



## Mittelwerte auf gegebenen Kurven

Helmuth Späth <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Fachbereich Mathematik, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Postfach 2503, D-26111 Oldenburg, Germany*

VGI – Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation **90** (1), S. 23–25  
2002

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Spaeth_VGI_200203,  
Title = {Mittelwerte auf gegebenen Kurven},  
Author = {Sp{"a}th, Helmuth},  
Journal = {VGI -- {"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessung und  
Geoinformation},  
Pages = {23--25},  
Number = {1},  
Year = {2002},  
Volume = {90}  
}
```





# Mittelwerte auf gegebenen Kurven

Helmuth Späth, Oldenburg

## Zusammenfassung

Wir diskutieren Definition und Berechnung von einem Mittelwert gegebener Punkte, der auf einer vorgegebenen Kurve liegen soll. Speziell wird die Gerade, der Kreis und die Ellipse in der Ebene und die Ebene im Raum diskutiert. Numerische Beispiele für die Gerade und den Kreis werden angegeben.

### 1. Problemstellung

Es seien Punkte

$$(x_i, y_i), (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

in der Ebene gegeben. Ihr Mittelwert  $(x, y)$  ist durch die Zielfunktion

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^n (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 \rightarrow \min \quad (2)$$

definiert. Es ist wohlbekannt, dass

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (3)$$

die eindeutige Lösung von (2) ist. Wir führen nun als Nebenbedingung für (2) ein, dass  $(x, y)$  auf einer in der Ebene gegebenen Kurve

$$x = f(t), y = g(t), u \leq t \leq v \quad (4)$$

liegen soll. Dann lautet die Aufgabe (2)

$$F(x(t), y(t)) = F(t) = \sum_{i=1}^n (f(t) - x_i)^2 + (g(t) - y_i)^2 \rightarrow \min \quad (5)$$

Notwendige Bedingung hierfür ist

$$\frac{dF}{dt} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n f'(t)(f(t) - x_i) + g'(t)(g(t) - y_i) = 0 \quad (6)$$

und die Bedingung für ein (lokales) Minimum ist

$$\frac{d^2F}{dt^2} > 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n [f''(t)(f(t) - x_i) + g''(t)(g(t) - y_i) + f'^2(t) + g'^2(t)] > 0. \quad (7)$$

Da (6) und (7) nicht allgemein gelöst werden können, betrachten wir einige konkrete Beispiele, nämlich der Reihe nach ein Geradenstück, einen Kreis, eine Ellipse und für im Raum gegebene Punkte ein Ebenenstück.

### 2. Die Gerade

Wenn man die sehr spezielle Gerade  $x = 0$  ausschließt, dann haben wir statt (4)

$$x = t, y = at + b, u \leq t \leq v. \quad (8)$$

Die Bedingung (6) liefert

$$\sum_{i=1}^n (t - x_i) + a(at + b - y_i) = 0, \quad (9)$$

woraus sich die eindeutige Lösung

$$x^* = t = \frac{1}{n(1+a^2)} \sum_{i=1}^n a(y_i - b) + x_i, \quad (10)$$

$$y^* = b = \frac{a}{n(1+a^2)} \sum_{i=1}^n a(y_i - b) + x_i, \quad (11)$$

ergibt. Wegen

$$\frac{1}{2n} \frac{d^2F}{dt^2} = 1 + a^2 > 0 \quad (12)$$

ist (10), (11) das globale Minimum. Betrachten wir ein Beispiel. Die gegebenen Punkte seien

i	1	2	3	4	5	6	(13)
$x_i$	0	2	5	4	4	10	
$y_i$	0	4	5	1	-3	3	

und es sei  $a = 1/2$ ,  $b = 0$ . Dann ergibt (10) und (11)  $(x^*, y^*) = (4, 2)$ , wogegen die nicht eingeschränkte Mittelwertbildung (3)  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{25}{6}, \frac{19}{6})$  ergibt. Das Intervall  $[u, v]$  muss so gewesen sein, dass es  $t = 4$  enthält, was für  $u = -\infty$  und  $v = \infty$  natürlich immer gilt.

### 3. Der Kreis

Ein Kreis ist durch

$$x = a + r \cos t, y = b + r \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi \quad (14)$$

gegeben, wobei  $(a, b)$  der Mittelpunkt und  $r > 0$  der Radius ist. Wir haben

$$F(t) = \sum_{i=1}^n (a + r \cos t - x_i)^2 + (b + r \sin t - y_i)^2, \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \frac{dF}{dt} = -r \sin t \sum_{i=1}^n (a - x_i) + r \cos t \sum_{i=1}^n (b - y_i) = 0, \quad (16)$$

was

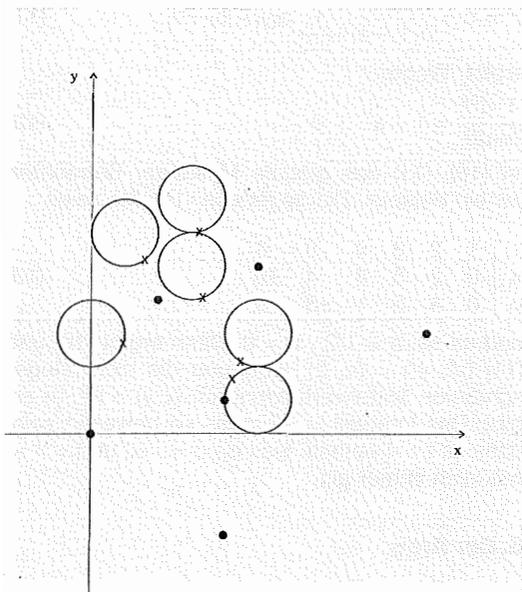
$$\tan t = \frac{\sum_{i=1}^n (b - y_i)}{\sum_{i=1}^n (a - x_i)} \quad (17)$$

ergibt. Es gibt zwei Lösungen von (17), nämlich  $t$  und  $t + \pi$ . Beide hängen nicht von  $r$  ab. Mittels des Vorzeichens von

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dt^2} = -r \cos t \sum_{i=1}^n (a - x_i) - r \sin t \sum_{i=1}^n (b - y_i) \quad (18)$$

kann leicht entschieden werden, welcher der beiden Werte für  $t$  dem globalen Minimum entspricht. Wenn wir wieder die Punkte (13) benutzen und  $a$ ,  $b$  und  $r$  variieren, so erhalten wir die Ergebnisse

a	b	r	t	x*	y*
5	3	1	4.154	4.470	2.152
3	5	1	-1.234	3.330	4.056
1	6	1	-.940	1.590	5.193
5	1	1	2.467	4.219	1.625
3	7	1	-1.355	3.214	6.023
0	3	1	-.310	.952	2.695



Die gegebenen Punkte sind fett in Abbildung 1 markiert; weiter sind die gegebenen Kreise eingezeichnet und mit Kreuzen die entsprechenden 6 Mittelwerte  $(x^*, y^*)$  markiert.

#### 4. Die Ellipse

Eine Ellipse mit Mittelpunkt  $(a, b)$  und Halbachsen  $p$  und  $q$  in Hauptachsenlage ist durch

$$x = a + p \cos t, y = b + q \sin t, p \neq q, 0 \leq t \leq 2\pi \quad (19)$$

gegeben. Zu minimieren ist dann die Funktion

$$F(t) = \sum_{i=1}^n (a + p \cos t - x_i)^2 + (b + q \sin t - y_i)^2. \quad (20)$$

Die notwendige Bedingung (6) ergibt

$$U \sin t - V \cos t + W \sin t \cos t = 0 \quad (21)$$

mit

$$U = p \sum_{i=1}^n (a - x_i),$$

$$V = q \sum_{i=1}^n (b - y_i), \quad (22)$$

$$W = n(p^2 - q^2) \neq 0.$$

Führt man als neue Unbekannte  $c = \tan t$  ein, so wird aus (21) eine Polynomgleichung vierten Grades in  $c$ , die wenigstens eine reelle Lösung hat (siehe [2]). Somit gibt es also zwei oder vier Werte für  $t$ , die (21) erfüllen. Die gesuchte globale Lösung ist dann diejenige hiervon, die den kleinsten Wert für  $F$  ergibt. Für das Lösen einer Polynomgleichung vierten Grades findet man in einer Formelsammlung wie z. B. in [3, S. 62] die entsprechenden Formeln.

#### 5. Die Hyperebene

Statt Punkte (1) in der Ebene geben wir nun allgemeiner

$$(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{m,i}, y_i) \in \mathbb{R}^{m+1} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (23)$$

vor und ein (etwas spezielles) Hyperebenenstück

$$\begin{aligned} x_k &= t_k, u_k \leq t_k \leq v_k \quad (k = 1, \dots, m), \\ y &= a_1 t_1 + \dots + a_m t_m + b. \end{aligned} \quad (24)$$

Hierbei sind  $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m, a_1, \dots, a_m$  und  $b$  gegeben. Für  $m = 2$  sind (23) Punkte im dreidimensionalen Raum und (24) ist ein Stück einer Ebene dort. Für  $m = 1$  erhalten wir das Geradenstück (8) zurück. Zu minimieren ist

$$\begin{aligned} F(t_1, \dots, t_m) &= \sum_{i=1}^n (t_1 - x_{1,i})^2 + \dots + (t_m - x_{m,i})^2 \\ &+ \sum_{i=1}^n (a_1 t_1 + \dots + a_m t_m + b - y_i)^2 \end{aligned} \quad (25)$$

unter der Nebenbedingung  $u_k \leq t_k \leq v_k \quad k = 1, \dots, m$ . Die notwendigen Bedingungen für ein Minimum von (25), also

$$\frac{1}{2} \frac{\delta F}{\delta t_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, m)$$

ergeben

$$\sum_{i=1}^n (t_j - x_{j,i}) + \sum_{i=1}^n a_j (a_1 t_1 + \dots + a_m t_m + b - y_i) = 0$$

$$(j = 1, \dots, m) \quad (26)$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m)^T$ . Setzt man  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)^T$   $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)^T$  mit

$$z_j = \sum_{i=1}^n a_j (b - y_i) + x_{j,i} \quad (j = 1, \dots, m)$$

so kann man (26) in der Form

$$\mathbf{n}(\mathbf{I} + \mathbf{a}\mathbf{a}^T) \mathbf{t} = \mathbf{z} \quad (27)$$

schreiben, wobei  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix und  $\mathbf{a}\mathbf{a}^T$  das dyadische Produkt von  $\mathbf{a}$  mit sich selbst ist. Da die Sherman-Morrison-Formel [1]

$$(\mathbf{I} + \mathbf{a}\mathbf{a}^T)^{-1} = \mathbf{I} - \frac{1}{1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a}} \mathbf{a}\mathbf{a}^T \quad (28)$$

liefert, haben wir eine geschlossene Lösung des linearen Gleichungssystems (26) bzw. (27) gefunden, die, falls sie den Nebenbedingungen

$u_k \leq t_k \leq v_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) genügt, ein globales Minimum ist, da

$$\frac{1}{2n} \frac{\delta^2 F}{\delta \mathbf{t}^2} = \mathbf{I} + \mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

positiv definit ist wegen

$$\mathbf{d}^T (\mathbf{I} + \mathbf{a}\mathbf{a}^T) \mathbf{d} = \mathbf{d}^T \mathbf{d} + (\mathbf{a}^T \mathbf{d})^2 > 0$$

für  $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ .

#### Literatur

- [1] Golub, G. H., Van Loan, C. F.: Matrix Computations, 3rd ed., The John Hopkins University Press, Baltimore 1996.
- [2] Späth, H.: Least squares fitting of ellipses and hyperbolas, Comput. Statistics 12, 329 - 341, 1997.
- [3] Stöcker, H.: (Hrsg.) Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren, 3. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a. M. 1995.

*Anschrift des Verfassers:*

Prof. Dr. Helmut Späth, Fachbereich Mathematik, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Postfach 2503, D-26111 Oldenburg, Germany.  
e-mail: spaeth@mathematik.uni-oldenburg.de

## Dissertationen und Diplomarbeiten

### INSAR-Blockausgleich

*Gutjahr Karlheinz*

Dissertation: Abteilung für Photogrammetrie und Fernerkundung, Institut für Angewandte Geodäsie, TU Graz, 2002. Begutachtet: em. Univ.-Prof. Dr. G. Brandstätter, Dr. W. Schuh

Die SAR-Interferometrie (INSAR) als Standardverfahren zur Erstellung digitaler Geländemodelle (DGM) aus Single-look-complex-Daten wird in drei Verarbeitungsschritte: Phasenprozessierung, Parameterausgleich (AG) und DGM-Generierung, unterteilt. Wichtige Stationen der Prozessierung der interferometrischen Phase (Koregistrierung, Berechnung von INSAR-Produkten, Elimination der geometriebedingten Phase, Rauschreduzierung und Auflösung der Phasenmehrdeutigkeit) werden anhand von ERS-Tandemdaten vorgestellt. Der Schwerpunkt der Arbeit liegt im AG der INSAR-Abbildungsparameter. Die vorgeschlagene, mathematische Beschreibung erlaubt die eindeutige Beziehung zwischen Bild- und Bodenkoordinaten eines abgebildeten Punktes. Neue Passpunktarten, wie z.B. Phasenpasspunkte, sowie darauf aufbauende AG-Konzepte werden diskutiert. Spezielle Aspekte der shuttle radar topographic mission runden diese Betrachtungen ab. In Analogie zum photogrammetrischen Bündelblock-AG wird der vorgestellte AG auf Verbände von INSAR-Modellen erweitert. Die Behandlung von Same-orbit-Szenen wird herausgearbeitet, sowie die Punktmessungen um Verknüpfungspunktarten erweitert. Betrachtungen zum numerischen Verhalten des AG-Systems werden angestellt. Die vorgestellten INSAR-AG-Verfahren werden anhand von Daten der ERS-Tandemmission für Gebiete in Bayern diskutiert. Für die DGM-Generie-

rung wird ausgehend von bekannten Phase-zu-Höhe-Konvertierungen ein neuer Ansatz, der sphärische Trigonometrie nutzt, entwickelt.

### Geophysikalische Untersuchungen zur Hydrologie des Mölltales im Bereich von Döllach

*Michael Pregesbauer*

Diplomarbeit: Institut für Geodäsie und Geophysik, Abteilung Geophysik, TU Wien, 2001. Betreuer: Univ.-Prof. Dr. E. Brückl, Mag. Ch. Ullrich.

Aus dem Datenmaterial einer bereits vorhandenen seismischen sowie einer durchzuführenden gravimetrischen Messung sollte ein 3D Modell eines glazialen Tales erstellt werden. Zu diesem Zwecke wurden entsprechende Messungen im Bereich von Döllach im Mölltal (Kärnten) vorgenommen.

Eine Standardauswertung der seismischen Messdaten ergab, dass sich das kompakte Gestein rund 70 bis 110 Meter unter der gegenwärtigen Taloberfläche befindet und durch Lockergestein überlagert ist. Aus den seismischen Geschwindigkeiten wurden für die verschiedenen Schichten die entsprechenden Dichten geschätzt. Mit Hilfe dieser Dichten wurde eine Modellierung der bereits korrigierten und reduzierten Schwerewerte auf Basis der seismischen Ergebnisse vorgenommen. Anhand von Profilschnitten wurde die Talform des Untergrundes unterhalb des Lockermaterials rekonstruiert. Mittels einer Vielzahl solcher Profilschnitte wurde ein 3D Modell des Tales hergestellt und zur Berechnung einer 3D Modellschwere herangezogen. Nach Ab-