



## Hybride 3D Ausgleichung von GPS-, Tachymeter-, und Nivellementbeobachtungen

Johannes Otepka <sup>1</sup>, Georg Regensburger <sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung, Technische Universität Wien, Gusshausstraße 27-29/122, A-1040 Wien*

<sup>2</sup> *Institut für Informatik, Universität Innsbruck, Viktor-Franz-Hess Haus, Technikerstraße 25/7, A-6020 Innsbruck*

VGI – Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation **90** (2), S. 46–52

2002

BibT<sub>E</sub>X:

```
@ARTICLE{Otepka_VGI_200206,  
  Title = {Hybride 3D Ausgleichung von GPS-, Tachymeter-, und  
          Nivellementbeobachtungen},  
  Author = {Otepka, Johannes and Regensburger, Georg},  
  Journal = {VGI -- {"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessung und  
            Geoinformation},  
  Pages = {46--52},  
  Number = {2},  
  Year = {2002},  
  Volume = {90}  
}
```

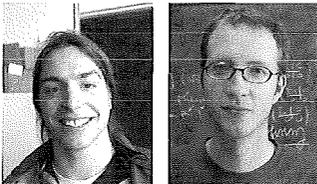


## Literatur

- [1] Goering, H., Roos, H.-G., Tobiska, L.: Finite-Element-Methode. Akademie-Verlag, Berlin, 1988.
- [2] Schwarz, H. R.: Methode der finiten Elemente. Teubner, Stuttgart, 1991.
- [3] Ergatoudis, J. G.; Irons, B. M.; Zienkiewicz, O. C.: Curved Isoparametric Quadrilateral Elements for
- [4] Finite Element Analysis. Int. J. Solids Struct. 4, 1968, pp. 31–42.
- [5] Eschenauer, H.; Schnell, W.: Elastizitätstheorie. B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1993.
- [6] Bretterbauer, K.: Die runde Erde, eben dargestellt. Geowissenschaftliche Mitteilungen, Heft 59. Studienrichtung Vermessung und Geoinformation, TU Wien, 2002.

### Anschrift des Autors:

Em. o. Univ. Prof. Dr. Kurt Bretterbauer, Institut für Geodäsie und Geophysik, TU Wien, A-1040 Wien, Gußhausstraße 27–29, kbretter@luna.tuwien.ac.at



## Hybride 3D Ausgleichung von GPS-, Tachymeter-, und Nivellementbeobachtungen

Johannes Otepka, Wien, Georg Regensburger, Innsbruck

### Zusammenfassung

Die hybride 3D Ausgleichung stellt bei der Berechnung geodätischer Netze den Stand der Technik dar. Im Folgenden wird ein funktionales Modell für GPS-, Tachymeter- und Nivellementbeobachtungen vorgestellt, welches die Beobachtungen in möglichst ursprünglicher Form verwendet. Dies hat vor allem für statistische Beurteilungen des Netzes Vorteile. Bei den präsentierten Ableitungen wurde besonders auf die mathematische Strenge geachtet.

### Abstract

Hybrid 3D adjustments are state-of-the-art computational models for geodetical networks. In this paper a functional model for various observations, such as GPS-vectors and measurements observed with total stations and levels, is presented. The model only uses physical observations which has advantages for statistical assessments of the results. All necessary derivations were made in high consideration regarding mathematical correctness.

### 1. Einleitung

Neue Computertechnologien ermöglichen immer umfassendere und komplexere Ausgleichsmodelle, die „tatsächliche“ Beobachtungen in ihrer ursprünglichen Form verwenden. Als Beispiel seien neue Modellansätze in der Photogrammetrie erwähnt, welche die Aerotriangulation, das Oberflächenmodell und das Orthophotomosaik in einem Berechnungsschritt bestimmen [10].

Bisher war es oft notwendig, die gesuchten Parameter in mehrstufigen Prozessen zu ermitteln, wobei reduzierte bzw. abgeleitete Beobachtungen in die eigentliche Ausgleichung eingeführt wurden. Im statistischen Sinne ist diese Vorgangsweise nur dann erlaubt, wenn Korrelationen, die sich bei abgeleiteten Beobachtungen immer ergeben, in das stochastische Modell der Ausgleichung einfließen. Doch genau diese Korrelationen werden in der Praxis meist vernachlässigt, wodurch vor allem die statistischen Ergebnisse der Ausgleichung verfälscht werden.

Ein für die Praxis wesentlicher Punkt ist, dass in abgeleiteten Beobachtungen das Aufdecken grober Beobachtungsfehlern deutlich schwieriger ist. Durch den funktionalen Zusammenhang zwischen den ursprünglichen und den abgeleiteten Beobachtungen verteilt sich der Fehler einer ursprünglichen Beobachtung auf alle abgeleiteten Beobachtungen, wodurch die Fehlersuche erschwert wird.

Diese Tatsachen rechtfertigen den Mehraufwand für komplexere funktionale Modelle, welche die Beobachtungen in ihrer ursprünglichen Form verwenden. In der Folge wird das funktionale Modell für eine hybride 3D Ausgleichung vorgestellt, das den oben gestellten Ansprüchen gerecht wird. Dabei werden alle mathematischen Ableitungen streng hergeleitet. Vereinfachungen werden gegebenenfalls erst am Ende der Berechnungen durchgeführt, um größt mögliche Zuverlässigkeit für die numerische Berechnung zu gewährleisten. Dieses Ausgleichsmodell wurde mit Unterstützung der Professoren Dr. A. Grimm-Pitzinger und Dr. K. Hanke vom Institut für Geodäsie der Universität Innsbruck in das

geodätische Software Paket GeoNET der Firma IDC-EDV [15] implementiert. Mit diesem wurde auch eine entsprechende Evaluierung des Modells durchgeführt.

## 2. Bezugssystem der Beobachtungsgruppen

Damit man GPS-, Tachymeter- und Nivellementbeobachtungen in „einem Guss“ ausgleichen kann, müssen die Beobachtungsgleichungen im selben Koordinatensystem dargestellt werden. Dazu werden zunächst die einzelnen Bezugssysteme der Beobachtungsgruppe beschrieben.

Für geodätische Zwecke werden im Allgemeinen GPS-Vektoren beobachtet. Das Bezugssystem von GPS ist das WGS84 (World Geodetic System 1984), ein geozentrisches kartesisches Koordinatensystem (siehe Abbildung 1). GPS-Vektoren sind räumliche Vektoren, die grundsätzlich aus einem gleichwertigen Koordinatentripel bestehen.

Mit einem Tachymeter lassen sich Richtungen, Zenitwinkel und Schrägseiten in einem lokalen rechtsdrehenden Horizontsystem beobachten. Die h-Achse des Horizontsystems fällt dabei mit der Lotrichtung im Standpunkt zusammen. Die x-Achse zeigt definitionsgemäß zum Nordpol des Bezugsellipsoids. Azimutbeobachtungen (Kreismessungen) seien in diesem Zusammenhang zu den Tachymeterbeobachtungen gezählt, da sie ebenfalls im selben Horizontsystem beobachtet werden. Obwohl sich die „rohen“ Kreismesswerte auf die momentane Rotationsachse der Erde beziehen, können die Beobachtungen auf die Rotationsachse des Bezugsellipsoids reduziert werden [8].

Bei geometrischen Nivellementbeobachtungen ist der Fall komplizierter, da die Definition von geeigneten Höhensystemen tiefgreifendes Wissen über die physikalische Natur der Erde voraussetzt. Hinzu kommt, dass reine Nivellementergebnisse zwischen zwei Punkten vom Weg abhängig sind. Die Wegunabhängigkeit ist nur durch ein geopotielles Nivellement (Nivellement mit Schwermessungen) gegeben. In Österreich wurde das Gebrauchshöhensystem des staatlichen Festpunktfeldes vor Kurzem auf das System orthometrischer Höhen umgestellt. (Die orthometrische Höhe ist die Länge der gekrümmten Lotlinie vom Geoid bis zum Oberflächenpunkt. Siehe Abbildung 2). Mittels entsprechendem Korrekturglied lassen sich nivellitische Höhenunterschiede in or-

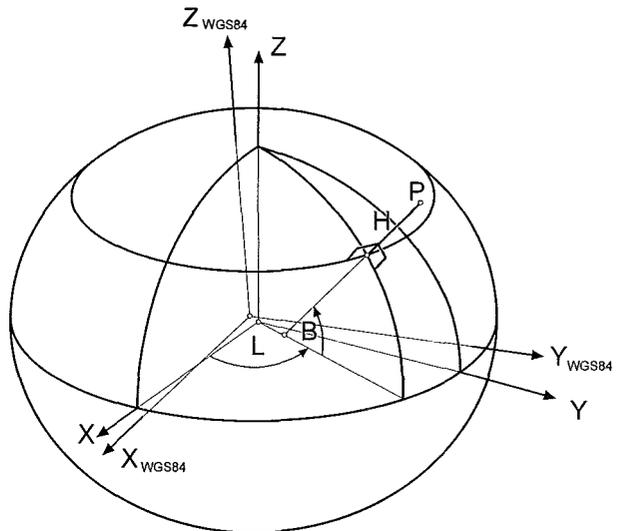


Abbildung 1: Das kartesische und ellipsoidische Koordinatensystem des Bezugsellipsoids

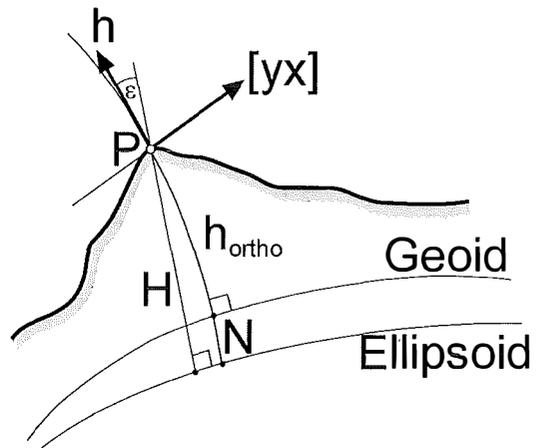


Abbildung 2: Zusammenhang Geoid und Ellipsoid

thometrische Höhenunterschiede umwandeln, was aufgrund fehlender Schwermessungen in der Praxis vernachlässigt wird [2].

## 3. Das Funktionale Modell

### 3.1 Das klassische 2D/1D Ausgleichsmodell

In der klassischen Geodäsie werden zur Lagebestimmung der Netzpunkte alle Beobachtungen auf die Oberfläche des Bezugsellipsoids projiziert. Im Allgemeinen ist der Vermesser – außer bei großräumigen Netzen der Landesvermessung – in erster Linie an den Netzpunktkoordinaten im Projektionssystem interessiert. Dazu werden die Messgrößen anschließend noch ins

Projektionssystem transformiert, damit die Berechnung direkt im Projektionssystem erfolgen kann. Dies bedeutet, dass eine Reihe von Reduktionen an den Messgrößen anzubringen sind. Schrägseiten werden zum Beispiel horizontalisiert, höhenreduziert, erdkrümmungsreduziert und wegen der Projektionsverzerrung korrigiert. Während sich Tachymeterbeobachtungen hypothesenfrei in eine horizontale und in eine vertikale Komponente zerlegen lassen, ist dies bei GPS-Vektoren nicht möglich. GPS-Vektoren müssen zuerst in das Koordinatensystem des Bezugsellipsoids transformiert werden, bevor eine entsprechende Zerlegung durchgeführt werden kann. Obwohl es mittlere Transformationsparameter zwischen dem österreichischen Landesystem und dem WGS 84 gibt, liefern diese Werte lokal oft unbefriedigende Ergebnisse. Deshalb werden auch die Transformationsparameter meist als Unbekannte in die Ausgleichung eingeführt, was bei einer getrennten Lage- und Höhenausgleichung nicht möglich ist.

### 3.2 3D Ausgleichsmodell

Die oben genannten Nachteile und dadurch verursachten statistischen Unzulänglichkeiten lassen sich durch ein erweitertes funktionales Modell umgehen, wobei das Landesellipsoid (in Österreich das Bessel Ellipsoid) in seiner speziellen Lagerung als Bezugsfläche dient. Als Koordinatensystem der Ausgleichung wird ein geozentrisches kartesisches Koordinatensystem gewählt, das seinen Ursprung im Zentrum des Bezugsellipsoids hat. Die Z-Achse fällt mit der Rotationsachse des Ellipsoids zusammen (Parallele der mittleren Drehachse der Erde). Die X-Achse geht durch den Nullmeridian des Ellipsoids. Die Umrechnung von Punktkoordinaten des Projektionssystems in das kartesische geozentrische Koordinatensystem erfolgt zweistufig über das ellipsoidische Koordinatensystem.

In der Literatur finden sich Transformationsformeln unterschiedlicher Genauigkeit für die Umwandlung von Gauss-Krüger Koordinaten (österreichisches Projektionssystem) in ellipsoidische Koordinaten (oft auch als geographische Koordinaten bezeichnet). Deshalb wird hier keine entsprechende Formel angegeben werden. Es sei nur auf entsprechende Literatur verwiesen [2]. Neben den Lagekoordinaten  $y$  und  $x$  muss auch die Höhenkoordinate  $h$  in die ellipsoidische Höhe  $H$  umgerechnet werden. Bei orthometrischen Höhensystemen ist der Zusammenhang wie in Abbildung 2 ersichtlich und in Abschnitt 3.3.3. beschrieben sehr einfach.

Sind die ellipsoidischen Koordinaten  $(B,L,H)$  berechnet, erfolgt ihre Umrechnung in kartesische Koordinaten  $(X,Y,Z)$  durch die Gleichungen (1) und (2) (siehe Abbildung 1).

$$X = (N + H)\cos B \cos L \quad (1)$$

$$Y = (N + H)\cos B \sin L$$

$$Z = (N \cdot (1 - e^2) + H)\sin B$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \quad (2)$$

Der Vollständigkeit halber sind die Zusammenhänge zwischen großer und kleiner Halbachse ( $a$  und  $b$ ) und der 1. und 2. numerischen Exzentrizität des Ellipsoids in Gleichung (3) angegeben.

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (3)$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

Die Umrechnung von kartesischen in ellipsoidische Koordinaten erfolgt meist iterativ. Es gibt allerdings auch eine wenig bekannte geschlossene Form, die sich über einen Hilfswinkel (4) recht einfach darstellen lässt [13].

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (4)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{Z \cdot a}{P \cdot b}\right)$$

$$L = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$B = \arctan\left(\frac{Z + e'^2 \cdot b \cdot \sin^3 \theta}{P - e'^2 \cdot a \cdot \cos^3 \theta}\right) \quad (5)$$

$$H = \frac{P}{\cos B} - \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}$$

Wie später noch ersichtlich, benötigt man für die Ableitungen der Beobachtungsgleichungen die differentiellen Zusammenhänge zwischen den ellipsoidischen Koordinaten  $(B,L,H)$  und den kartesischen Koordinaten  $(X,Y,Z)$ . Während sich die Berechnung der Ableitungen  $dX$ ,  $dY$  und  $dZ$  aus Gleichungen (1) verhältnismäßig einfach gestaltet (Gleichung (7)), sind die gesuchten Ableitungen von  $dL$ ,  $dB$  und  $dH$  aus Gleichung (5) mathematisch schwierig beherrschbar. Wie im Folgenden gezeigt wird, darf  $dL$ ,  $dB$ , und  $dH$  auch durch Umformung von Gleichung (7) berechnen werden.

$$f_1 = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B)} + H \quad (6)$$

$$f_2 = \cos B \cdot \left( \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} + H \right)$$

$$dY_{\text{geoz}} = J \cdot dY_{\text{ell}} =$$

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1 \sin B \cos L & -f_2 \sin L & \cos B \cos L \\ -f_1 \sin B \sin L & f_2 \cos L & \cos B \sin L \\ f_1 \cos B & 0 & \sin B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dB \\ dL \\ dH \end{pmatrix} \quad (7)$$

Die Matrix in Gleichung (7) wird als Jacobi Matrix der Gleichungen (1) bezeichnet. Die Gleichungen (5) beschreiben den zu (1) inversen Koordinatenwechsel. Daher sind deren Ableitungen nach der Kettenregel durch die Inverse der Jacobi Matrix aus Gleichung (7) gegeben. Die Inversion der Jacobi Matrix gelingt sehr elegant, wenn man diese in eine Orthogonalmatrix und eine Diagonalmatrix zerlegt.

$$J = M_{\text{ortho}} \cdot M_{\text{dia}} =$$

$$\begin{pmatrix} -\sin B \cos L & -\sin L & \cos B \cos L \\ -\sin B \sin L & \cos L & \cos B \sin L \\ \cos B & 0 & \sin B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Für eine Orthogonalmatrix gilt, dass ihre Inverse gleich der Transponierten ist. Diagonalmatrizen werden durch Kehrwertbildung der Diagonalelemente invertiert. Also ergibt sich die Inverse der Jacobi Matrix wie in Gleichung (9) angegeben.

$$J^{-1} = (M_{\text{ortho}} \cdot M_{\text{dia}})^{-1} = M_{\text{dia}}^{-1} \cdot M_{\text{ortho}}^T \quad (9)$$

Damit ist es einfach möglich, dB, dL und dH in Abhängigkeit von dX, dY und dZ darzustellen (10).

$$\begin{pmatrix} dB \\ dL \\ dH \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{f_1} \sin B \cos L & -\frac{1}{f_1} \sin B \sin L & \frac{1}{f_1} \cos B \\ -\frac{1}{f_2} \sin L & \frac{1}{f_2} \cos L & 0 \\ \cos B \cos L & \cos B \sin L & \sin B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} \quad (10)$$

Während man in der Literatur (z.B. [2] und [11]) für Gleichung (10) mathematisch vereinfachte Herleitungen unter Berücksichtigung der geringen Exzentrizität der verwendeten Rotationsellipsoide findet, sind die obigen Ableitungen hingegen in voller Strenge durchgeführt. Dabei sei erwähnt, dass die streng hergeleitete Gleichung für dH mit den vereinfacht hergeleiteten Gleichungen in [2] und [11] ident ist, während sich die Gleichungen für dB und dL unterscheiden.

### 3.3 Ableitung der Beobachtungsgleichungen

Im Folgenden werden nun die Beobachtungsgleichungen der einzelnen Beobachtungsgruppen hergeleitet. Da es sich um nicht-lineare Gleichungen handelt, müssen diese für die Ausgleichsrechnung linearisiert werden [12].

#### 3.3.1 Differentielle Ableitungen von Tachymeterbeobachtungen

Für die Ableitung der Tachymeterbeobachtungen im kartesischen geozentrischen Koordinaten-

system ist der Übergang vom lokalen Horizontsystem in das geozentrische System notwendig. Die Transformation ist in Gleichung (11) beschrieben.

$$v_{\text{geoz}} = R_3(270^\circ - L) \cdot R_1(B - 90^\circ) \cdot v_{\text{horiz}}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin B \cos L & \sin L & \cos B \cos L \\ \sin B \sin L & \cos L & \cos B \sin L \\ \cos B & 0 & \sin B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ h \end{pmatrix} \quad (11)$$

Die Transformation setzt voraus, dass die Lotrichtung in der Natur parallel zur Ellipsoidnormalen ist, was jedoch im Allgemeinen nicht der Fall ist. Die astronomische Breite und Länge (die sich auf die Lotrichtung beziehen) sind nur im Fundamentalpunkt des Landessystems per Definition mit der ellipsoidischen Breite und Länge identisch. Die Unterschiede zwischen astronomischer und ellipsoidischer Breite bzw. Länge werden bekanntlich als Lotabweichungen bezeichnet. Weil die Lotabweichung klein ist (in Österreich maximal  $\pm 30''$  [6]), genügt es, diese wie folgt in den partiellen Ableitungen der Beobachtungsgleichungen zu berücksichtigen.

Azimutbeobachtungen und Richtungsbeobachtungen unterscheiden sich nur durch Addition der Orientierungsunkanntenen. Die Darstellung der funktionalen Zusammenhänge für Richtungsbeobachtungen ist trivial, wenn die partiellen Ableitungen der Azimutbeobachtungen bekannt sind (12).

$$dr_{12} = da_{12} - dO \quad (12)$$

Die partiellen Ableitungen für Azimute lassen sich ausgehend von Gleichung (13) berechnen.

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} \quad (13)$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} da = \frac{dy \cdot x + dx \cdot y}{x^2} \quad (14)$$

Die lokalen Horizontkoordinaten x und y müssen nun durch die geozentrischen Koordinaten X und Y substituiert werden, was über die Zusammenhänge der Gleichung (11) gelingt. Die Ableitungen sind recht langwierig, weshalb hier nur das Endergebnis wiedergegeben wird (15).

$$\begin{aligned} da_{12} = & \frac{\sin B_1 \cos L_1 \sin \alpha_{12} - \sin L_1 \cos \alpha_{12}}{s_{12} \sin z_{w12}} (dX_2 - dX_1) + \\ & + \frac{\sin B_1 \sin L_1 \sin \alpha_{12} + \cos L_1 \cos \alpha_{12}}{s_{12} \sin z_{w12}} (dY_2 - dY_1) - \\ & - \frac{\cos B_1 \sin \alpha_{12}}{s_{12} \sin z_{w12}} (dZ_2 - dZ_1) + \end{aligned} \quad (15)$$

$$+ \cot z_{w12} \sin \alpha_{12} dB + (\sin B_1 - \cos \alpha_{12} \cos B_1 \cot z_{w12}) dL$$

Die partiellen Ableitungen für Zenitwinkel- (16) und Schrägstreckenbeobachtungen (17) findet man auf ähnlichem Wege. Die vollständige Ablei-

tung der Beobachtungsgleichungen kann z.B. in [11] nachgelesen werden.

$$dZ_{W12} = \frac{(X_2 - X_1) \cos Z_{W12} - s_{12} \cos B_1 \cos L}{s_{12}^2 \cdot \sin Z_{W12}} (dX_2 - dX_1) + \frac{(Y_2 - Y_1) \cos Z_{W12} - s_{12} \cos B_1 \sin L}{s_{12}^2 \cdot \sin Z_{W12}} (dY_2 - dY_1) + \frac{(Z_2 - Z_1) \cos Z_{W12} - s_{12} \sin B_1}{s_{12}^2 \cdot \sin Z_{W12}} (dZ_2 - dZ_1) - \cos \alpha_{12} dB_1 - \cos B_1 \sin \alpha_{12} dL_1 \quad (16)$$

$$ds_{12} = \frac{X_2 - X_1}{s_{12}} (dX_2 - dX_1) + \frac{Y_2 - Y_1}{s_{12}} (dY_2 - dY_1) + \frac{Z_2 - Z_1}{s_{12}} (dZ_2 - dZ_1) \quad (17)$$

Die Terme dB und dL in den Gleichungen (15) und (16) sind noch näher zu erläutern. Der mathematische Hintergrund dieser Terme liegt in der Tatsache, dass B und L nicht konstant sind, sondern in einem funktionalen Zusammenhang mit den geozentrischen Koordinaten X,Y und Z stehen. Daher müsste man, um mathematisch ganz korrekt zu bleiben, für dB und dL die Ergebnisse aus Gleichung (10) einsetzen. Im Zuge der Ausgleichung darf dieser funktionale Zusammenhang allerdings vernachlässigt werden, da eine Koordinatenänderung von 1 m im ungünstigsten Fall eine Winkeländerung von 0,03'' nach sich zieht. Reichsthaler [11] interpretiert die Terme dB und dL als Lotabweichungen, womit eine entsprechende Reduktion von Azimutmessungen, Richtungen und Zenitwinkeln entfällt. Er zeigt auch, dass Lotabweichungen vor allem Zenitwinkel verfälschen, während der Einfluss auf Azimut- und Richtungsbeobachtungen im Allgemeinen vernachlässigt werden darf. Abschließend sei noch erwähnt, dass Lotabweichungen keinen Einfluss auf Schrägstreckenbeobachtungen haben (Gleichung (17) enthält keine Terme mit dB und dL).

### 3.3.2 Differentielle Ableitungen von GPS-Vektoren

GPS-Beobachtungen werden, wie bereits erwähnt, mittels einer Transformation (3 Drehwinkel und Maßstab) in geozentrische Koordinaten (X,Y,Z) umgerechnet (dazu siehe Abbildung 1). Umgekehrt interpretiert lässt sich der Zusammenhang wie in Gleichung (18) darstellen.

$$v_{gps} = m \cdot R \cdot v_{geoz} = T \cdot v_{geoz} \quad (18)$$

Die Ableitung der differentiellen Beobachtungsgleichung ist besonders einfach, wenn man den Umstand berücksichtigt, dass das geozentrische Koordinatensystem des Bezugsellip-

soids und das WGS84 nur um kleine Rotationswinkel verdreht sind. Dies erlaubt das Ersetzen der Transformationsmatrix aus Gleichung (18) durch eine sogenannte differentielle Transformationsmatrix (19).

$$v_{gps} = \begin{pmatrix} m & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & m & w_1 \\ w_2 & -w_1 & m \end{pmatrix} \cdot v_{geoz} \quad (19)$$

Diese Matrix lässt sich herleiten, wenn folgende mathematische Vereinfachungen verwendet werden: Der Cosinus kleiner Winkel ist sehr nahe bei 1. Der Sinus kleiner Winkel darf durch die Bogenlänge des Winkels ersetzt werden. Somit ergeben sich die differentiellen Beobachtungsgleichungen wie in Gleichung (20) dargestellt.

$$\begin{aligned} dX_{GPS12} &= dX_2 - dX_1 + (X_2 - X_1) dm - (Z_2 - Z_1) dw_2 + (Y_2 - Y_1) dw_3 \\ dY_{GPS12} &= dY_2 - dY_1 + (Y_2 - Y_1) dm + (Z_2 - Z_1) dw_1 - (X_2 - X_1) dw_3 \\ dZ_{GPS12} &= dZ_2 - dZ_1 + (Z_2 - Z_1) dm + (Y_2 - Y_1) dw_1 - (X_2 - X_1) dw_2 \end{aligned} \quad (20)$$

Dabei wurde m a priori mit 1 angesetzt. Dies ist ohne Einschränkung der Allgemeinheit möglich, weil die Beobachtungsgleichungen (19) linear sind (Bekanntlich lassen sich Unbekannte in linearen Beobachtungsgleichungen mit nur einer Ausgleichsiteration unabhängig von deren Näherungen bestimmen).

Wie bei den Schrägstreckenbeobachtungen erkennt man, dass Lotabweichungen keinen Einfluss auf GPS-Vektoren haben.

### 3.3.3 Differentielle Ableitungen von Nivellementbeobachtungen

Um nivellitische Höhenunterschiede in die Ausgleichung einführen zu können, müssen diese in ellipsoidische Höhenunterschiede umgewandelt werden. Im Falle des österreichischen Höhensystems gelingt dies über einen Zwischenschritt, in dem die Nivellementbeobachtung in eine orthometrische Höhendifferenz umgerechnet wird. Zwischen ellipsoidischen Höhen und orthometrischen Höhen gilt das Theorem von Villarceau (21), wobei N die Geoidundulation ist [2].

$$H_{ell2} - H_{ell1} = (h_{ortho2} - h_{ortho1}) + (N_2 - N_1) = \Delta h_{ortho} + \Delta N \quad (21)$$

Wie bereits in Abschnitt 2. erwähnt, lässt sich das reine Nivellementergebnis mittels orthometrischer Korrektur in einen orthometrischen Höhenunterschied umwandeln (22).

$$\Delta h_{ortho} = \Delta h_{niv} + k_{orth} \quad (22)$$

Damit lässt sich die nivellitische Höhendifferenz wie in Gleichung (23) darstellen.

$$\Delta h_{niv12} = H_{ell12} - H_{ell11} - (\Delta N_{12} + k_{orth}) \quad (23)$$

Dabei ist der Geoidundulationsunterschied (N eine Funktion der ellipsoidische Breite und

Länge des Anfang- und Endpunktes. Dadurch ergeben sich bei der Ableitung der differentielle Beobachtungsgleichung entsprechende Terme für dB und dL. Unter der Annahme guter Näherungskoodinaten der Netzpunkte, darf man (N als konstant ansehen (die Geoidundulation ändert sich nur vergleichsweise langsam mit der Punktposition) und kann die angesprochenen Terme vernachlässigen. Damit lässt sich die differentielle Beobachtungsgleichung, wie in (24) angegeben, vereinfacht berechnen, wobei dH mit der entsprechende Zeile aus Gleichung (10) substituiert wurde.

$$\begin{aligned} d\Delta h_{niv12} &= dH_2 - dH_1 - d\Delta N_{12} \approx dH_2 - dH_1 = \\ &= -\cos B_1 \cos L_1 \cdot dX_1 - \cos B_1 \sin L_1 \cdot dY_1 - \sin B_1 \cdot dZ_1 + \\ &+ \cos B_2 \cos L_2 \cdot dX_2 + \cos B_2 \sin L_2 \cdot dY_2 + \sin B_2 \cdot dZ_2 \end{aligned} \quad (24)$$

### 3.4 Rückrechnung der Ergebnisse nach der Ausgleichung

Mit oben hergeleiteten Formeln wird eine Ausgleichung im geozentrischen Koordinatensystem (X,Y,Z) durchführen. Im Allgemeinen ist man aber an den ausgeglichenen Punktkoordinaten und deren Genauigkeit im Projektionssystem interessiert. Die Umrechnung der Punktkoordinaten erfolgt wie vor der Ausgleichung nur in umgekehrter Richtung (Zwischenschritt über das ellipsoidische Koordinatensystem). Mit der Transformationsmatrix in Gleichung (11) lassen sich die 3X3 Varianzmatrizen der Punkte in das Horizontsystem umrechnen [11], womit auch das Problem der Koordinatengenauigkeiten gelöst ist.

## 4. Problemfaktor Zenitwinkelbeobachtungen

Zenitwinkelbeobachtungen sind genauigkeitslimitierende Faktor bei 3D Ausgleichungen. Neben Fehlereinflüssen von Lotabweichungen werden Zenitwinkel vor allem von der Refraktion der bodennahen Atmosphäre systematisch verfälscht. Diese beiden Faktoren wirken auch auf andere Beobachtungsgruppen. Allerdings sind dort die Verfälschungen aber deutlich geringer. Im letzten Jahrhundert wurden Verfahren und Messmethoden entwickelt, welche es ermöglichen den Refraktionseinfluss zu modellieren bzw. zu eliminieren. Für die Praxis hat sich besonders die Methode der gleichzeitig gegenseitige Zenitwinkelmessungen bewährt, welche den Refraktionseinfluss durch Mittelbildung gegenseitiger Messungen eliminiert [4]. Um auch bei diesem Messkonzept keine abgeleiteten Zenitwinkelbeobachtungen in die Ausgleichung einzuführen, müsste das funktionale Ausgleichmodell erweitert werden. Dazu ist für jede Hin- und Rückmessung eine zusätzliche Unbekannte

anzusetzen, was eine erhebliche Vergrößerung der Normalgleichungsmatrix zur Folge hätte. Ob dieses Ausgleichsmodell tatsächliche bessere Aufdeckbarkeit von Fehlern in einzelnen Zenitwinkelbeobachtungen gewährleistet, soll Thema zukünftiger Untersuchungen sein.

## 5. Zusammenfassung und Ausblick

Das präsentierte funktionale Ausgleichsmodell bietet die Möglichkeit GPS-Vektoren, Tachymeter- bzw. Azimutbeobachtungen sowie Nivellementmessungen in „einem Guss“ auszugleichen. Das Koordinatensystem in dem die Berechnungen erfolgen ist ein kartesisches geozentrisches Koordinaten, wobei das Ellipsoid des Landeskoordinatensystems als Bezugsfläche dient. Dadurch erfolgt die Ausgleichung losgelöst vom Projektionssystem und Höhenystem, welches meridianstreifen-übergreifende Berechnungen ohne Zusatzaufwand erlaubt. Auch wenn die Transformation zwischen den einzelnen Koordinatensystemen mehr Aufwand im Vergleich zu einer 3D Ausgleichung im Projektionssystem bedeutet, so bietet das präsentierte Ausgleichsmodell – besonders vom statistischen Standpunkt betrachtet – Vorteile die diesen Mehraufwand rechtfertigen. Dem aufwendigeren funktionalen Modell stehen weniger Reduktionen der Beobachtungen gegenüber. So entfallen zum Beispiel Projektions- und Höhenreduktion von Schrägstrecken bzw. GPS-Vektoren.

Die 3D Ausgleichung im Projektionssystem hat einen zusätzlichen „funktionalen“ Schwachpunkt. Die Höhenreduktion von GPS-Vektoren ist problematisch, da es die Zerlegung in eine Horizontal- und Vertikalkomponente des – ins Landessystem transformierten – Vektors voraussetzt. Wie in 3.1 angegeben, werden die entsprechenden Transformationsparameter meist als Unbekannte in die Ausgleichung eingeführt. Dadurch entsteht der unbefriedigende Zustand, dass Parameter der Ausgleichung die Reduktionen beeinflussen, wodurch die GPS-Vektoren nach jeder Iteration erneut reduziert werden müssen.

In der Ausgleichsrechnung sind im statistischen Sinne nur unabhängige, mit zufälligen Fehlern behaftete Beobachtungen erlaubt. Daher sollten Beobachtungen in möglichst ursprünglicher Form (keine abgeleiteten Messgrößen) in die Ausgleichung eingeführt werden, was beim präsentierten 3D Ausgleichsmodell getan wurde. Dadurch bleibt die Aufdeckbarkeit von fehlerhaften Beobachtungen möglichst groß. Dies ist

wichtig, da die Ausgleichung nach der L2-Norm (Minimierung der gewichteten Quadratsumme der Verbesserung) die Tendenz hat Fehler zu „verschmieren“ [9]. Der Ausschluss fehlerhafter Beobachtungen von der Ausgleichung erhöht letztendlich auch die Zuverlässigkeit der Ergebnisse.

Wie bereits unter 1. erwähnt wurde das präsentierte funktionale Ausgleichsmodell mit dem Programmpaket GeoNET [15] erfolgreich evaluiert. Dabei konnte gezeigt werden, dass besonders bei 3D-Netzen großer Ausdehnung bzw. bei großen Höhenunterschieden zwischen den Netzpunkten die Berechnung mit dem präsentierten Modell genauere Ergebnisse liefert als die herkömmliche 3D Ausgleichungen im Projektionssystem. Dass aufwendigere Ausgleichsmodelle nicht notwendigerweise komplexere Programmhandhabung bedeuten (ein wichtiger Aspekt für den praktischen Einsatz geodätischer Software), wird bei der Verwendung von GeoNET deutlich. Die Transformation der Netzpunkte in das geozentrische System sowie die Rückrechnung der Ergebnisse erfolgt hier ohne Benutzereingriff im Hintergrund.

Abschließend sei nochmals auf Zusammenhänge und Ergebnisse zwischen ellipsoidischen und kartesischen Koordinaten des Abschnittes 3.2 verwiesen. Es wurden geschlossene Formeln für die Umrechnung der Koordinaten in beide Richtungen angegeben. Zusätzlich konnte gezeigt werden, dass sich die entsprechenden differentiellen Beziehungen für beide Richtungen mathematisch exakt darstellen lassen.

#### Dank

Die Autoren bedanken sich bei Herrn Prof. Dipl.-Ing. Dr. Albert Grimm-Pitzinger für die wissenschaftliche Unterstützung bei der Erstellung dieser Publikation.

#### Literatur

- [1] *Bauer M.*, 1997, Vermessung und Ortung mit Satelliten. Karlsruhe, Wichmann.

- [2] *Bretterbauer K.*, 1995, Skriptum zur Vorlesung Höhere Geodäsie. Technische Universität Wien
- [3] *Bronstein I.N et. al.*, 1993. Taschenbuch der Mathematik. Thun, Frankfurt am Main, Verlag Harri Deutsch
- [4] *Brunner F.*, 1972, Beiträge zum trigonometrischen Nivellement im Gebirge, Dissertation, Technische Universität Wien
- [5] *Grimm-Pitzinger A.*, 1988, Verbesserung des funktionalen Modells eines Höhennetzes nach mehreren Epochen, Österreichische Zeitung für Vermessungswesen und Photogrammetrie, Heft 3, 1988
- [6] *Grimm-Pitzinger A., Hanke K., Weinold T.*, 1991, GPS-Messungen im Hochgebirge, Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie, Heft 1, 1991
- [7] *Grimm-Pitzinger A.*, 1991, Die Lokalisierbarkeit grober Datenfehler als Gütekriterium in satellitengestützten Netzen, Allgemeine Vermessungsnachrichten, Heft 1, Karlsruhe, 1991
- [8] *Kahmen H.*, 1993, Vermessungskunde, 18. Auflage. Berlin, New York, Walter de Gruyter
- [9] *Kraus K.*, 1996, Photogrammetrie, Band 2, Verfeinerte Methoden und Anwendungen. Bonn, Fred. Dümmers Verlag, S. 232–234
- [10] *Krzystek P., Heuchel T., Hirt U., Petran F.*, 1996. An Integral Approach to Automatic Aerial triangulation and Automatic DEM Generation. International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing. Vol. XXXI, Part B3. Vienna 1996, S. 405–414.
- [11] *Reichsthaler K.*, 1983, Dreidimensionale Netzausgleichung im Testnetz Steiermark unter Berücksichtigung von Doppelmessungen. Diplomarbeit an der Technischen Universität Graz
- [12] *Reißmann G.*, 1980, Die Ausgleichsrechnung: Grundlagen und Anwendungen in der Geodäsie, Berlin, Verlag für Bauwesen
- [13] *Seeber G.*, 1989. Satellitengeodäsie. Berlin, New York, Walter de Gruyter
- [14] *Wittmann E.*, 2000, Bestimmung von GPS-Höhen und Höhenanomalien in einem grenzüberschreitenden Netz, Diplomarbeit an der Technischen Universität Graz
- [15] IDC-EDV, 2002, [www.geosi.at](http://www.geosi.at)

#### Anschrift der Autoren:

Dipl.-Ing. Johannes Otepka: Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung, Technische Universität Wien, Gusshausstraße 27-29/127, A-1040 Wien, [johannes@avt.at](mailto:johannes@avt.at)

Mag. Georg Regensburger: Institut für Informatik, Universität Innsbruck, Viktor-Franz-Hess Haus, Technikerstraße 25/7, A-6020 Innsbruck, [georg.regensburger@uibk.ac.at](mailto:georg.regensburger@uibk.ac.at)