhlen, Kelleranlagen, unterirdischen archäologischen Fundstätten und historischen Plätzen und Gebäuden.

In Zukunft soll dem Institut ein Laserscanner zur Verfügung gestellt werden. Die herkömmliche Aufnahme mittels einer Totalstation wird damit ersetzt durch das Abtasten mit Hilfe eines Laserscanner.

Bei dieser Anwendung ergibt sich der Vorteil, dass bei der 3D-Aufnahme gleichzeitig die Farbe im Aufnahmepunkt gespeichert wird und bei der Auswertung auf die Flächen als zusätzliches Merkmal (Kennzeichnung) gespeichert werden kann.

Für den Geodäten wird dies eine erhebliche Zeitersparnis bei der Auswertung und eventuellen Weiterverarbeitung der 3D-Modelle bedeuten.

Abschließend kann bemerkt werden, dass mit Spannung die neue Homepage der Stadtge-

meinde Waidhofen erwartet wird um schlussendlich die faszinierende Kellerwelt virtuell durchschreiten zu können.

**Quellenverzeichnis:**

- [1] *Sauer, Helmut*: Waldviertler Heimatbuch, 1977
- [2] *Jeschek, Rainer u. Neuwirt, Dr. Ernst*: 800 Jahre Waidhofen an der Thaya, 1971
- [3] *Neuwirt, Dr. Ernst*: Das Leben in den Städten des Waldviertels im Mittelalter, 1979
- [4] *Steininger, Fritz*: Erdgeschichte des Waldviertels, 1999  
[www.naturpark.at](http://www.naturpark.at) (Nordwald-News)  
[www.wko.at](http://www.wko.at) (Waidhofen an der Thaya)  
[www.tiscover.com](http://www.tiscover.com) (TIScover-Waidhofen an der Thaya)  
[www.ams.or.at](http://www.ams.or.at) (Stadtplan Waidhofen an der Thaya)  
[www.rmdata.at](http://www.rmdata.at) (Firma rm-DATA)  
[www.autodesk.com](http://www.autodesk.com) (Firma AutoDesk)  
[www.abbyy.com](http://www.abbyy.com) (Firma Abbyy)

*Anschrift der Autoren:*

Dipl.-Ing. Dr. Johannes Fabiankowski: TU Wien, Institut für Geodäsie und Geophysik, Abteilung Angewandte Geodäsie und Ingenieurgeodäsie, Gusshausstrasse 27–29, A 1040 Wien  
 Dipl.Ing. Gerald Wagner: Heiligenstädter Strasse 131–135/3/63, A 1190 Wien



## Der Trennkreis und seine numerische Berechnung

*Helmut Späth, Oldenburg*

**Zusammenfassung**

Die Bestimmung von Hüllkreis und von Pferchkreis gehört zu den Standardaufgaben in der Koordinatenmesstechnik [1]. Wir behandeln hier die Bestimmung eines Trennkreises. Das ist ein Kreis mit kleinstem Radius, der einerseits eine gegebene Punktemenge enthält und der andererseits eine zweite Punktemenge ausschließt.

**1. Problemstellung**

Der Hüllkreis für eine in der Ebene gegebene Punktemenge

$$(x_i, y_i), i=1, \dots, m. \tag{1}$$

ist derjenige Kreis mit Mittelpunkt  $(x, y)$  und Radius  $u$ , der alle gegebenen Punkte enthält und minimalen Radius  $u$  hat. Somit ist das zu lösende mathematische Problem

$$u^2 \rightarrow \min$$

s.t.  $(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 \leq u^2 (i = 1, \dots, m). \tag{2}$

Die Lösung ist eindeutig [1].

Pferchkreise mit Mittelpunkt  $(x, y)$  und Radius  $w$ , sind solche, die keinen der gegebenen Punkte enthalten und maximalen Radius  $w$  haben. Das Problem ist hier [1]

$$w^2 \rightarrow \max$$

s.t.  $(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 \geq w^2 (i = 1, \dots, m). \tag{3}$

Hier kann die Lösung  $(x, y, w)$  unbeschränkt sein; sie ist also insbesondere nicht eindeutig.

Die Anwendung der sequentiellen linearen Optimierung auf beide Probleme ist in [3, 4] geschildert und in [5] bezüglich ihrer Wirksamkeit beleuchtet.

Hier behandeln wir das folgende verwandte Problem [2]. Gegeben seien zwei Punktemengen  $S$  und  $T$  durch

$$S = \{(x_i, y_i), i = 1, \dots, k\},$$

$$T = \{(x_i, y_i), i = k+1, \dots, m\}. \tag{4}$$

Wir suchen einen Kreis mit Mittelpunkt  $(x, y)$  und Radius  $v$ , der alle Punkte von  $S$  und alle von  $T$  nicht enthält (jeweils einschließlich Rand)