Fehler im Mikronivellementnetz

Florijan Vodopivec [1]

[1] *FAGG – Geodätische Abteilung Jamova 2, 61000 Ljubljana, Slowenien*

VGI – Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation **83** (1–2), S. 64–68

1995

Fehler im Mikronivellementnetz

Florijan Vodopivec, Ljubljana

Zusammenfassung

Alle Messungen werden durch systematische und zufällige Fehler beeinflußt. Die Anwesenheit der beiden Fehlerarten wurde bei der Untersuchung des Nivellementnetzes der Stadt Ljubljana festgestellt. Das Problem der Fehlerberechnung wird diskutiert und mit unterschiedlichen analytischen und graphischen Methoden gelöst.

Abstract

All measurements are effected by systematical and random errors. The presence of both errors was detected by investigating the levelling network of Ljubljana. The problem is discussed and solved by various analytical and graphical methods. Few methods for the determination of both errors are given.

1. Einführung

Alle geodätischen Messungen ergeben bestimmte größere oder kleinere Fehler. Auch beim Nivellement wird zwischen drei Fehlertypen unterschieden: grobe, zufällige und systematische Fehler. Die groben Fehler werden wegen ihrer Beschaffenheit bei den Berechnungen nicht berücksichtigt. Solche Messungen werden gestrichen und nochmals wiederholt.

Beim systematischen Fehler (bezeichnet mit σ) drückt schon der Name aus, daß er systematisch, und zwar auf allen Standorten, vorkommt. Die Summe der systematischen Fehler in einem Nivellementzug gleicht dem Produkt von dem auf einem Standort ausgewiesenen Fehler und der Anzahl aller Standorte. Unter der Voraussetzung, daß die Zielweiten auf den einzelnen Standorten gleich sind, ergibt sich daraus die Summe der systematischen Fehler in der folgenden Form (die Länge des Nivellements ist d):

$$m_{sy} = \pm \sigma d \qquad (1.1)$$

Die zufälligen Fehler (bezeichnet mit η) werden quadratisch addiert, denn die Wahrscheinlichkeit des Auftretens der positiven und der negativen Fehler ist völlig die gleiche, daher folgt

$$m_{zu} = \pm \eta \sqrt{d} \qquad (1.2)$$

Die beiden Fehler, sowohl der systematische als auch der zufällige, sind uns völlig unbekannt und daher quadratisch zu addieren

$$M^2 = \eta^2 d + \sigma^2 d^2 \qquad (1.3)$$

M stellt also denjenigen Fehler dar, der bei einer bestimmten Länge, wenn η und σ bekannt sind, zu erwarten ist. Ist umgekehrt die Nichtübereinstimmung f beim Schließen der Nivellementschleife, entweder λ oder ρ, oder die Nichtübereinstimmung beim Hin- und Rücknivellement der Nivellementstrecke bzw. der Nivellementlinie bekannt, können η und σ berechnet werden. Da wir aber in diesem Falle zu einer Gleichung mit zwei Unbekannten gelangen, bedürfen wir auch zumindest zweier unabhängiger Messungen. Gibt es mehrere Messungen, dann ist eine Ausgleichung möglich und wir bekommen die wahrscheinlichsten Werte der gesuchten Unbekannten η und σ.

Neben dieser universellen Formel, mittels derer zugleich η und σ berechnet werden kann, kennen wir noch eine ganze Reihe anderer Formeln, die aber mehr oder weniger approximativ sind. Es werden entweder η oder σ berechnet, und zwar so, daß der eine Fehlertyp wegen der Beschaffenheit einer bestimmten Messung unberücksichtigt bleibt. Bei kurzen Nivellementzügen kommen öfter zufällige als systematische Fehler vor, aus diesem Grund können die letzteren vernachlässigt werden und aus den Nichtübereinstimmungen die zufälligen Fehler berechnet werden. Bei den langen Zügen überwiegen aber die systematischen Fehler, die zufälligen Fehler werden nicht beachtet (Cubranic 1954), (Svecnikov 1955). Das ubiquitäre und immer gleiche Problem ist, festzustellen, wann ein Nivellementzug lang und zur Berechnung des systematischen Fehlers geeignet ist, und wann er aber kurz ist und zur Berechnung des zufälligen Fehlers verwendet werden kann. Dazu kommt noch das Problem, daß alle diese Formeln den Staatsnivellementnetzen angepaßt sind, die sich wesentlich von den Mikronivellementnetzen unterscheiden. Deswegen wollen wir diese Formeln beiseite lassen und uns mit der Analyse der Fehler bei Mikronetzen befassen.

2. Mikronivellementnetze

Was ist das Wesentliche bei den Mikronivellementnetzen? Eine der wichtigsten Eigenschaften ist gewiß die Form und die Größe des Netzes. Wird z.B. das Netz der Stadt Ljubljana aus dem Jahr 1963 (1971) untersucht, dann beträgt hier die durchschnittliche Länge der geschlossenen Schleife 7,0 (8,0) km, die durchschnittliche Länge des Nivellementzuges 1,6 (1,7) km und der durchschnittliche Abstand zwischen den Höhenpunkten 304 (284) m. Aus diesen Längen selbst wird ersichtlich, daß die durchschnittliche Länge der geschlossenen Schleife ungefähr soviel beträgt wie die Länge der Linien zwischen den einzelnen Höhenpunkten bei einem Staatsnivellement mit großer Genauigkeit. Es werden also aus den Längen von 7–8 km beim Nivellement mit großer Genauigkeit die zufälligen Fehler berechnet, bei Stadtnetzen aber die systematischen Fehler.

Neben Größenunterschieden gibt es bei Mikronetzen noch zusätzliche Besonderheiten wie z.B. Verkehr, verschiedene Hemmungen, durch den Verkehr verursachtes Schütteln, Industrie usw. Durch alle diese Ursachen können die systematischen Fehler noch vergrößert werden und sie können auch schon bei kürzeren Längen auftreten. Es wird angenommen, daß wir es auch bei Mikronetzen mit zwei Fehlertypen zu tun haben: mit dem systematischen und mit dem zufälligen Fehler. Die Ergebnisse werden durch beide Fehlertypen beeinflußt, die eben aus diesem Grund quadratisch nach der Gleichung 1.3 zu addieren sind.

Versuchen wir jetzt diese Gleichung in ein Koordinatensystem zu transformieren, das uns eine einfachere und bessere bzw. genauere Lösung ermöglicht.

Schreiben wir diese Gleichung in einer anderen Form auf und setzen wir neue Gleichungen ein

$$x = \sigma^2,\ y = \eta^2,\ A = d^2,\ B = d,\ C = M^2 \qquad (2.1)$$

wobei wir zur folgenden Gleichung gelangen: $Ax + By - C = 0$

das ist aber nichts anderes als die Gerade. Schreiben wir sie jetzt in der segmentierten Form auf

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ wobei}$$

$$a = \frac{C}{A} \text{ und } b = \frac{C}{B} \qquad (2.2)$$

Werden in die Gleichungen 2.2 die Gleichungen 2.1 eingesetzt, dann bekommen wir

$$a = \frac{M^2}{d^2} = \sigma_0^2 \quad \text{und} \quad b = \frac{M^2}{d} = \eta_0^2 \qquad (2.3)$$

Wir sehen also, daß „a" nichts anderes ist als das Quadrat des systematischen Fehlers, wobei der zufällige Fehler unberücksichtigt bleibt; und „b" ist auch nichts anderes als das Quadrat des zufälligen Fehlers bei der Nichtberücksichtigung des systematischen Fehlers (Abbildung 1).

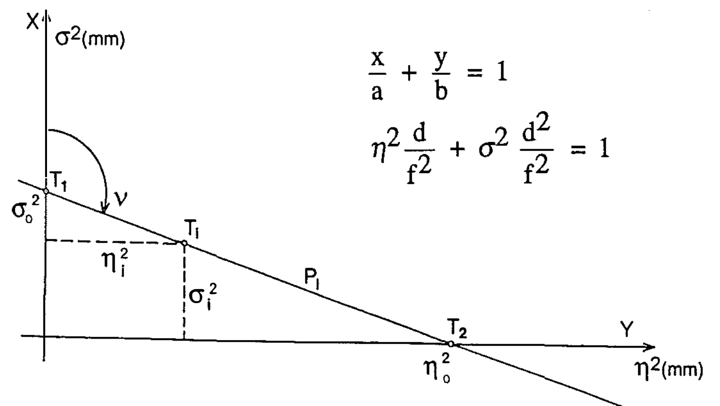

Abb. 1

Jeder Punkt auf dieser Geraden stellt die Lösung unserer Gleichung dar. Im Punkt T_1 haben wir nur den systematischen Fehler, im Punkt T_2 aber nur den zufälligen. Irgendein Punkt zwischen T_1 und T_2 ergibt eine positive Lösung für η^2 und σ^2.

Wenn wir zwei unabhängige Messungen haben, können die beiden in diesem Koordinatensystem als zwei Gerade dargestellt werden. Der Schnittpunkt dieser zwei Geraden ergibt die Gesamtlösung der beiden Messungen, d.h. η^2 und σ^2. Der Schnittpunkt wird umso genauer, je rechtwinkeliger sich die Geraden schneiden. Deswegen können wir durch schlecht ausgewählte Angaben den Schnittpunkt in einem Bereich haben, wo eine Unbekannte negativ wird, wenn die Längen der beiden Nivellementzüge beinahe die gleichen sind bzw. sie schneiden sich gar nicht, wenn die beiden Nivellementzüge die gleiche Länge haben. Wir sollen also darauf aufmerksam sein, daß η und σ aus zwei Nivellementzügen berechnet werden, die möglichst größere Längenunterschiede aufweisen. Es sollte daher das arithmetische Mittel aller Nivellementstrecken berechnet und als erste Gerade verwendet werden. Das arithmetische Mittel der Nivellementlinien wird als zweite Gerade genommen. Der Schnittpunkt der derart gewonnenen Geraden ergibt ziemlich gute bzw. genaue Lösungen für η und σ. Wie das aber in der Praxis aussieht, soll am Beispiel des Nivellementnetzes der Stadt Ljubljana aus den Jahren 1963 und 1971 demonstriert werden.

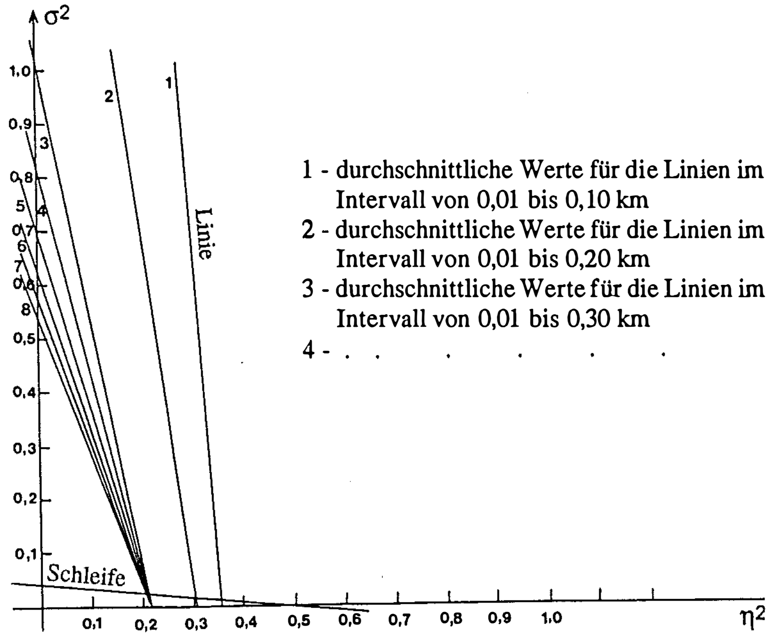

Abb. 2

2.1 Bildung von Durchschnittswerten

Für die einzelnen Längenbereiche der Nivellementlinien wurden die Nichtübereinstimmungen derart berechnet, daß für Intervalle von 100 m Durchschnittswerte nach folgenden Gleichungen berechnet wurden:

$$\bar{d} = \frac{[d]}{n} \text{ und } \bar{m}^2 = \bar{f}^2 = \frac{[p^2]}{4n} \qquad (2.4)$$

Dabei bedeutet „n“ die Anzahl der Nivellementlinien in einem Intervall. Diese Werte stellen die durchschnittliche Länge in dem Intervall und die durchschnittliche Abweichung dar, die bei der gegebenen durchschnittlichen Länge gewonnen wurde. Das gleiche Verfahren wurde auch bei Nivellementschleifen angewandt.

2.2 Die Berechnung von η und σ als Schnitt zweier Geraden

Aufgrund der vorher berechneten Werte haben wir nach den Gleichungen 2.1–2.3 mittels des Schnittes zweier solcherart gewonnenen Geraden den zufälligen und den systematischen Fehler berechnet.

Die Werte η^2 und σ^2 sind auch in der Abb. 2 abzulesen. Daraus ist ersichtlich, daß der systematische und der zufällige Fehler schon bei Nivellementlinienlängen von ungefähr 0,5 km ihre Endwerte mit zwei Dezimalen erreichen. Variabel bleibt vor allem nur noch die dritte Dezimale, die aber bei dieser Genauigkeit nicht mehr sicher ist.

3. Berechnung des Wurzelexponenten der Parabel des Mittleren Fehlers beim Nivellement

Bei sehr kurzen Nivellementlinien kann angenommen werden, daß der systematische Fehler beinahe keinen Einfluß ausübt und er einfach außer Acht gelassen werden kann. Es stellt sich die Frage, ob der zufällige Fehler tatsächlich mit der Quadratwurzel der Länge zunimmt oder eher mit einem anderen, von 2 unterschiedlichen Wurzelexponenten. Nehmen wir die folgende Gleichung an:

$$f = \eta \, d^{\frac{1}{x}} \qquad (3.1)$$

Bekannt sind f und d, Unbekannte sind aber η und x. Das sind der zufällige Fehler und der Wurzelexponent. Die oben angeführte Gleichung wird logarithmiert und daraus bekommen wir folgendes:

$$\ln f = \ln \eta + 1/x \ln d \qquad (3.2)$$

Auf diese Weise haben wir den Mittleren Fehler und den entsprechenden Wurzelexponenten

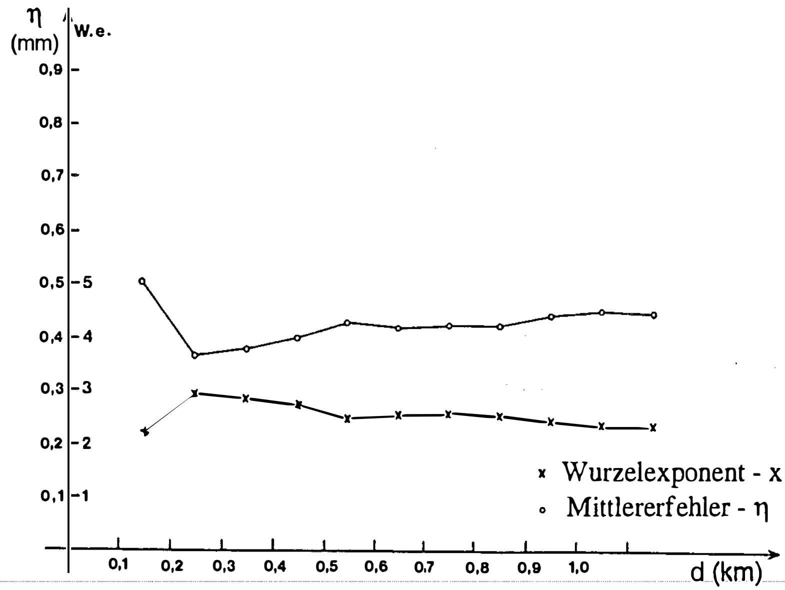

Abb. 3

berechnet. Zunächst haben wir die beiden Werte aus den ersten zwei Angaben berechnet, und dann weiters aus drei, vier Angaben usw., um endlich zu einer approximativen mit 10 Punkten gegebenen Kurve zu gelangen. Das wurde deswegen unternommen, um sehen zu können, wie der Wurzelexponent durch die allmähliche Einführung der Werte für längere Linien variiert.

Die Resultate sind in der Abbildung 3 dargestellt. Schon ein flüchtiger Blick auf diese Resultate macht uns klar, daß der Wurzelexponent ziemlich größer ist als 2, jenem Wert der normalerweise in der Literatur angführt wird. Der erste Wert wird ausgenommen, denn er ist nur aus zwei Angaben berechnet und es gibt keine überzähligen Beobachtungen und keine Ausgleichung und deswegen kann ihm auch keine besondere Genauigkeit beigemessen werden. Alle übrigen Werte zeigen ein Abnehmen des Wurzelexponenten mit der Länge; umgekehrt nimmt aber der zufällige Fehler zu.

Was bedeutet dieses Abnehmen des Wurzelexponenten? Die Erklärung ist ziemlich einfach. Beim Nivellement kommen den Feststellungen verschiedener Autoren nach über 20 verschiedene Ursachen für Fehler vor. Alle diese Fehler können von rein zufälligen bis hin zu rein systematischen Fehlern gegliedert werden. Einzelne zufällige Fehler nehmen proportional mit der Wurzel der Länge mit einem größeren Exponenten als 2 zu, die anderen aber mit einem kleineren bis zu den systematischen Fehlern, die linear proportional zu der Länge addiert werden. Daher ist es logisch, daß bei kurzen Längen die Fehler vorherrschen, die mit einem höheren Wurzelexponenten zunehmen, bei längeren Nivellementlinien nehmen aber diese Fehler ab und kommen als systematische Fehler vor, durch die der Wurzelexponent vermindert wird; vergrößert wird aber der Mittlere Fehler.

Die Resultate der Approximationskurve hinsichtlich des zunehmenden Wurzelexponenten sind in der Abbildung 4 dargestellt.

Am Anfang dieser Ausführungen ist angenommen worden, daß bei kurzen Nivellementlinien fast keine systematischen Fehler auftreten. Deswegen wurde zur Berechnung des zufälligen Fehlers als Grenzwert für die Länge 1 km ge-

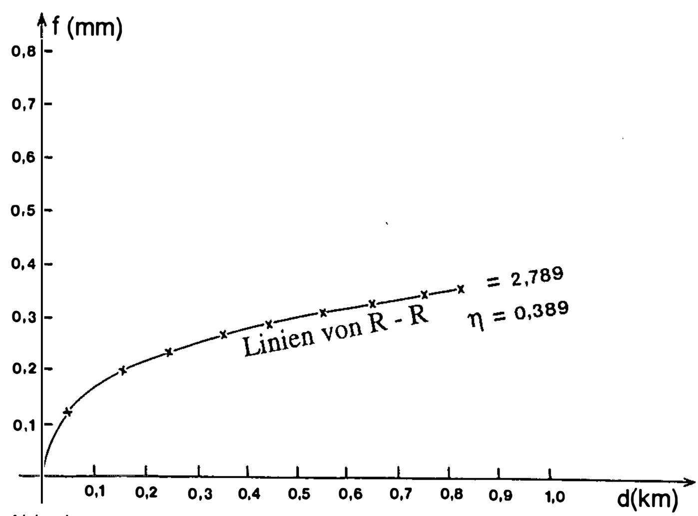

Abb. 4

nommen. Zu diesem Zweck wurden für die Berechnungen nur Linien innerhalb dieser Länge verwendet, sofern sie nicht wegen der mangelhaften Anzahl von Werten auf kürzere Längen beschränkt wurden. Als die geeignetsten Werte haben wir die aus allen Angaben gewonnenen Resultate genommen, und auf diese Weise den mittleren zufälligen Fehler berechnet. Wird mittels dieser Angaben der Fehler in Nivellementnetzen berechnet, dann bekommen wir natürlich einen Wert, der kleiner ist als der durch tatsächliche Messungen festgestellte Wert. Die Quadratwurzel aus der Differenz der Quadrate solcherart gewonnener Werte und die tatsächlich bemessenen Werte ergeben den systematischen Fehler des Netzes.

4. Schlußfolgerungen

4.1 Bewertung der durch den Schnitt zweier Geraden gewonnenen Resultate

Dieses Verfahren ist in Hinsicht auf die Berechnungstechnik und den Zeitaufwand sehr einfach. Es ist auch relativ einfach graphisch prüfbar. Die gewonnenen Resultate sind immer real und können deswegen einfach quadratisch addiert werden, was den gemeinsamen Mittleren Fehler des Nivellements ergibt. Vorteilhaft ist dieses Verfahren auch darin, daß wir zugleich die Lösungen für η^2 und σ^2 bekommen, bzw. für η und σ.

4.2 Bewertung der durch den vergrößerten Wurzelexponenten gewonnenen Resultate

Auch dieses Verfahren hat Vorteile und Nachteile. Meines Erachtens ist die Approximationskurve der solcherart erhaltenen Fehler jedoch die beste Lösung. Auf diese Weise wird die optimalste Approximation der Kurve erreicht. Nachteilig ist dieses Verfahren darin, daß die Berechnung komplexer ist, und der systematische Fehler gesondert zu berechnen ist. Dieses Verfahren bietet uns jedoch die meisten nützlichen Angaben über das Netz selbst.

In dem vorliegenden Artikel haben wir festgestellt, daß auch in Stadt- und Nivellementnetzen neben den zufälligen auch systematische Fehler vorkommen. Nicht nur, daß auch systematische Fehler auftreten, sie sind vielmehr noch relativ größer als bei Staatsnivellementnetzen. Der zulässige Mittlere Fehler bei den Staatsnetzen beträgt $\pm 1,5$ mm/km für zufällige Fehler und $\pm 0,3$ mm/km für systematische Fehler (Jordan-Eggert-Kneissel 1956), d.h. das Verhältnis beträgt 1:5. Wir bekommen aber für das Netz der Stadt Ljubljana aus dem Jahr 1963 den zufälligen Fehler von $\pm 0,42$ mm/km und den systematischen von $\pm 0,23$ mm/km, für das Netz aus dem Jahr 1971 den zufälligen Fehler von $\pm 0,42$ mm/km und den systematischen von $\pm 0,16$ mm/km. Das Verhältnis beträgt also kaum 1:2,3. Daraus ist also zu folgern, daß der systematische Fehler in den Stadtnetzen eine äußerst wichtige Rolle spielt. Der zufällige Fehler beträgt kaum 30% von dem zulässigen, der systematische aber 62%. Die Regelung IIA bestimmt für das Stadtnetz den zulässigen Gesamtfehler von 1mm/km. Wir haben aber für das Jahr 1963 $\pm 0,49$ mm/km und für das Jahr 1971 $\pm 0,47$ mm/km und damit sind wir um ungefähr 50% unter dem zulässigen Fehler.

Bisherige Untersuchungen haben die Notwendigkeit ergeben, beide Fehlertypen zu berechnen. Zur Berechnung des zufälligen und des systematischen Fehlers in dem Stadt- und dem Mikronetz hat sich als die einfachste und genügend genaueste Methode jene erwiesen, die mit dem Schnitt der Geraden der Nivellementsschleifen und der Nivellementlinien operiert. Dieses Verfahren ist das einfachste, kürzeste und übersichtlichste, weil es auch graphisch prüfbar ist. Daher können wir behaupten, daß dieses Verfahren in der Analyse aller Stadt- und Mikronivellementnetze angewandt werden sollte.

Literatur

[1] *Cubranic, N.:* Visa geodezija I, Zagreb, Skolska knjiga, 1954

[2] *Cubranic, N.:* Teorija pogresaka s racunom izjednacenja, Zagreb, Tehnicka knjiga, 1967

[3] *Grossman, W.:* Grundzüge der Ausgleichsrechnung, Berlin, Springerverlag, 1969

[4] *Jordan-Eggert-Kneissel:* Höhenmessung-Tachymetrie. Band III, Stuttgart, Metzlersche Verlagsbuchhandlung, 1956

[5] *Kostic, A., Scecnikov, N.:* Nivelman, Beograd, 1955

[6] *Svecnikov, N.:* Visa geodezija, Izdaja SGU, Beograd, 1955

[7] *SGU:* Pravilnik za Drzavni premer II-A. Osnovni radovi na gradskom premeru. Beograd, 1956

[8] *Wolf, H.:* Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Dümmler's Verlag, Hamburg-Bonn, 1968.

Anschrift des Verfassers:

Univ.-Prof. Dr. Vodopivec Florian, FAGG - Geodätische Abteilung Jamova 2, 61000 Ljubljana, Slowenien.