Paper-ID: VGI_199807

Interpolation nach kleinsten Quadraten versus Krige-Schätzer

Karl Kraus [1]

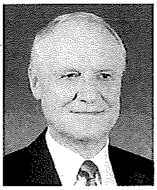
[1] *Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung der TU Wien, Gußhausstr. 27-29, A-1040 Wien*

VGI – Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation **86** (1), S. 45–48

1998

BibTEX:

```
@ARTICLE{Kraus_VGI_199807,
Title = {Interpolation nach kleinsten Quadraten versus Krige-Sch{\"a}tzer},
Author = {Kraus, Karl},
Journal = {VGI -- {\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessung und
   Geoinformation},
Pages = {45--48},
Number = {1},
Year = {1998},
Volume = {86}
}
```



Interpolation nach kleinsten Quadraten versus Krige-Schätzer

o.Univ.-Prof. Dr. Gerhard Brandstätter zu seinem 65. Geburtstag[1]

Karl Kraus, Wien

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird nachgewiesen, daß die Interpolation nach kleinsten Quadraten, auch als lineare Prädiktion bekannt, mit dem sogenannten Krige-Schätzer identisch ist. Die Interpolation nach kleinsten Quadraten wird vor allem in der Erdmessung sowie in der Photogrammetrie und Topographie benutzt. Der Krige-Schätzer hingegen ist ein Standardverfahren in der Geostatistik.

Abstract

This article proves that "Least Squares Interpolation", also known as "Linear Prediction", is identical with "Kriging", an estimation procedure named after D.L. Krige. While "Least Squares Interpolation" is predominantly used in geodesy as well as photogrammetry and topography, "Kriging" is a well-established method in the field of geostatistics.

1. Vorbemerkung

Die Interpolation nach kleinsten Quadraten wird seit Anfang der 60er Jahre in der Erdmessung eingesetzt [13] und seit Anfang der 70er Jahre in der Photogrammetrie [7] und Topographie [6]. H. Wolf hat die Kollokation, zu der die Interpolation nach kleinsten Quadraten als Sonderfall gehört, in dieser Zeitschrift prägnant zusammengestellt [15].

Seit Ende der 60er Jahre gibt es in der Geostatistik Veröffentlichungen über den sogenannten Krige-Schätzer, benannt nach dem südafrikanischen Geostatistiker D.G. Krige [12]. Beide Methoden sind unabhängig voneinander entstanden und wurden unabhängig voneinander weiterentwickelt; auch die Anwendungsgebiete haben sich bisher – von einigen Ausnahmen abgesehen – nicht überschnitten. Eine solche Ausnahme ist das Modellieren eines Geländemodelles. Es steht daher die Frage an, inwieweit diese beiden Methoden zusammenhängen.

2. Die Interpolation nach kleinsten Quadraten

Die Grundgleichung der Interpolation nach kleinsten Quadraten, die aus der Forderung nach minimaler Schätzvarianz gefunden wird (z. B. [7]) lautet:

$$\hat{z} = (C(PP_1),\ C(PP_2) \dots C(PP_n)) \begin{pmatrix} V_{zz} & C(P_1P_2) \dots (P_1P_n) \\ & V_{zz} \dots (P_2P_n) \\ & \vdots \\ symm. & V_{zz} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

In Matrizenschreibweise:

$$\hat{z} = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{z} \qquad (2)$$

Dabei bedeuten:

- z_i Zentrierte Stützwerte der n Stützpunkte P_i; die ursprünglichen Stützwerte Z_i werden vor der Interpolation nach kleinsten Quadraten um den Trend, ein Polynom niedrigen Grades, reduziert.
- V_{zz} Aus den zentrierten Stützwerten z_i berechnete Varianz.
- $C(P_iP_k)$ Kovarianz zwischen den beiden Stützwerten z_i und z_k.
- $C(PP_i)$ Kovarianz zwischen dem Interpolationswert $\hat{z}$ an der Stelle P und dem Stützwert z_i an der Stelle P_i.

Die erwähnten Kovarianzen $C(P_iP_k)$ und $C(PP_i)$ sind aus ein und derselben Kovarianzfunktion zu entnehmen, die in der Regel aus den zentrierten Stützwerten z_i gewonnen wird (z.B. [10]). Als Kovarianzfunktion hat sich in den

[1] Am 5. März 1998 fand ein Festkolloquium zu Ehren Prof. Dr. Brandstätters an der TU Graz statt; der Autor dieses Beitrages hat in seinem Festvortrag auch das Thema ‚Interpolation nach kleinsten Quadraten versus Krige-Schätzer' behandelt.

photogrammetrischen und topographischen Anwendungen die Gauß'sche Glockenkurve bewährt:

$$C(P_iP_k) = C(0) \cdot e^{-\left(\frac{\overline{P_iP_k}}{c}\right)^2} \quad (3)$$

$C(0)$ Scheitel der Kovarianzfunktion, der – bei einer mit der Interpolation einhergehenden Filterung – etwas unterhalb der Varianz V_{zz} liegt.

c Parameter, der die Steilheit der Kovarianzfunktion festlegt.

$\overline{P_iP_k}$ Horizontale Entfernung zwischen den Punkten P_i und P_k.

Die Grundgleichung der Interpolation nach kleinsten Quadraten kann auch mit sogenannten Gewichtsfunktionen formuliert werden (z.B. [14], [10]). Gewichtsfunktionen geben – bei einem linearen Zusammenhang zwischen dem interpolierten Wert $\hat{z}$ und den n Stützwerten z_i – an, welche Beiträge die einzelnen Stützwerte z_i zur interpolierten Funktion liefern. Ein konkreter Interpolationswert $\hat{z}$ ergibt sich demnach aus den Stützwerten z_i und den Gewichtsfunktionswerten g_i wie folgt:

$$\hat{z} = g_1z_1 + g_2z_2 + \ldots + g_nz_n = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{z} \quad (4)$$

Bei der Interpolation nach kleinsten Quadraten, für die auch die Bezeichnung ‚lineare Prädiktion' verwendet wird, bekommt man die Gewichtsfunktionswerte g_i aus folgender Beziehung (man vergleiche die Gleichungen (2) und (4)):

$$\boldsymbol{g}^T = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{C}^{-1} \quad (5)$$

Diese Gleichung kann wie folgt umgeformt werden:

Transposition: $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{C}^{-1}\,\boldsymbol{c}$ (6)
Multiplikation mit C: $\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{g} = \boldsymbol{c}$ (7)

Die letzte Gleichung lautet in ausführlicher Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} V_{zz} & C(P_1P_2) \ldots & C(P_1P_n) \\ & V_{zz} \ldots & C(P_2P_n) \\ & & \vdots \\ symm. & & V_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(PP_1) \\ C(PP_2) \\ \vdots \\ C(PP_2) \end{pmatrix} \quad (8)$$

In dieser Gleichung sind die Gewichtsfunktionswerte g_i die Unbekannten. Sie variieren von Interpolationsstelle zu Interpolationsstelle, da auch die Kovarianzen $C(PP_i)$ zwischen der Interpolationsstelle P und den n Stützpunkten von Interpolationsstelle zu Interpolationsstelle variieren. Die Matrix $\boldsymbol{C}$ bleibt dagegen immer gleich.

3. Der Krige-Schätzer

Die Grundgleichung für den Krige-Schätzer lautet (z.B. [2]):

$$\begin{pmatrix} V_{zz} & C(P_1P_2) \ldots & C(P_1P_n) & 1 \\ & V_{zz} \ldots & C(P_2P_n) & 1 \\ & & & \vdots \\ & & V_{zz} & 1 \\ symm. & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \\ -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(PP_1) \\ C(PP_2) \\ \vdots \\ C(PP_n) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

μ Lagrange'scher Multiplikator

Häufig findet man diese Grundgleichung in der englischsprachigen Literatur unter der Bezeichnung „Ordinary Kriging" (z.B. [4]).

4. Vergleich der beiden Methoden

Der Vergleich der Beziehung (8) mit der Beziehung (9) erlaubt die Feststellung, daß der Krige-Schätzer und die Interpolation nach kleinsten Quadraten fast identisch sind. Bei etwas tieferer Betrachtung werden wir sogar feststellen können, daß beide Methoden völlig identisch sind. Die zusätzliche Unbekannte in der Gleichung (9) berücksichtigt folgende Bedingungsgleichung für die Gewichtsfunktionswerte g_i:

$$\sum_{i=1}^{n} g_i = 1 \quad (10)$$

Diese Beziehung bewirkt die sogenannte Erwartungstreue einer Schätzung. Der Krige-Schätzer, der – wie die Interpolation nach kleinsten Quadraten – die Schätzvarianz minimiert, führt zusätzlich die Erwartungstreue herbei. Diese Erwartungstreue ist manchmal erwünscht und manchmal nicht. Dazu ein kleines (extremes) Beispiel, das am Ende dieses Aufsatzes (Abschnitt 6.) zahlenmäßig angegeben wird: Hat man nur einen einzigen positiven Stützwert, der mit einem kleinen (unbekannten) zufälligen Fehler behaftet sein soll, so liefert der Krige-Schätzer an jeder Interpolationsstelle P als Interpolationswert $\hat{z}$ exakt den Stützwert z_1. Die Interpolation nach kleinsten Quadraten (Gleichung (1)) ist in diesem Fall etwas vorsichtiger: Sie liefert im Stützpunkt einen Interpolationswert, der etwas kleiner als der Stützwert z_1 ist; außerhalb des Stützpunktes klingt das Interpolationsergebnis entsprechend dem Verlauf der Kovarianzfunktion allmählich gegen Null ab, was in vielen Fällen erwünscht ist.

Bei der Interpolation nach kleinsten Quadraten stellt sich die Erwartungstreue ebenfalls ein bzw. kann die Erwartungstreue herbeigeführt werden: Bei der Interpolation nach kleinsten Quadraten geht im allgemeinen der eigentlichen Interpolation eine Abspaltung des Trends voraus. Wählen wir eine Horizontalebene als Trendfläche, ist die Interpolation nach kleinsten Quadraten identisch mit dem Krige-Schätzer. Beim Krige-Schätzer (Gleichung (9)) wird im gleichen Rechengang die Trendabspaltung mittels einer Horizontalebene und die eigentliche Interpolation vorgenommen. Bei der Interpolation nach kleinsten Quadraten sind es zwei getrennte Schritte. Bei der erweiterten Interpolation nach kleinsten Quadraten, der Kollokation [15], wird die Trendabspaltung ebenfalls gemeinsam mit der Prädiktion durchgeführt. Andererseits kann auch der Krige-Schätzer verallgemeinert werden: Anstelle eines konstanten Trends kann ein polynomialer Trend höherer Ordnung berücksichtigt werden. Man spricht dann vom universellen Krige-Schätzer [3]. Schließlich ist noch zu erwähnen, daß man bei der Interpolation nach kleinsten Quadraten im Anschluß an die Bestimmung der Gewichtsfunktionen (Gleichung (5)) auch die Bedingung (10) erfüllen kann, indem man die Gewichtsfunktionen der Gleichung (5) nachträglich normiert [14].

5. Die Variogramm-Funktion

In der Geostatistik und damit auch beim Krige-Schätzer verwendet man sehr selten die Kovarianzfunktion; man bevorzugt die sogenannte Variogramm-Funktion $\gamma(P_iP_k)$ (siehe z.B. [2], [4]). Beide Funktionen stehen zueinander in folgender Beziehung:

$$\gamma(P_iP_k) = V_{zz} - C(P_iP_k) \qquad (11)$$

Die Kovarianzfunktion wird aus den empirischen Kovarianzen $\frac{1}{nj}\Sigma z_i z_k$ für verschiedene Entfernungsklassen d_j abgeleitet (z.B. [10]). Dabei sind – wenn eine gegen Null tendierende Kovarianzfunktion wie die Gauß'sche Glockenkurve verwendet wird – die zentrierten Stützwerte zu verwenden.

Die Variogramm-Funktion bekommt man mittels $\frac{1}{2nj}\Sigma\,(Z_i-Z_k)^2$ für verschiedene Entfernungsklassen d_j (z.B. [2], [4]. Dabei können die ursprünglichen Stützwerte benutzt werden; der Trend bleibt ohne Einfluß auf die Differenz (Z_i-Z_k).

6. Zahlenbeispiel

Gegeben ist ein Stützpunkt mit dem Stützwert 5. Die Varianz V_{zz} beträgt 25. Als Kovarianzfunktion (3) soll folgende Beziehung benutzt werden:

$$C(P_iP_k) = 16 \cdot e^{-\left(\frac{\overline{P_iP_k}}{20}\right)^2}.$$

Mit diesem Zahlenbeispiel kann man sich mit den Gleichungen (1), (4) und (9) näher vertraut machen.

a) Interpolationswert an der Stützstelle

(1): $\hat{z} = 16\ (25)^{-1}\ 5 = 3.2$

(9): $\begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g_1 = 1,\ \mu = 9$

(4): $\hat{z} = 1 \cdot 5 = 5$

b) Interpolationswert an einer um 10 Einheiten entfernten Interpolationsstelle

(1): $\hat{z} = \frac{16}{\sqrt[4]{e}}\ (25)^{-1}\ 5 = 12.5\ (25)^{-1}\ 5 = 2.5$

(9): $\begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g_1 = 1,\ \mu = 12.5$

(4): $\hat{z} = 1 \cdot 5 = 5$

c) Interpolationswert an einer unendlich entfernten Stützstelle

(1): $\hat{z} = 0\ (25)^{-1}\ 5 = 0$

(9): $\begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g_1 = 1,\ \mu = 25$

(4): $\hat{z} = 1 \cdot 5 = 5$

Für die Interpolation nach kleinsten Quadraten sind in der Veröffentlichung [1] viele Zahlenbeispiele enthalten, die die geometrischen Eigenschaften dieser Interpolationsmethode veranschaulichen. Die dort gemachten Aussagen können für den Krige-Schätzer entsprechend interpretiert werden.

7. Schlußfolgerungen

In der Geodäsie und in der Geostatistik sind unabhängig voneinander zwei Prädiktionsmethoden entstanden. In diesem Aufsatz werden beide Methoden ineinander übergeführt. Damit liegen die Voraussetzungen vor, daß die für die eine Methode gemachten Aussagen auch von der anderen Methode übernommen werden können. Zum Beispiel gibt es für die Interpolation nach kleinsten Quadraten Untersuchungen zur numerischen Stabilität [5] und zur Interpolationsgenauigkeit [9]. Vor kurzem wurde auch die robuste Schätzung bei schief verteilten Datenfehlern mit der Interpolation nach kleinsten Quadraten verbunden [11]. Auch die Interpolation und Filterung mit zwei verschiedenen Stützpunkt-Gruppen ist erwähnenswert [8]. Zum Krige-Schätzer gibt es ähnliche Erweiterungen. Zum Beispiel hat man sich dort sehr mit dem sogenannten Klumpeneffekt befaßt (z.B. [2]), der sich mit dem Verlauf der Variogramm-Funktion in der Nähe des Ursprungs befaßt.

Dank

In Diskussionen haben zu diesem Aufsatz o.Univ.-Prof. Dr. R. Dutter, Ass.-Prof. Dr. H. Kager und ao.Univ.-Prof. Dr. F. Kohlbeck wertvolle Beiträge geliefert.

Literatur

[1] *Aßmus, E., Kraus, K.:* Die Interpolation nach kleinsten Quadraten - Prädiktionswerte simulierter Beispiele und ihre Genauigkeiten. DGK, Reihe A, Nr. 76, 1974.

[2] *Dutter, R.:* Geostatistik. B.G. Teubner, Stuttgart, 1985.

[3] *Henley, S.:* Nonparametric Geostatistics. Elsevier Applied Science, 1981.

[4] *Isaaks, E., Srivastava, R.M.:* Applied Geostatistics. Oxford University Press, 1989.

[5] *Kager, H.:* Numerische Aspekte der Interpolation nach kleinsten Quadraten. ZfV 101, S. 377–384, 1976.

[6] *Kraus, K.:* Automatische Berechnung digitaler Höhenlinien. ZfV 96, S. 233–239, 1971.

[7] *Kraus, K.:* Interpolation nach kleinsten Quadraten in der Photogrammetrie. BuL 40, S. 4–12, 1972.

[8] *Kraus, K.:* Prädiktion und Filterung mit zwei verschiedenen Stützpunktgruppen. ZfV 98, S. 146–153, 1973.

[9] *Kraus, K.:* Untersuchung zur Genauigkeit der Interpolation nach kleinsten Quadraten. ZfV 99, S. 198–205, 1974.

[10] *Kraus, K.:* Photogrammetrie. Band 2, 2. Auflage, Dümmler Verlag, Bonn, 1987.

[11] *Kraus, K.:* Eine neue Methode zur Interpolation und Filterung von Daten mit schiefer Fehlerverteilung. VGI 85, S. 25–30, 1997.

[12] *Matheron, G.F.:* Kriging or Polynomial Procedures?. Canadian Mining and Metallurgical Bulletin, No 60, p. 665, 1967.

[13] *Moritz, H.:* Neuere Ausgleichungs- und Prädiktionsverfahren. ZfV 98, S. 137–146, 1973.

[14] *Wild, E.:* Die Prädiktion mit Gewichtsfunktionen und deren Anwendung zur Beschreibung von Geländeflächen bei topographischen Geländeaufnahmen. DGK, Reihe C, Nr. 277, 1983.

[15] *Wolf, H.:* Die Sonderfälle der diskreten Kollokation. ÖZ 65, S. 132-138, 1977.

Anschrift des Autors:

o.Univ.-Prof. Dr.-Ing. Karl Kraus, TU Wien, Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung, Gußhausstraße 27–29, A-1040 Wien, email: mbox@ipf.tuwien.ac.at

Sinn und Unsinn von Unternehmensphilosophie und Leitbild

Helga Moser, Bad Vöslau

1. Einleitung

Unternehmensphilosophie und Leitbild sind heute Themen, die in aller Munde sind, zu denen es aber ganz unterschiedliche Meinungen gibt. Manche sagen ganz offen: wozu dieser Firlefanz, manche wenden viel Zeit auf, um gemeinsam mit ihren Mitarbeitern diese Inhalte zu diskutieren und für ihren Bereich zu definieren. Warum ist das heute so? Vor 20 oder 30 Jahren hat sich niemand damit befaßt.

Nun, wir leben zweifellos, was ja auch in einschlägiger Literatur überall nachzulesen ist, in einer Zeit des Wertewandels, hochtrabend „Paradigmawechsel“ genannt. Wir haben unter anderem plötzlich den Wert der Einzigartigkeit des Menschen entdeckt. Das „Humankapital“ wird genutzt. Diese berechnende Form, bei der es wieder nur um mehr Profit geht, ist sicher negativ.

Es gibt aber auch den positiven Aspekt dabei: wenn es gelingt, Menschen zu motivieren und zu aktivieren, sich selbst einzubringen, haben sie die Möglichkeit, sich wirklich zu entfalten, haben mehr Freude, mehr Spaß in ihrer Arbeitswelt oder, wenn dies in einer Gemeinde geschieht, in ihrem Umfeld, in dem sie leben.

Natürlich ist es in einer Gemeinschaft nicht möglich, daß jeder ohne Rücksicht auf andere frei nur seine Ideen entwickelt und verwirklicht. Chaos wäre die Folge.

2. Die Unternehmensphilosophie

Es bedarf zunächst einer gemeinsamen Formulierung der Erkenntnisse und Erfahrungen der Mitarbeiter, auch einer Formulierung der Zukunftsperspektiven. Was im Ringen um diese Definitionen bewußt wird, ist eine gemeinsame Philosophie der Gruppe, die sich damit auseinandersetzt.

Das Wort „Philosophie“ kommt aus dem Griechischen: Philos = der Freund und sophia = die