Paper-ID: VGI_199829

Ausgleich von parallelen Geraden

Herwig Schiffner [1]

[1] *Vermessungsamt Gänserndorf, Eichamtsstraße 1-3, A-2230 Gänserndorf*

VGI – Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation **86** (4), S. 205–208

1998

BibTEX:

```
@ARTICLE{Schiffner_VGI_199829,
Title = {Ausgleich von parallelen Geraden},
Author = {Schiffner, Herwig},
Journal = {VGI -- {\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessung und
   Geoinformation},
Pages = {205--208},
Number = {4},
Year = {1998},
Volume = {86}
}
```

zusehen wären, damit eine ausreichende Überlappung sichergestellt werden kann.

Literatur

[1] *Pfister, H.:* Neu: Die dreidimensionale Schweiz. Relief unter Verwendung der Schweizer Landeskarte. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik 2, 66–69, 1997.

Adressen der Autoren:

Dipl.-Ing. Bruno Wöhrer: Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung, Technische Universität Wien, Gußhausstraße 25–29, A-1040 Wien.

Dipl.-Ing. Dr. Markus Bohrer: Fa. Incision Lasertec, Arsenal Objekt 207, Franz-Grill-Straße 1, A-1030 Wien.

Ausgleich von parallelen Geraden

Herwig Schiffner, Gänserndorf

Zusammenfassung

Bei der Umbildung bzw. Digitalisierung der Katastralmappe ergibt sich neben der herkömmlichen Helmert Transformation und div. Einrechnungen von Plänen auch fallweise die Notwendigkeit, ein ebenes Linienbündel – parallele Geraden, deren gegenseitige Abstände vorgeschrieben sind – rechnerisch zu erfassen. In der Natur werden vom gegenständlichen Linienbündel einzelne, noch vorhandene, Punkte (Paßpunkte) aufgefunden und koordinativ im Landessystem eingemessen. Laut den vorhandenen numerischen Unterlagen sollen aber diese Punkte auf parallelen Geraden, mit gegenseitig gegebenem Abstand, liegen. Es ist demnach die gegenständliche Figur durch Verschieben und Verdrehen so in die gemessene Punktwolke einzupassen, daß die Quadratsumme der Restfehler ein Minimum wird. Als Restfehler wird der Normalabstand des aufgefundenen Punktes zu der entsprechenden „ausgeglichenen" Geraden bezeichnet. In weiterer Folge wird eine numerische Lösungsmethode vorgestellt. Dieses Erfordernis tritt hauptsächlich bei der koordinativen Erfassung von orthogonalen Lageplänen der Flurbereinigung auf.

Abstract

During the remodeling, i. e., digitizing, of the cadastral map it is sometimes necessary, besides the usual Helmert transformation and inclusions of maps, to arithmetically record a straight bundle of parallel straight lines with a prescribed mutual distance. Single available points of the bundle of lines have to be found in reality and their coordinates have to be surveyed and included in the national geodetic system. According to the numerical guidelines, these points have to lie on parallel straight lines with a prescribed mutual distance. Therefore, the figure has to be fit into the measured points by shift and rotation such that the sum of squares of the remaining errors becomes a minimum. The remaining error is the normal distance of the point in relation to the corresponding adjusted straight line. Further on a numerical solution is presented. Such necessity mainly occurs with the recording of coordinates of orthogonal plane maps at the consolidation of farmland.

1. Problemstellung:

Gegeben: *Die Abstände:* $d_0 = 0, d_1, \ldots, d_i, \ldots, d_n$, *paralleler Gerade*
Gemessen: *Die Koordinaten der Punkte:*

$P_0^1, P_0^2, P_0^3, \ldots, P_0^j, \ldots, P_0^{n_0}$ Punkte der Geraden g_0 zugeordnet $\perp\overline{g_0g_0} = d_0 = 0$

$P_1^1, P_1^2, P_1^3, \ldots, P_1^j, \ldots, P_1^{n_1}$ Punkte der Geraden g_1 zugeordnet $\perp\overline{g_0g_1} = d_1$

$P_2^1, P_2^2, P_2^3, \ldots, P_2^j, \ldots, P_2^{n_2}$ Punkte der Geraden g_2 zugeordnet $\perp\overline{g_0g_2} = d_2$

...

$P_i^1, P_i^2, P_i^3, \ldots, P_i^j, \ldots, P_i^{n_i}$ Punkte der Geraden g_i zugeordnet $\perp\overline{g_0g_i} = d_i = 0$

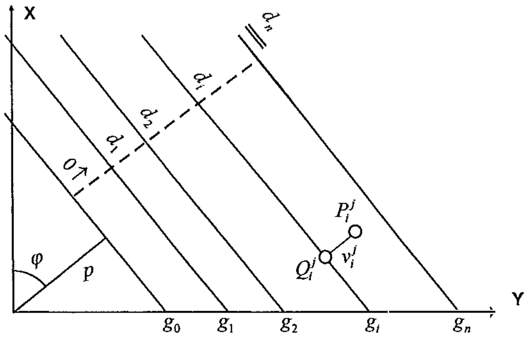
...

$P_r^1, P_r^2, P_r^3, \ldots, P_r^j, \ldots, P_r^{n_r}$ Punkte der Geraden g_r zugeordnet $\perp\overline{g_0g_r} = d_r = 0$

Gesucht: *Das „ausgeglichene" Linienbündel (bestimmt durch p und φ – Bezeichnung nach der Hesseschen Normalform) und die „ausgeglichenen" Koordinaten Q_i^j der gemessenen Punkte P_i^j, und zwar so, daß die Quadratsumme aller Normalabstände (Verbesserungen) der gemessenen Punkte, die den jeweiligen Geraden zugeordnet sind, ein*

Minimum ist und die Punkte Q_i^j auf den entsprechenden ermittelten parallelen Geraden zu liegen kommen. (Die Strecke $P_i^j\,Q_i^j$ entspricht der „Verbesserung" v_i^j)

Anmerkung: Index der Geraden g und Abstände d: 0,1,2,...,i,...r (unten)
Index der Punkte und Verbesserungen: 1, 2, 3,...,j,...n (oben)



2. Grundlage

Hessesche Normalform einer Geraden:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0 \qquad (1)$$

Normalabstand eines Punktes $P(x, y)$

$$d = x\cos\varphi + y\sin\varphi - p \qquad (2)$$

d ergibt sich positiv, wenn der Punkt P und der Ursprung auf verschiedenen Seiten der Geraden liegen, sonst negativ.

3. Ableitung

Aus der Skizze und aus (2) ergibt sich die Verbesserung in P_i^j

$$v_i^j = x_i^j \cos\varphi + y_i^j \sin\varphi - p - d_i. \qquad (3)$$

Quadriert summiert und über alle v ergibt:

$$[vv] = [xx]\cos^2\varphi + [yy]\sin^2\varphi + np^2 + [dd] + [xy]\sin 2\varphi - 2[x]p\cos\varphi - 2[xd]\cos\varphi - 2[y]p\sin\varphi - 2[yd]\sin\varphi + 2p[d] \qquad (4)$$

Setzt man nach der Minimumbedingung

$$\frac{\partial\,[vv]}{\partial p} = 0 \quad \text{ein,}$$

so erhält man

$$p = \frac{[x]}{n}\cos\varphi + \frac{[y]}{n}\sin\varphi - \frac{[d]}{n} \qquad (5)$$

n ist die Summe aller gemessener Punkte.

Infolge der zu erwartenden großen Zahlen und zur Vereinfachung ist es angebracht, ein Schwerpunkts-Koordinatensystem η, ξ einzuführen.

$$y_s = \frac{[y]}{n} \text{ und } x_s = \frac{[x]}{n} \qquad (6)$$

$\eta_i = y_i - y_s$ und $\xi_i = x_i - x_s$

$y \to \eta \quad x \to \xi \quad [\eta]=0 \quad [\xi]=0 \quad [xx] \to [\xi\xi] \quad [xy] \to [\xi\eta] \quad [yy] \to [\eta\eta]$

In (4) und (5) eingesetzt ergibt:

$$p = x_s \cos\varphi + y_s \sin\varphi - \frac{[d]}{n} \qquad (7)$$

$$[vv] = [\xi\xi]\cos^2\varphi + [\eta\eta]\sin^2\varphi + np^2 + [dd] + [\xi\eta]\sin 2\varphi - 2[\xi d]\cos\varphi - 2[\eta d]\sin\varphi + 2p[d] \qquad (8)$$

Setzt man weiters

$$\frac{\partial\,[vv]}{\partial\varphi} = 0 \text{ ein, so erhält man}$$

$$A_s \sin 2\varphi + B_s \cos 2\varphi + C_s \sin\varphi + D_s \cos\varphi = 0 \qquad (9)$$

wobei:

$$\begin{aligned} A_s &= [\eta\eta] - [\xi\xi] \\ B_s &= 2[\eta\xi] \\ C_s &= 2[\xi d] \\ D_s &= -2[\eta d] \end{aligned} \qquad (10)$$

ist.

Daraus läßt sich φ bestimmen!

Zweckmäßig ist es, die ermittelte transzendente Gleichung durch das Newtonsche Näherungsverfahren in Verbindung mit der Regula falsi zu lösen.

Anmerkung: Der genaue Wurzelwert φ befindet sich meist in unmittelbarer Nähe eines Wendepunktes. Folglich versagt das alleinige Verfahren nach Newton!

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{f(\varphi_1)}{f'(\varphi_1)}$$

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) f(\varphi_1)}{f(\varphi_1) - f(\varphi_2)}$$

$$\varphi_4 = \varphi_2 + \frac{(\varphi_3 - \varphi_2) f(\varphi_2)}{f(\varphi_2) - f(\varphi_3)}$$

φ_1 = Näherungswert (Bestimmung graphisch oder quadrantenrichtig aus (12))
φ_2 = besserer Näherungswert
φ_3 = „noch" besserer Näherungswert
φ_4 = ist meist schon eine brauchbare Lösung.

Durch weitere Iterationen läßt sich eine beliebig genaue Lösung erzielen.

$$f(\varphi_k) = A_s \sin 2\varphi_k + B_s \cos 2\varphi_k + C_s \sin\varphi_k + D_s \cos\varphi_k = W_k$$

$$f'(\varphi_1) = 2A_s \cos 2\varphi_1 - 2B_s \sin 2\varphi_1 + C_s \cos\varphi_1 - D_s \sin\varphi_1$$

$\to \varphi \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$ *Anzahl der Iterationen*
$W_k \to 0,\ \varphi_k \to \varphi$

$$p = x_s \cos\varphi + y_s \sin\varphi - \frac{[d]}{n}$$

„Verbesserungen“:

$v_i^j = x_i^j \cos\varphi + y_i^j \sin\varphi - p - d_i$

„Ausgeglichene – verbesserte“ Koordinaten der Punkte Q:

$$\begin{aligned} Y_i^j &= - v_i^j \sin\varphi + y_i^j \\ X_i^j &= - v_i^j \cos\varphi + x_i^j \end{aligned} \qquad (11)$$

4. Vereinfachung auf eine Gerade

Beschränkt sich der Ausgleich auf nur eine Gerade, so erhält man aus (10) wegen $d_i = 0$: $C_s = 0$ *und* $D_s = 0$ in (9) eingesetzt: $A_s \sin 2\varphi + B_s \cos 2\varphi = 0$ und somit

$$\tan 2\varphi = \frac{-B_s}{A_s} = \frac{-2[\xi\eta]}{[\eta\eta]-[\xi\xi]} = 2\,\frac{-[xy] + \frac{[x][y]}{n}}{[yy]-[xx] + \frac{[x][x]}{n} - \frac{[y][y]}{n}} \qquad (12)$$

$$p = x_s \cos\varphi + y_s \sin\varphi = \frac{[x]}{n}\cos\varphi + \frac{[y]}{n}\sin\varphi \qquad (13)$$

den Geradenausgleich „in der Hesseschen Normalform“.

5. Ein numerisches Beispiel

Gegeben: Abstände der Geraden, Gemessene Koordinaten

Abstand	Gerade	Punktbezeichnung	y_i	x_i
0,00	g_0	P_0^1	6,50	10,50
		P_0^2	5,50	8,00
		P_0^3	4,00	4,50
		P_0^4	2,50	1,50
1,20	g_1	P_1^1	7,50	9,00
		P_1^2	3,50	1,50
3,60	g_2	P_2^1	10,00	9,50
		P_2^2	6,50	1,00
		P_2^3	8,50	6,00

Gesucht: φ, p und die „ausgeglichenen“ Koordinaten Q.

Der Näherungswert für φ_1 wird mit Hilfe der Punkte P_0^1 und P_0^2 bestimmt; wendet man die Formel (12) an, so erhält man $\varphi_1 = 124{,}22^g$ quadrantenrichtig.

Es ergeben sich folgende Zwischenergebnisse:

Anzahl: $n = 9$

Schwerpunkt: $y_s = 6{,}0556$

$x_s = 5{,}7222$

$A_s = -64{,}833\ 3333$

$B_s = \ 94{,}777\ 7778$

$C_s = -\ 7{,}066\ 6667$

$D_s = -46{,}533\ 3333$

Die Lösung der transzendenten Gleichung ergibt folgende Werte für:

φ	[vv]	[v]
127,31 13 52	**0,2325**	**0**
17,57 23 24	149,1097	0
242,50 04 80	179,4449	0
336,22 84 57	88,9325	0

Aus der Bedingung $[vv] = Min$ kann nur der Wert für $\varphi = 127{,}31\ 13\ 52$ als der „gesuchte“ angesehen werden. Daraus ergibt sich p = 1,6599 und die „ausgeglichenen“ Koordinaten:

Punktbezeichnung	Y_i	X_i	v_i
Q_0^1	6,6060	10,4515	–0,1166
Q_0^2	5,4873	8,0058	0,0140
Q_0^3	3,9038	4,5440	0,1058
Q_0^4	2,5094	1,4957	–0,0104
Q_1^1	7,3029	9,0902	0,2168
Q_1^2	3,7737	1,3748	–0,3010
Q_2^1	10,1071	9,4510	–0,1178
Q_2^2	6,2862	1,0978	0,2351
Q_2^3	8,5236	5,9892	–0,0260

Durch die minimale Verschiebung v_i^j der gemessenen Punkte P_i^j wurde das vorgegebene Kriterium, daß die ausgeglichenen Punkte Q_i^j auf parallelen Geraden mit dem gegebenen Abstand d_i liegen, erreicht.

Weiters könnten durch Einführung eines variablen Maßstabsfakors k auch die Abstände $d_0, d_1, d_2, \dots, d_i, \dots, d_n$ „verbessert“ werden.

In diesem Beispiel ergäbe sich der optimale Maßstabsfaktor, berechnet mit der EXCEL-Funktion Solver: k=1,010 3184. Die Verbesserungsquadratssumme vermindert sich auf $[vv] = 0{,}2301$ und auch $\varphi = 127{,}28\ 03\ 43$ verändert sich ein wenig. Man erhält:

Abstand	Gerade	Punktbezeichnung	y_i	x_i	v_i
0,0000	g_0	$Q_0^{1'}$	6,5903	10,4588	-0,0992
		$Q_0^{2'}$	5,4727	8,0125	0,0300
		$Q_0^{3'}$	3,8909	4,5498	0,1200
		$Q_0^{4'}$	2,4980	1,5009	0,0022
1,2124	g_1'	$Q_1^{1'}$	7,2987	9,0919	0,2213
		$Q_2^{2'}$	3,7735	1,3751	-0,3006
3,6372	g_2'	$Q_2^{1'}$	10,1249	9,4429	-0,1373
		$Q_2^{2'}$	6,3080	1,0877	0,2111
		$Q_2^{3'}$	8,5431	5,9803	-0,0473

6. Zusammenfassung und Ausblick

Bei der Umbildung, Erneuerung bzw. Digitalisierung der österreichischen Katastralmappe ist es notwendig die Grenzen aller Grundstücke möglichst genau, aufgrund der vorhandenen Unterlagen, numerisch zu erfassen. Die Übertragung der lokalen Teilungspläne in das Landessystem erfolgt mit Hilfe der Koordinaten gemessener Identpunkte und einer überbestimmten Helmert- oder Affintransformation, also mittels eines strengen Ausgleiches. Andere Ausgleichsverfaheren werden kaum angewendet.

Mit dem hier entwickelten Verfahren ist es nun möglich, Grundstücke, deren Grenzen zueinander parallel sind, optimal numerisch zu erfassen. Diese Notwendigkeit tritt hauptsächlich bei der Bearbeitung von Lageplänen der Kommassierungen, die in der Zeit von ca. 1880 bis 1930 angelegt wurden, auf. Wurde damals in einer Katastralgemeinde die Flurbereinigung eingeleitet, so lagen als Ergebnis, abgesehen von den Lageplänen und administrativen Unterlagen, nur die Polygon- und Umrißpunkte koordinativ vor; alle übrigen Daten betreffend der Lage von Grundstücken, waren „Streckenangaben", also Frontmaße, Parallelabstände sowie orthogonale Aufnahme- und Absteckdaten. Die geometrischen Figuren der neuen Grundstücke, also der Flurstücke und Feldwege, sind meist Parallelogramme. Die Normalbstände der Grundstücksgrenzen sind entweder angegeben oder sie lassen sich leicht rekonstruieren. Um nun diese „Streckenangaben" einarbeiten zu können eignet sich dieser Ausgleich. Es ist nun möglich, die Abfindungsrichtungen und die Lage der Grundstücksgrenzen möglichst genau, mit Hilfe einer vorangegangenen Identpunktmessung unter Zuhilfenahme aller Unterlagen („Streckenangaben") numerisch festzulegen. Selbstverständlich muß immer abgewogen werden, ob die ermittelten Ergebnisse katastertechnisch brauchbar sind und ob die Toleranzgrenzen dabei nicht überschritten werden! Als Ergebnis liegt dann der numerisch eingepaßte Lageplan so vor, daß sowohl die gemessenen Koordinaten der Identpunkte, als auch alle „Streckenangaben" zueinander in Einklang stehen und die vorgegebenen Parallelitäten erhalten bleiben.

Ein etwaiger Maßstabsfaktor der Abstände ist meistens schon enthalten oder muß vorher abgestimmt werden. Beispielsweise kann ein Akker mit einer vorgegebenen Breite von 30 m auf 29,85 m geändert werden, hingegen muß aber die Breite eines parallel führenden Weges von 6 m streng eingehalten werden etc. Folglich wurde auf die Bestimmung des Maßstabsfaktors nur am Rande eingegangen und ist in der Praxis ohne Bedeutung.

Auch können lange gerade Linien, die sich über mehrere Mappenblätter erstrecken, rechnerisch gut erfaßt werden.

Wertvolle Operatsteile der Kommassierung sind in den Kriegs- und besonders in den Nachkriegsjahren in Verlust geraten. Daher fehlen vereinzelt numerische Unterlagen, wie Koordinatenverzeichnisse, Aufnahmedaten, Absteckskizzen etc. Auch dieser Ausfall kann, wenn zumindest noch die Lagepläne mit Maßzahlen vorhanden sind, durch einen geringen Mehraufwand bei der Identpunktmessung und Anwendung des gegenständlichen Ausgleiches, aufgehoben und die fehlenden Daten rekonstruiert werden.

Vielleicht kann auch durch diesen Beitrag erreicht werden, daß im österreichischen Kataster weitere „Katasterausgleichsverfahren" angewendet bzw. neue entwickelt werden.

Dank

Der Autor möchte sich bei Univ.-Prof. Dr. Karl Kraus und Dr. Helmut Kager, Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung der TU-Wien, für die anregende Diskussion beim Entstehen dieses Beitrages bedanken.

Anschrift des Autors:

Hofrat Dipl.-Ing. Herwig Schiffner, Leiter des Vermessungsamtes Gänserndorf, Eichamtsstraße 1–3, A-2230 Gänserndorf.