

Paper-ID: VGI_200023



Ausgleich mit einer Schraubenlinie

Helmuth Späth ¹

¹ *Fachbereich Mathematik, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Postfach 2503, D-26111 Oldenburg, Germany*

VGI – Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation **88** (3), S. 173–176

2000

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Spaeth_VGI_200023,  
Title = {Ausgleich mit einer Schraubenlinie},  
Author = {Späth, Helmuth},  
Journal = {VGI -- Österreichische Zeitschrift für Vermessung und  
Geoinformation},  
Pages = {173--176},  
Number = {3},  
Year = {2000},  
Volume = {88}  
}
```





Ausgleich mit einer Schraubenlinie

Helmuth Späth, Oldenburg

Zusammenfassung

Wir entwickeln einen Algorithmus zur Minimierung der (senkrechten) Abstandskvadratsumme von gemessenen Punkten im Raum zu einer Schraubenlinie in Standardposition. Ein spezielles Startwertverfahren erweist sich für diese Abstiegsverfahren als sehr sinnvoll. Numerische Beispiele werden angegeben.

Abstract

We develop an algorithm for minimizing the sum of (orthogonal) squared distances from measured points in space to a helix in standard position. Some special starting procedure is very useful for that descent method. Numerical examples are given.

1. Problemstellung

Misst man mit einem Koordinatenmessgerät, um einen Zylinder zu überprüfen, auf einer Schraubenlinie des Zylindermantels entlang Daten (x_i, y_i, z_i) ($i = 1, \dots, n$), so kann man daraus den Zylinderradius schätzen. Wenn wir der Einfachheit halber zunächst voraussetzen, dass die Zylinderachse die z-Achse ist und die Schraubenlinie im Punkt $(r, 0, 0)$ startet, so ist diese durch

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cos t \\ y(t) &= r \sin t \\ z(t) &= at, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

gegeben mit

$$r > 0, a > 0 \quad (2)$$

In diesem Fall wird man sinnvollerweise $z_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$) voraussetzen. Fällt man von einem Messpunkt (x_i, y_i, z_i) das kürzeste Lot auf die Schraubenlinie, so ergeben sich auf ihr Punkte $(r \cos t_i, r \sin t_i, at_i)$ mit den Unbekannten r und a und Parameterwerten t_1, \dots, t_n , für die, wenn man voraussetzt, dass von $(r, 0, 0)$ aus startend nach oben gemessen wird,

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \quad (3)$$

gelten muss. Sollen die Unbekannten r, a, t_1, \dots, t_n so geschätzt werden, dass die Summe der (orthogonalen) Abstandskvadratsumme minimal wird, so ist somit

$$S(r, a, t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n S_i(r, a, t_i) \rightarrow \min \quad (4)$$

mit

$$S_i(r, a, t_i) = (x_i - r \cos t_i)^2 + (y_i - r \sin t_i)^2 + (z_i - at_i)^2 \quad (5)$$

zu betrachten. S ist nichtnegativ, es gilt $\lim S = +\infty$. Die Parameter t_i treten nur im i -ten Summanden S_i auf. Nennt man die beiden ersten Teilsummen in (4) $U(r, t_1, \dots, t_n)$ und die dritte $V(a, t_1, \dots, t_n)$, so gilt

$$S(r, a, t_1, \dots, t_n) = U(r, t_1, \dots, t_n) + V(a, t_1, \dots, t_n), \quad (6)$$

was später von Bedeutung sein wird.

2. Ein Abstiegsverfahren

Die notwendigen Bedingungen für ein Minimum von S sind

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial r} = 0 = - \sum_{i=1}^n \cos t_i (x_i - r \cos t_i) - \sin t_i (y_i - r \sin t_i), \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 = - \sum_{i=1}^n a_i (z_i - at_i), \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial t_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial S_i}{\partial t_i} = 0 = r \sin t_i (x_i - r \cos t_i) - r \cos t_i (y_i - r \sin t_i) - a(z_i - at_i) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (9)$$

Dies kann man der Reihe nach in der Form

$$r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i \cos t_i + y_i \sin t_i), \quad (10)$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n t_i z_i}{\sum_{i=1}^n t_i^2}, \quad (11)$$

$$r(x_i \sin t_i - y_i \cos t_i) + a^2 t_i = az_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (12)$$

schreiben.

Gibt man Startwerte $r^{(0)}$ und $a^{(0)}$ für r und a vor (s. Abschnitt 4) und kann man das absolute Minimum von S_i bzgl. t_i finden (Abschnitt 3), so liegt folgendes Abstiegsverfahren nahe, das ein Minimum, nicht aber notwendigerweise das globale Minimum liefert:

Schritt 1: Setze $k = 0$; $r^{(0)}$ und $a^{(0)}$ seien gegeben.

Schritt 2: Berechne für $i = 1, \dots, n$ die Lotfusspunktparameter $t_i^{(k)}$ als solche Nullstellen von (12), die ein absolutes Minimum von $S_i(r^{(k)}, a^{(k)}, t_i)$ liefern. Dann gilt

$$S(r^{(k)}, a^{(k)}, t_1^{(k)}, \dots, t_n^{(k)}) \leq S(r^{(k)}, a^{(k)}, t_1, \dots, t_n) \quad (13)$$

Schritt 3: Berechne $r^{(k+1)}$ und $a^{(k+1)}$ gemäß (10) zu

$$r^{(k+1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i \cos t_i^{(k)} + y_i \sin t_i^{(k)}), \quad (14)$$

$$a^{(k+1)} = \sum_{i=1}^n t_i^{(k)} z_i / \sum_{i=1}^n (t_i^{(k)})^2. \quad (15)$$

Dann gilt, da S bei festen $t_1^{(k)}, \dots, t_n^{(k)}$ offenbar nur dieses eine Minimum hat

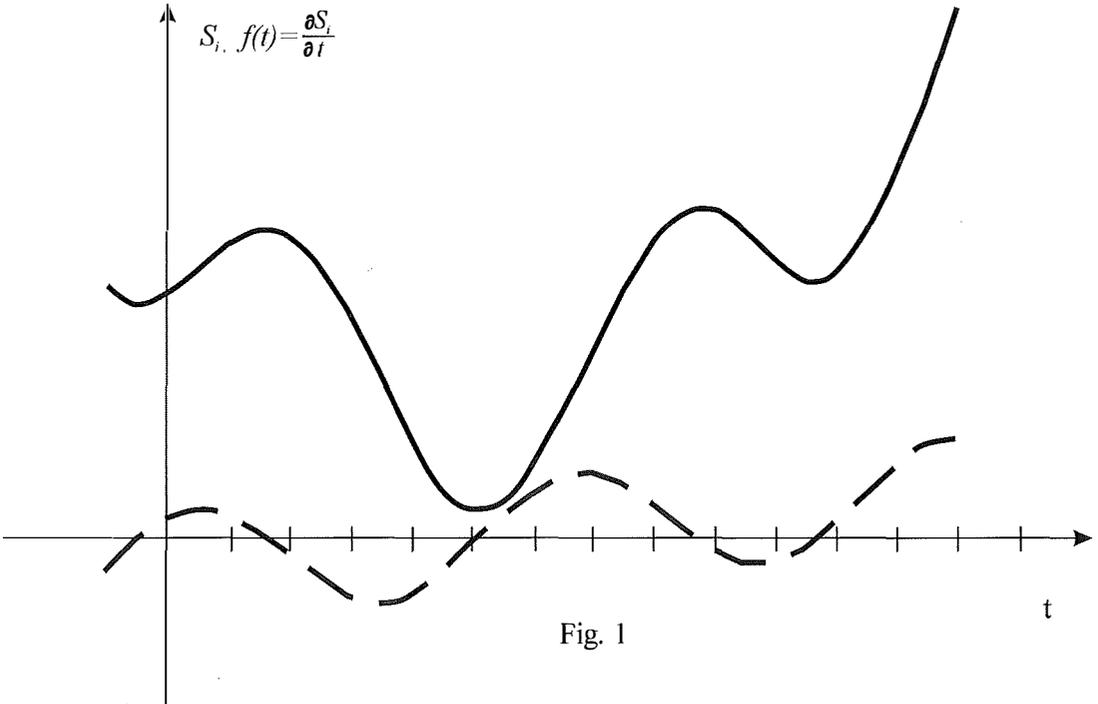
$$S(r^{(k+1)}, a^{(k+1)}, t_1^{(k)}, \dots, t_n^{(k)}) \leq S(r^{(k)}, a^{(k)}, t_1^{(k)}, \dots, t_n^{(k)}) \quad (16)$$

Die Eigenschaften (13) und (16) bedeuten, dass – vorausgesetzt für die $t_i^{(k)}$ gilt (3) und für r und a (2) – beim Übergang von k auf $k+1$ S nicht zunimmt: wir haben ein Abstiegsverfahren.

Schritt 4: Setze $k := k+1$ und gehe zu Schritt 2, falls k nicht zu groß geworden ist (Notbremse).

3. Das Nullstellenproblem

Unterdrücken wir in diesem Abschnitt den Index i , so ist nach (12) für gegebene Werte r, a, x, y, z ein Wert t zu bestimmen, für den



$$f(t) = r(x \sin t + y \cos t) + a^2 t - az = 0 \quad (17)$$

gilt und für den S_i minimal wird. Wie man an Fig. 1 sieht, wo die Funktionen S_i ausgezogen und $f(t) = \frac{\partial S_i}{\partial t}$ gestrichelt für die Werte $r = 2, a = 1, x = 2, y = -4, z = 5$ graphisch dargestellt sind, können mehrere Minima auftreten. Es gilt $\lim_{t \rightarrow \pm \infty} f(t) = \pm \infty$ und es gibt ein endliches Intervall $[-b, b]$, worin alle Minima und Maxima liegen. Ist nämlich $f(t) = 0$, so muss nach (17)

$$t = \frac{1}{a^2} [r(x \sin t + y \cos t) - az] \quad (18)$$

und somit

$$|t| = \frac{1}{a^2} |r(x \sin t + y \cos t) - az| \leq \frac{r}{a^2} (|x| + |y|) + \frac{|z|}{a} =: b \quad (19)$$

sein, d. h. die endlich vielen Minima liegen im Intervall $[-b, b]$. Für das Beispiel aus Fig. 1 ergibt sich aus (19) das Intervall $[-21, 21]$. Insbesondere für kleine Werte von a (klein gegenüber r und $|z|$) können diese Intervalle jedoch sehr groß werden.

Nun kann man das Intervall $[-b, b]$ aber immer so in (äquidistante) Teilintervalle der Länge h (z. B. $h = .1$) aufteilen, dass f an den Endpunkten entgegengesetztes Vorzeichen hat und dann z. B. mit dem Intervallhalbierungsverfahren (Subroutine BISECT aus [1]) oder einem DEKKER-BRENT-Verfahren (Subroutine DBRSIM aus [1])

die entsprechende Nullstelle berechnen und von allen Nullstellen diejenige mit dem kleinsten Wert für S_i herausuchen.

4. Startwerte

Fängt man mit beliebigen Werten für $r^{(0)}$ und $a^{(0)}$ an, so können die $t_i^{(k)}$ ($i = 1, \dots, n$) die Bedingung (3) nicht erfüllen, es kann in Folge sogar $r^{(k)}$ negativ werden. Um daher geeignete Startwerte $r^{(0)}$ und $a^{(0)}$ zu erhalten, betrachten wir (6). Lösen wir die Aufgabe

$$U(r, u_1, \dots, u_n) \rightarrow \min, \quad (20)$$

so kann für diese der Parameter gemäß

$$V(a) = V(a, u_1, \dots, u_n) \rightarrow \min \quad (21)$$

bestimmt werden. Die so erhaltenen Werte für r , a , u_1, \dots, u_n lösen zwar nicht unser Problem (5), kommen aber – wie sich an Beispielen herausstellen wird – jener Lösung sehr gut nahe. Geometrisch bedeutet (20), dass die gegebenen Punkte (x_i, y_i, z_i) auf Punkte (x_i, y_i) in der (x, y) -Ebene projiziert werden, die dann mit einem Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung ausgeglichen werden; aus (21) entsteht a durch Mittelwertbildung.

Nach (20) muß nämlich

$$\frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial r} = 0 = \sum_{i=1}^n -\cos u_i (x_i - r \cos u_i) - \sin u_i (y_i - r \sin u_i),$$

gelten, woraus

$$r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i \cos u_i + y_i \sin u_i), \quad (22)$$

mit Unbekannten u_1, \dots, u_n folgt. Diese erhält man über die Bedingung

$$\frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial u_i} = 0 = r (x_i - \sin u_i - y_i \cos u_i)$$

zu

$$\tan u_i = y_i / x_i. \quad (23)$$

Beim Lösen von (23) muss man wie beim allgemeinen Kreis [2] aufpassen, da $\tan u_i = \tan(u_i + \pi)$ gilt und $x_i = 0$ sein kann. Letztlich muss u_i so gewählt werden, dass das kürzere der beiden Lote von einem Punkt nicht auf dem Kreis auf diesen bestimmt wird. Auch ist die Bedingung (3) für u_1, \dots, u_n zu garantieren, was man erreicht, indem man zu u_i eventuell 2π addiert, was an der Lösung nichts ändert. Hat man nun die Werte u_1, \dots, u_n dementsprechend bestimmt, so setzt man diese in (22) ein und erhält einen Startwert $r^{(0)} = r$. Die Bestimmung des Minimums von (21) ist einfach, da

$$\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial a} = 0 = - \sum_{i=1}^n u_i (z_i - a u_i)$$

impliziert

$$a = \sum_{i=1}^n u_i z_i / \sum_{i=1}^n u_i^2. \quad (24)$$

und somit $a^{(0)} = a$ wieder durch Einsetzen der erhaltenen u_1, \dots, u_n geliefert wird.

5. Beispiele

Testdaten wurden auf folgende Art und Weise erzeugt. Für $n = 17$, $r = 5$, $a = 2$ und $t_i = i/2$ ($i = 1, \dots, n$) wurden die Tripel $(x_i = r \cos t_i, y_i = r \sin t_i, z_i = a)$ berechnet. Dann wurden die x_i und y_i auf ganzzahlige Werte gerundet und die z_i um ± 1 verändert. Das ergab die Tabelle

x_i	4	3	0	-2	-4	-5	-5	-3	-1	1	4	5	5	4	2	-1	-3
y_i	2	4	5	5	3	1	-2	-4	-5	-4	-1	1	3	5	5	4	
z_i	2	2	3	5	5	7	6	8	9	11	11	13	13	14	14	16	18

Das Startwertverfahren lieferte $r^{(0)} = 5.111$, $a^{(0)} = 2.032$ und auf zwei Dezimalstellen gerundet

u_i	.46	.93	1.57	1.95	2.50	2.94	3.52	4.07	4.52	4.91	5.50	6.09	6.48	6.93	7.47	8.05	8.50
-------	-----	-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Nach nur 3 Iterationen (mit $h = .1$) ergab sich auf 4 Dezimalen genau $r = 5.105$, $a = 2.033$,

t_i	.54	.94	1.56	2.02	2.49	3.01	3.45	4.05	4.50	4.98	5.49	6.13	6.47	6.92	7.40	8.03	8.55
-------	-----	-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

und der Zielfunktionswert $S = 8.1818$.

Bei nochmaliger Abänderung der Daten in

x_i	6	3	1	-2	-4	-5	-4	-3	-2	2	3	6	5	3	2	-1	-2
y_i	3	4	5	4	3	1	-3	-4	-4	-6	-4	-3	1	3	6	5	5
z_i	0	2	3	2	5	4	8	7	9	10	9	12	13	14	16	16	16

ergab das Startwertverfahren $r^{(0)} = 5.296$, $a^{(0)} = 1.963$, und nach wiederum nur 3 Iterationen erzielte der Algorithmus $r = 6.287$, $a = 1.966$ mit $S = 21.5023$. Das Startwertverfahren und der entwickelte Algorithmus funktionieren also sehr gut, wenn die Daten die Voraussetzung (3) erfüllen.

6. Ausblick

Soll der Anfangspunkt der Schraubenlinie von $(r, 0, 0)$ auf $(b + r, c, d)$ verlegt und soll sie in der (x, z) -Ebene um den Winkel β und in der (y, z) -Ebene um den Winkel γ gedreht werden, so wäre das Modell

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = A(\beta)^{-1} B(\gamma)^{-1} \begin{pmatrix} b + r \cos t \\ c + r \sin t \\ d + at \end{pmatrix}, t \geq 0, \quad (25)$$

wobei $A(\beta)$ und $B(\gamma)$ die in [3] beschriebenen Rotationsmatrizen sind, an die Daten anzupassen. Unbekannte sind dann nicht nur r, a, t_1, \dots, t_n sondern zusätzlich b, c, d, β, γ . Im Prinzip kann man ähnlich wie beim Zylinder vorgehen [3]. Die Bestimmung ähnlich guter Startwerte ist allerdings nicht einfach.

Literatur

- [1] Späth, H.: Numerik – Eine Einführung für Mathematiker und Informatiker, Vieweg 1994.
- [2] Späth, H.: Least-Squares Fitting by Circles, Computing 57, 179–185 (1996).
- [3] Späth, H.: Ein Verfahren zur Bestimmung des Least Squares Zylinders, wird in AVN veröffentlicht.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Helmuth Späth, Fachbereich Mathematik, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Postfach 2503, D-26111 Oldenburg, Germany
e-mail: spaeth@mathematik.uni-oldenburg.de

Dissertationen und Diplomarbeiten

Dipl.-Ing. David Heitzinger wurde am 21. Januar 2000 an der Technisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der TU Wien mit der Dissertation „Wissensbasierte 3D-Oberflächenrekonstruktion“ zum Dr.tech. promoviert. Prüfer waren: Univ.Prof. Dr. Karl Kraus, Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung der TU Wien, und Univ.Prof. Dr. Helmut Pottmann, Institut für Geometrie der TU Wien.

Wissensbasierte 3D-Oberflächenrekonstruktion

David Heitzinger

Dissertation: Technisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der TU Wien, 2000. Begutachter: Univ.Prof. Dr. Karl Kraus und Univ.Prof. Dr. Helmut Pottmann.

Die Rekonstruktion von komplexen Flächen des R^3 ist in der Photogrammetrie und dem Vermessungswesen noch ein offenes Problem. Andere Disziplinen, wie CAD, Computerwissenschaften, Medizin, Geologie, etc., haben Verfahren für diese Aufgabe entwickelt, maßgeschneidert für ihre Anwendungen und Bedingungen. Aber zur Rekonstruktion von komplexen, topographischen Flächen (Felsstürze, Steinbrüche, Mauern, Häuser) gibt es noch kaum zufriedenstellende Lösungen. Relevante Forschung in der Photogrammetrie konzentriert sich vor allem auf die automatische Rekonstruktion von künstlichen Gebäuden, wo bereits gute Erfolge erzielt wurden.

Problemstellung:

Gegeben sei eine Menge von Punkten des R^3 und eine Menge von Linien zu diesen Punkten. Die Punkte wurden an der Oberfläche eines beliebigen Objekts gemessen, mit berührenden, optischen, akustischen, magnetischen oder kapazitiven Verfahren. Aus diesen Daten ist die ursprüngliche Oberfläche so gut wie möglich zu rekonstruieren.

Gesucht sei eine Triangulation der Daten. Diese Triangulation dient als Grundlage zur eigentlichen Flächenrepräsentation: Abbildung der topologischen Dreiecke auf geometrische Dreiecke oder auf allgemeinere dreiecksförmige Flächenstücke (patches). Zur Triangu-

lation von Punkten des R^3 gibt es noch keine Standardlösung, wie es etwa die Delaunay-Triangulation im R^2 ist.

Lösungsansatz:

Es wird versucht, die gesamte, vorhandene Information über das Objekt und dessen Vermessung zu verwenden. Diese Information besteht aus expliziter Information, wie z.B. die gemessenen Punktkoordinaten. Zusätzlich gibt es Information über die Fläche, etwa über deren Form und Topologie. Teil dieser Information können durchaus einschränkende Bedingungen sein, etwa das Verbot von Selbstschnitten der Fläche oder Einschränkungen, resultierend aus den Eigenschaften einer gültigen Triangulation. Wichtige Schlüsse können aus der Art der Datenerfassung (photogrammetrische Auswertung, Höhenlinienmessung, Nahbereichs-Laser oder flugzeuggestützte Laser) gezogen werden. Jede vorhandene Information, sicher oder unsicher, eindeutig oder widersprüchlich, bedingt oder unbedingt, soll verwendet werden.

Als erster Schritt der Triangulation wird eine Tetraedervermaschung berechnet. Der Grund hierfür ist vor allem die Einschränkung der Vielfalt der möglichen Dreiecke. Von den Dreiecken, die in der Tetraedervermaschung enthalten sind, werden nun jene extrahiert, die zur Triangulation der Oberfläche gehören. Die Dreiecke werden schrittweise in kleinen Teilmengen, nämlich alle Dreiecke, benachbart zu einem bereits extrahierten Dreieck, bewertet. Diese Bewertung wendet alle vorhandene Information an. Das Ergebnis ist ein Maß (im weiteren als Evidenz bezeichnet), anhand dessen über die Flächenzugehörigkeit entschieden wird. Welche Informationen vorliegen können und wie daraus Schlüsse abgeleitet werden sollen, ist im verwendeten Wissen festgelegt. Dieses Wissen ist in Regeln formuliert, die nacheinander mit den aktuellen Daten ausgewertet werden. Zur Beurteilung werden probabilistische Methoden verwendet. Die vorhandenen Regeln stellen auch sicher, daß immer eine gültige Triangulation extrahiert wird.

Regeln als Form der Wissensrepräsentation:

Die Tetraedervermaschung enthält sowohl alle Dreiecke, die zur Fläche gehören, als auch jene, die nicht