

Paper-ID: VGI_200205



Neue Netzentwürfe auf Basis finiter Elemente

Kurt Bretterbauer ¹

¹ *Institut für Geodäsie und Geophysik, TU Wien, A-1040 Wien, Gußhausstraße 27-29*

VGI – Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation **90** (2), S. 43–46
2002

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Bretterbauer_VGI_200205,  
Title = {Neue Netzentw{\u}rfe auf Basis finiter Elemente},  
Author = {Bretterbauer, Kurt},  
Journal = {VGI -- {\u}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessung und  
Geoinformation},  
Pages = {43--46},  
Number = {2},  
Year = {2002},  
Volume = {90}  
}
```





Neue Netzentwürfe auf Basis finiter Elemente

Kurt Bretterbauer, Wien

Zusammenfassung

Die Methode der finiten Elemente (FEM) ist ein mächtiges mathematisches Werkzeug zur Lösung komplexer technischer Aufgaben. Bestimmte Algorithmen der Methode können mit Vorteil zum Entwurf kartographischer Abbildungen eingesetzt werden. Dies wird an zwei Beispielen demonstriert. Auf die Verwandtschaft zwischen den Verbiegungen einer belasteten Platte in der Elastomechanik und den Verzerrungen in den kartographischen Projektionen wird hingewiesen.

Abstract

The Method of Finite Elements (FEM) is a powerful instrument for solving complex technical problems. Certain algorithms can be used to advantage for the creation of cartographic projections. This is demonstrated by two examples. The relation between the warping of a loaded plate in elastomechanics and the distortions of cartographic projections is pointed out.

1. Einführung

Seit leistungsfähige Computer zur Verfügung stehen, ist die Methode der finiten Elemente (FEM) zum wichtigsten Verfahren für die numerische Lösung von Variationsproblemen und von partiellen Differentialgleichungen mit Randbedingungen in den Ingenieurwissenschaften und der mathematischen Physik geworden. Sie ermöglicht es, für viele technische Probleme anspruchsvolle und aussagekräftige mathematische Modelle zu erstellen. Besonders erfolgreich ist FEM in der Elastomechanik. Hier besteht eine Beziehung zu den kartographischen Netzentwürfen. Die ebenen Bilder der sphärischen Erde können als Deformation einer Kugelschale in die Ebene gedeutet werden, was vergleichbar ist mit der Durchbiegung einer belasteten Platte, ein klassisches Anwendungsgebiet der FEM.

Der Grundgedanke der FEM besteht darin, ein z. B. zweidimensionales Gebiet mit komplizierter Umrandung in einfache Teilgebiete zu zerlegen, etwa in Dreiecke oder Vierecke [1], [2], [3]. Die Methode kann auf dreidimensionale Gebiete erweitert werden. Es ist hier nicht möglich, die mathematischen Grundlagen der FEM auch nur ansatzweise zu erläutern. Bestimmte Elemente der Methode aber können direkt für den kartographischen Netzentwurf übernommen werden.

2. Zweidimensionale Elemente

Gegeben sei ein Feldproblem aus den Ingenieurwissenschaften. Nach Dreiecks- oder Viereckszerlegung des Gesamtgebietes in Teilge-

biete, werden die Beiträge von Gebietsintegralen der einzelnen Elemente benötigt. Für die einheitliche Behandlung der erforderlichen Integration über beliebige Dreiecke oder Parallelogramme in allgemeiner Lage wird die Abbildung dieser Figuren auf ein Einheitsdreieck bzw. Einheitsquadrat durchgeführt und auf krummlinige Dreiecke und Vierecke erweitert. Für die folgende Anwendung wird hier nur der Fall der krummlinigen Vierecke behandelt.

Zunächst wird ein Quadrat der Seitenlänge Eins mit acht Knotenpunkten definiert, deren Koordinaten aus der Abbildung offensichtlich sind (Abb. 1); wichtig ist die Reihenfolge der Numerierung der Knoten.

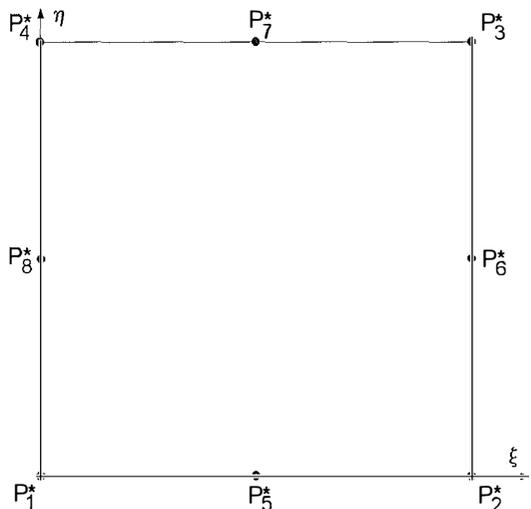


Abb. 1: Einheitsquadrat mit Knoten

Zugeordnet ist ein beliebiges krummliniges Viereck mit analogen Knoten. Die Knoten P_5 bis P_8 müssen nicht die Seiten halbieren (Abb. 2):

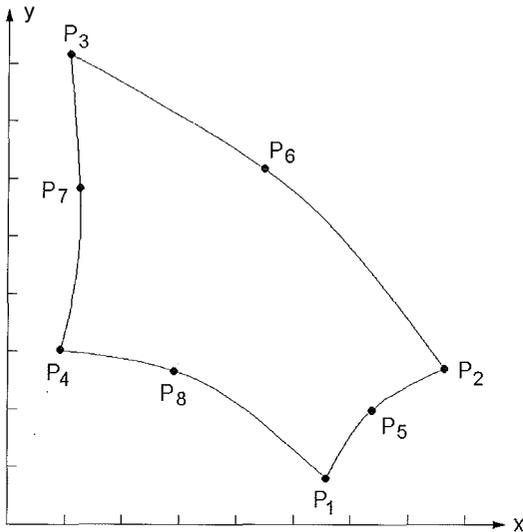


Abb. 2: Krummliniges Viereck mit Knoten

Nun muß eine umkehrbar eindeutige Transformation der Knoten des krummlinigen Vierecks in die Knoten des Einheitsquadrats gefunden werden. Darüber hinaus muß ein stetiger Übergang zu den benachbarten Elementen gewährleistet sein. Dies leistet ein unvollständiges Polynom 3. Grades mit acht unabhängigen Koeffizienten:

$$\begin{aligned} x &= \gamma_1 + \gamma_2 \xi + \gamma_3 \eta + \gamma_4 \xi^2 + \gamma_5 \xi \eta + \gamma_6 \eta^2 + \gamma_7 \xi^2 \eta + \gamma_8 \xi \eta^2, \\ y &= \delta_1 + \delta_2 \xi + \delta_3 \eta + \delta_4 \xi^2 + \delta_5 \xi \eta + \delta_6 \eta^2 + \delta_7 \xi^2 \eta + \delta_8 \xi \eta^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Der Ansatz mit den resultierenden Elementen wurde von ihren Entdeckern [4] „quadratischer Ansatz der Serendipity-Klasse“ genannt (nach dem Märchen „Die drei Prinzen von Serendip“ von Horace Walpole), weil der Ansatz zufällig gefunden wurde. Die Ansatzfunktion hat die Eigenschaft, für einen festen Wert der einen Variablen quadratisch in der anderen zu sein. Auf jeder Seite des Einheitsquadrats ist sie eine quadratische Funktion der Bogenlänge; und auf jeder Seite ist die Funktion durch die drei Werte in den Knoten eindeutig festgelegt, woraus die Stetigkeit beim Übergang in ein benachbartes Quadrat folgt [2].

Durch Vorgabe der acht Knotenpunkte ist die Abbildung und damit insbesondere die Form des Randes eindeutig definiert. Aus der Forderung, daß die acht Knoten P_1 bis P_8 die Bildpunkte P_1^* bis P_8^* sind, ergeben sich die Koeffizientenvektoren γ und δ aus den Koordinatenvektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} durch die Beziehungen:

$$\gamma = \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad \delta = \mathbf{A} \mathbf{y}. \quad (2)$$

Die Matrix \mathbf{A} in (2) hat die Gestalt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -3 & -1 & -4 & 4 & 4 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Nach Bestimmung der Werte der Vektoren γ und δ können Punkte innerhalb des krummlinigen Vierecks nach Gl.(1) berechnet werden, indem man ξ und η von 0 bis 1 laufen läßt. Auf diese Weise lassen sich erstaunliche Formen des zugeordneten krummlinigen Vierecks gewinnen.

3. Anwendung auf Netzentwürfe

Aus der möglichen Vielzahl der Entwürfe wurden zwei ausgewählt. Der erste Entwurf bildet eine Hemisphäre der Erde in ein kissenförmiges Viereck ab. Die Koordinaten der acht Knoten dieses Vierecks wurden wie folgt gewählt:

Knoten	1	2	3	4	5	6	7	8
X	-1	1	1	-1	0	0.6	0	-0.6
Y	-1	-1	1	1	-0.6	0	0.6	0

Tabelle 1: Koordinaten der Knoten des kissenförmigen Vierecks

Das Resultat zeigt die Abb. 3:

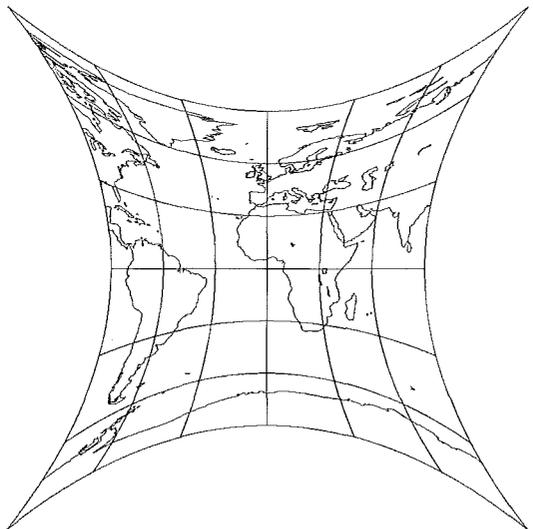


Abb. 3: Hemisphäre in kissenförmigem Viereck; Netzmaschen $30^\circ \times 30^\circ$

Der zweite Entwurf zeigt eine Weltkarte in einem ellipsenähnlichen Umriß. Die Koordinaten der Knoten des krummlinigen Vierecks sind:

Knoten	1	2	3	4
X	-0.707	0.707	0.707	-0.707
Y	-0.495	-0.495	0.495	0.495

Knoten	5	6	7	8
X	0	1	0	-1
Y	-0.7	0	0.7	0

Tabelle 2: Koordinaten der Knoten des ellipsenförmigen Vierecks

Abb. 4 zeigt den ausgeführten Entwurf.

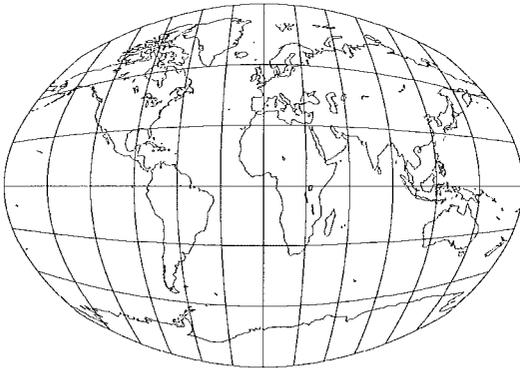


Abb. 4: Weltkarte in ellipsenförmigem Umriß; Netzma-schen $30^\circ \times 30^\circ$

Deutlich sind in der Umrißkurve vier leichte Knicke zu erkennen. Das sind die Orte der Knotenpunkte P_5 bis P_8 . Ihre Lage kann auch variiert werden. Die anderen vier Knoten liegen in den Enden der Achsen der ellipsenförmigen Kurve.

4. Die Verzerrungen

Wie in der Einführung schon angedeutet, müßte eine Analyse der Verzerrungen mit den Mitteln der FEM möglich sein. Allerdings wäre dazu eine wesentlich tiefer schürfende Untersuchung notwendig. Eine Veranschaulichung der Verzerrungen gelingt am besten durch die Darstellung der Tissot'schen Indikatrizten. Eine strenge Berechnung nach der Theorie von Tissot ist im gegebenen Fall kaum möglich. Ein einfacher Trick hilft hier weiter. Die Verzerrungsellipse ist ja das Abbild eines infinitesimalen Kreises auf der Kugel. Es ist also nur nötig, einen solchen Kreis mit kleinem Radius ($1' = 1$ Seemeile) zu konstruieren und diesen punktweise in die Ebene zu transferieren. Zur Sichtbarmachung der Verzerrungsellipsen müssen diese mit einem kon-

stanten Faktor vergrößert werden [5]. Das Ergebnis zeigen Abb. 5 und 6.

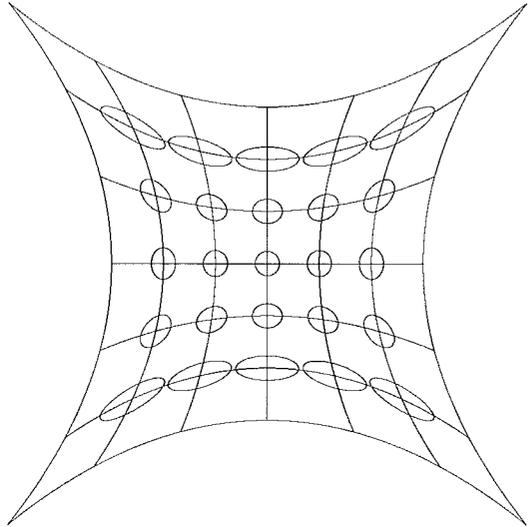


Abb. 5: Tissot'sche Verzerrungsellipsen in der kissenförmigen Abbildung

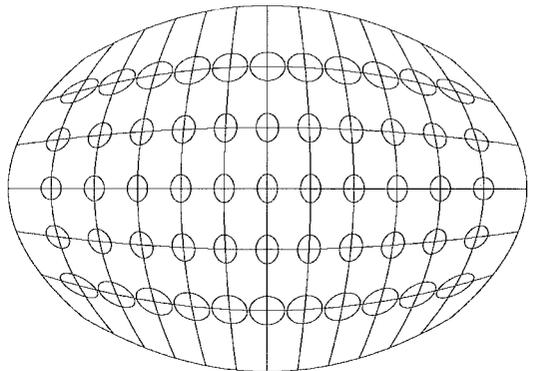


Abb. 6: Tissot'sche Verzerrungsellipsen der Weltkarte mit ellipsenförmigem Umriß

5. Resumee

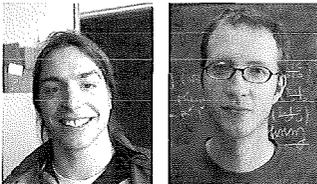
Es wurde gezeigt, daß mit einem quadratischen Ansatz der sogenannten „Serendipity-Klasse“ der Methode der finiten Elemente durchaus ansprechende kartographische Netzentwürfe kreiert werden können, die überdies außerordentlich einfach zu programmieren sind. Da der stetige Übergang zwischen benachbarten Elementen gewährleistet ist, wäre es sogar denkbar, für verschiedene Maschen des Gradnetzes auch verschiedene quadratische Ansätze zu verwenden, wodurch möglicherweise die Verzerrungen gezielt gesteuert werden könnten.

Literatur

- [1] Goering, H., Roos, H.-G., Tobiska, L.: Finite-Element-Methode. Akademie-Verlag, Berlin, 1988.
- [2] Schwarz, H. R.: Methode der finiten Elemente. Teubner, Stuttgart, 1991.
- [3] Ergatoudis, J. G.; Irons, B. M.; Zienkiewicz, O. C.: Curved Isoparametric Quadrilateral Elements for
- [4] Finite Element Analysis. Int. J. Solids Struct. 4, 1968, pp. 31–42.
- [5] Eschenauer, H.; Schnell, W.: Elastizitätstheorie. B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1993.
- [6] Bretterbauer, K.: Die runde Erde, eben dargestellt. Geowissenschaftliche Mitteilungen, Heft 59. Studienrichtung Vermessung und Geoinformation, TU Wien, 2002.

Anschrift des Autors:

Em. o. Univ. Prof. Dr. Kurt Bretterbauer, Institut für Geodäsie und Geophysik, TU Wien, A-1040 Wien, Gußhausstraße 27–29, kbretter@luna.tuwien.ac.at



Hybride 3D Ausgleichung von GPS-, Tachymeter-, und Nivellementbeobachtungen

Johannes Otepka, Wien, Georg Regensburger, Innsbruck

Zusammenfassung

Die hybride 3D Ausgleichung stellt bei der Berechnung geodätischer Netze den Stand der Technik dar. Im Folgenden wird eine funktionales Modell für GPS-, Tachymeter- und Nivellementbeobachtungen vorgestellt, welches die Beobachtungen in möglichst ursprünglicher Form verwendet. Dies hat vor allem für statistische Beurteilungen des Netzes Vorteile. Bei den präsentierten Ableitungen wurde besonders auf die mathematische Strenge geachtet.

Abstract

Hybrid 3D adjustments are state-of-the-art computational models for geodetical networks. In this paper a functional model for various observations, such as GPS-vectors and measurements observed with total stations and levels, is presented. The model only uses physical observations which has advantages for statistical assessments of the results. All necessary derivations were made in high consideration regarding mathematical correctness.

1. Einleitung

Neue Computertechnologien ermöglichen immer umfassendere und komplexere Ausgleichsmodelle, die „tatsächliche“ Beobachtungen in ihrer ursprünglichen Form verwenden. Als Beispiel seien neue Modellansätze in der Photogrammetrie erwähnt, welche die Aerotriangulation, das Oberflächenmodell und das Orthophotomosaik in einem Berechnungsschritt bestimmen [10].

Bisher war es oft notwendig, die gesuchten Parameter in mehrstufigen Prozessen zu ermitteln, wobei reduzierte bzw. abgeleitete Beobachtungen in die eigentliche Ausgleichung eingeführt wurden. Im statistischen Sinne ist diese Vorgangsweise nur dann erlaubt, wenn Korrelationen, die sich bei abgeleiteten Beobachtungen immer ergeben, in das stochastische Modell der Ausgleichung einfließen. Doch genau diese Korrelationen werden in der Praxis meist vernachlässigt, wodurch vor allem die statistischen Ergebnisse der Ausgleichung verfälscht werden.

Ein für die Praxis wesentlicher Punkt ist, dass in abgeleiteten Beobachtungen das Aufdecken grober Beobachtungsfehlern deutlich schwieriger ist. Durch den funktionalen Zusammenhang zwischen den ursprünglichen und den abgeleiteten Beobachtungen verteilt sich der Fehler einer ursprünglichen Beobachtung auf alle abgeleiteten Beobachtungen, wodurch die Fehlersuche erschwert wird.

Diese Tatsachen rechtfertigen den Mehraufwand für komplexere funktionale Modelle, welche die Beobachtungen in ihrer ursprünglichen Form verwenden. In der Folge wird das funktionale Modell für eine hybride 3D Ausgleichung vorgestellt, das den oben gestellten Ansprüchen gerecht wird. Dabei werden alle mathematischen Ableitungen streng hergeleitet. Vereinfachungen werden gegebenenfalls erst am Ende der Berechnungen durchgeführt, um größt mögliche Zuverlässigkeit für die numerische Berechnung zu gewährleisten. Dieses Ausgleichsmodell wurde mit Unterstützung der Professoren Dr. A. Grimm-Pitzinger und Dr. K. Hanke vom Institut für Geodäsie der Universität Innsbruck in das