



## Die konforme Abbildung oder: Muß Komplexes komplex sein?

Bernhard Hofmann-Wellenhof <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Abteilung für Landesvermessung und Landinformation, Technische Universität Graz, Steyrergasse 30, A-8010 Graz*

VGI – Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation **83** (1–2), S. 55–62

1995

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Hofmann-Wellenhof_VGI_199507,  
Title = {Die konforme Abbildung oder: Mu{\ss} Komplexes komplex sein?},  
Author = {Hofmann-Wellenhof, Bernhard},  
Journal = {VGI -- {"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessung und  
Geoinformation},  
Pages = {55--62},  
Number = {1--2},  
Year = {1995},  
Volume = {83}  
}
```



Die aus den terrestrischen Beobachtungen erzielte Lagegenauigkeit liegt geringfügig unter jener der GPS-Lösung, die Höhengenaugigkeit liegt zwischen 11 mm und 25 mm (nur Punkt 306 mit 38 mm außerhalb dieses Intervalles) und resultiert aus den infolge Refraktion systematisch verfälschten Zenitdistanzen.

Die kombinierte Lösung zeigt die besten Lagegenauigkeiten, die Höhenfehler betragen durchschnittlich 10 mm, maximal 18 mm (Abb. 3). Sie wurde aus 124 Richtungen, 84 Zenitdistanzen, 55 Strecken und 32 GPS-Vektoren berechnet (Überbestimmung: 294).

Das Ergebnis einer in wirtschaftlicher und fehlertheoretischer Hinsicht günstigen Kombination ist in Abb. 4 dargestellt. Darin sind rund zwei Drittel der Bestimmungsstücke der vollständigen Kombination verarbeitet.

Das hier beschriebene Testprojekt ‚Lieser‘ veranschaulicht die Notwendigkeit der Zusammenführung heterogener Beobachtungen. Kleine Netze oder Netzteile können exakt und effizient mit traditionellen Meßverfahren bestimmt werden, ihre großräumige genaue Verbindung gelingt aber erst durch die Hinzunahme von Satellitenbeobachtungen. Durch den Einsatz von GPS erhält man Höhenunterschiede über größere Distanzen mit hoher Genauigkeit (einige cm unter Berücksichtigung des lokalen Geoides). Diese ist jedoch für technische Anforderungen unzureichend und somit kann GPS die präziseste und aufwendigste Art der Höhenbestimmung – das Nivellement – nicht ersetzen.



## Die konforme Abbildung oder: Muß Komplexes komplex sein?

*Bernhard Hofmann-Wellenhof, Graz*

### Zusammenfassung

Die Theorie der konformen Abbildung des Ellipsoids in die Ebene wird möglichst einfach und übersichtlich dargestellt und am Beispiel der Gauß-Krüger-Abbildung angewendet.

### Abstract

The theory of conformal mapping of the ellipsoid into the plane is presented in a simple structure and is demonstrated for the Transverse Mercator projection (which is also referred to as Gauss-Krüger projection).

### 1. Einführung

Das geodätische Schicksal führte mich schon in universitären Jugendjahren an die Frage

### Literatur

- [1] Caspary, W.: „Zur Lösung singulärer Ausgleichsmodelle durch Bedingungs-gleichungen“, Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, 85. Jg., Nr. 2, Herbert Wichmann, Karlsruhe 1978.
- [2] Illner, I.: „Datumsfestlegung in freien Netzen“, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 309, München 1985.
- [3] Killian, K., Meissl, P., Rinner, K.: „Beiträge zur Theorie geodätischer Netze im Raum“, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Heft Nr. 61, München 1969.
- [4] Meissl, P.: „Die innere Genauigkeit eines Punkthaufens“, Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, 50. Jg., S. 159-165 und S. 186-194, Österreichischer Verein für Vermessungswesen, Baden bei Wien 1962.
- [5] Niemeier, W.: „Zur Nutzung von GPS-Meßergebnissen in Netzen der Landes- und Ingenieurvermessung“, Zeitschrift für Vermessungswesen, 117. Jg., Nr. 8/9, Konrad Wittwer, Stuttgart 1992.
- [6] Niemeier, W.: „Aufbau eines 3-D Grundlagentetzes für das Pumpspeicherwerk Goldisthal durch Kombination von GPS- und terrestrischen Messungen“, Zeitschrift für Vermessungswesen, 119. Jg., Nr. 5, Konrad Wittwer, Stuttgart 1994.
- [7] Schwintzer, P.: „Zur Berechnung von Inversen mit minimaler Teilspur“, Zeitschrift für Vermessungswesen, 107. Jg., Nr. 11, Konrad Wittwer, Stuttgart 1982.
- [8] Strauss, R., Walter, H.: „Die Ausgleichung von GPS-Beobachtungen im System der Landeskoordinaten“, Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, 100. Jg., Nr. 6, Herbert Wichmann, Karlsruhe 1993.
- [9] Wolf, H.: „Die Helmert-Inverse bei freien geodätischen Netzen“, Zeitschrift für Vermessungswesen, 98. Jg., Nr. 9, Konrad Wittwer, Stuttgart 1973.

### Anschrift der Verfasser:

Dipl.-Ing. Werner Daxinger, Robert Stirling, Institut für Theoretische Geodäsie und Geophysik, Abteilung Theoretische Geodäsie, Technische Universität Wien, Gußhausstraße 27-29, A-1040 Wien.

sonders faszinierte mich die Frage, warum plötzlich komplexe Funktionen auftreten, die nicht nur im mathematischen Sinn komplex sind, sondern die gesamte Herleitung der Abbildung komplex (diesmal im übertragenen Sinn) erscheinen lassen. Da, wie später gezeigt wird, die komplexen Funktionen bei den Abbildungen vom Ellipsoid in die Ebene von C.F. Gauß ins Spiel gebracht wurden, ist natürlich jeder Zweifel an der Sinnhaftigkeit überflüssig. Also beschränkte sich meine Suche schließlich auf die Frage, ob es wenigstens für die Herleitung der Abbildungen unter Verwendung der komplexen Funktionen eine klare, einfache Darstellung des Prinzips gäbe oder, kürzer, ob Komplexes komplex sein müsse. Diese Arbeit enthält also keinerlei neue Theorie, sondern versucht nur eine leicht verständliche Darstellung des Prinzips der konformen Abbildung. Als ganz wesentliche Quellen wurden Gauß (1822), Hubeny (1951), Meissl (1981) und Moritz und Hofmann-Wellenhof (1993) verwendet.

## 2. Die konforme Abbildung

Nach Jordan und Eggert (1941), Seite 148, ist das Kennzeichen einer konformen Abbildung, daß zwischen dem Urbild und dem Abbild eine Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen besteht. Ist also beispielsweise das Urbild ein Dreieck, so muß das Abbild ein ähnliches Dreieck sein, wobei aber die Größe dieses Dreiecks (oder der Maßstab) durchaus verschieden sein darf.

Ähnliche Dreiecke haben dieselben Winkel, das heißt also, bei der konformen Abbildung bleiben die Winkel erhalten. Man sagt daher auch, eine konforme Abbildung ist winkeltreu.

Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, um eine konforme Abbildung zu erhalten? Jordan und Eggert (1941), Seite 148 f, zeigen, daß man eine konforme Abbildung erhält, wenn man isotherme Koordinaten verwendet und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind. Zur Erklärung der konformen Abbildung ist daher ein Abschnitt über die isothermen Koordinaten notwendig.

### 2.1 Isotherme Koordinaten

Eine Fläche kann man durch die allgemeinen Parameter  $u, v$  beschreiben. Variiert man die beiden Flächenparameter und betrachtet man für jedes  $u$  eine Parameterlinie  $u = \text{const}$  und für jedes  $v$  eine Parameterlinie  $v = \text{const}$ , so erhält man ein Netz von Parameterlinien. Die Para-

meterlinien  $u = \text{const}$  bezeichnet man als  $v$ -variablen Linien oder als  $v$ -Linien und analog spricht man bei  $v = \text{const}$  von  $u$ -variablen Linien oder  $u$ -Linien.

Auf einer beliebigen Fläche sind die Parameterlinien im allgemeinen krummlinig.

Durch jeden Punkt auf der Fläche gehen genau eine  $u$ -Linie und eine  $v$ -Linie. Die Parameterwerte dieser beiden Linien werden als Koordinaten des Punktes bezeichnet. Bei krummlinigen Parameterlinien spricht man von krummlinigen Koordinaten.

Das Linienelement oder Bogenelement oder Wegelement (in quadratischer Form) auf der durch die Flächenparameter  $u, v$  beschriebenen Fläche ist durch

$$ds^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2 \quad (1)$$

gegeben, wobei nach Gauß  $E(u, v), F(u, v), G(u, v)$  die Fundamentalgrößen erster Ordnung sind. Meist wird die Abhängigkeit der Fundamentalgrößen von  $u$  und  $v$  nicht explizit angegeben, sondern man schreibt

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \quad (2)$$

für das Linienelement.

Von isothermen Koordinaten spricht man, wenn auf der gesamten Fläche einerseits  $F = 0$  und andererseits  $E = G$  gilt. Durch  $F = 0$  bilden die  $u$ - und  $v$ -Linien ein Netz orthogonaler Parameterlinien. Und durch  $E = G$  folgt, daß die Maschen, die durch die Parameterlinien gebildet werden, im Differentiellen Quadrate sind. Zu beachten ist jedoch, daß die Größe dieser Quadrate variabel oder ortsabhängig ist, da  $E$  und  $G$  ortsabhängig sind, also von  $u$  und  $v$  abhängen, wie aus (1) ersichtlich ist. Setzt man  $E = G = m^2$ , so kann man das Linienelement für isotherme Koordinaten  $u, v$  mit

$$ds^2 = m^2(du^2 + dv^2) \quad (3)$$

angegeben.

Der Begriff der isothermen Koordinaten stammt aus der Wärmelehre: liegt auf einem Flächenstück aus homogenem Material eine stationäre Wärmeströmung vor, so bilden die Linien gleicher Temperatur (Isothermen) zusammen mit den entsprechenden orthogonalen Trajektorien (Stromlinien) ein isothermes Netz, vgl. Meissl (1981).

### 2.2 Alle isothermen Koordinatensysteme auf einer Fläche

Nun werden auf einer Fläche zwei isotherme Koordinatensysteme angenommen. Für das er-

ste werden wiederum die Parameter  $u, v$  und  $E = G = m^2$  verwendet, und zur Definition des zweiten isothermen Systems werden  $x, y$  und  $E = G = n^2$  verwendet.

Bewußt wird für das zweite Koordinatensystem diese Nomenklatur gewählt, obwohl man damit Koordinaten in der Ebene assoziiert. Später werden nämlich die isothermen Koordinaten  $x, y$  der Fläche (bzw. des Ellipsoids) mit den Koordinaten  $x, y$  der Ebene numerisch identifiziert. Die geometrische Bedeutung der beiden  $x, y$  Koordinatensysteme ist jedoch vollkommen verschieden!

Zurück zu den beiden isothermen Koordinatensystemen  $u, v$  und  $x, y$  auf der Fläche. Beide Systeme sind gleichwertig, daher kann das Linienelement durch

$$ds^2 = m^2(du^2 + dv^2) = n^2(dx^2 + dy^2) \quad (4)$$

dargestellt werden. Die Interpretation dieser Formel ist wichtig: ein und dasselbe Linienelement (oder, noch leichter vorstellbar, ein und dasselbe Wegstück) wird betrachtet, und dieses Linienelement (bzw. Wegstück) wird einerseits im isothermen  $u, v$  Koordinatensystem und andererseits im isothermen  $x, y$  Koordinatensystem ausgedrückt. Damit ist eine Relation gefunden, die beide Koordinatensysteme über das Linienelement miteinander verknüpft.

Nun fragt man, ob es zwischen den beiden isothermen Koordinatensystemen auf der Fläche eine allgemeine Beziehung gibt, die beispielsweise einen funktionalen Zusammenhang zwischen den Koordinaten des einen isothermen Systems und den Koordinaten des anderen isothermen Systems ausdrückt. Die Antwort auf diese Frage findet man bei Gauß. Nach Gauß sind die beiden isothermen Koordinatensystemen über eine analytische Funktion einer komplexen Variablen miteinander verbunden. Daher definiert man mittels der imaginären Einheit  $i = \sqrt{-1}$  einerseits die komplexe Variable

$$w = u + iv \quad (5)$$

und andererseits die komplexe Variable

$$z = x + iy \quad (6)$$

und formuliert den Ansatz von Gauß mit

$$x + iy = f(u + iv) \quad (7)$$

oder wegen (5) und (6) einfach durch

$$z = f(w). \quad (8)$$

Diese Gleichung verknüpft also über die komplexe (oder analytische oder holomorphe) Funktion  $f$  die beiden isothermen Koordinatensysteme. Ist dieser Ansatz berechtigt? Zur Beant-

wortung dieser Frage versucht man, obige Gleichung (8) so umzuformen, daß der bereits bekannte Zusammenhang zwischen  $u, v$  und  $x, y$  in (4) resultiert. Gelingt dies, dann ist der Ansatz von Gauß (8) gerechtfertigt:

Da laut Voraussetzung  $f(w)$  in (8) eine komplexe Funktion ist, besteht auch die Ableitung aus einem reellen und einem imaginären Teil. Bezeichnet man die reelle Komponente der Ableitung mit  $A$  und die komplexe Komponente mit  $B$ , so kann man

$$\frac{dz}{dw} = z' = f'(w) = A + iB \quad (9)$$

schreiben. Diese Beziehung kann man auch zu

$$dz = f'(w) dw = (A + iB) dw \quad (10)$$

umformen. Wenn man nun  $z = x + iy$  und somit  $dz = dx + i dy$  und auch  $w = u + iv$  und  $dw = du + i dv$  berücksichtigt, folgt aus (10) unmittelbar

$$dx + i dy = (A + iB)(du + i dv). \quad (11)$$

Eine zweite Gleichung dieser Art kann man sofort angeben, wenn man die zwei Lösungen von  $\pm i = \pm\sqrt{-1}$  beachtet. Jede Gleichung, die für  $i$  gilt, muß daher auch für  $-i$  gelten. Daher kann man als Pendant zu (11) die Gleichung

$$dx - i dy = (A - iB)(du - i dv) \quad (12)$$

angeben. Nun multipliziert man die beiden Gleichungen (11) und (12) miteinander. Ganz allgemein gilt  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  und also  $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$  wegen  $i^2 = -1$ ; somit erhält man

$$dx^2 + dy^2 = (A^2 + B^2)(du^2 + dv^2). \quad (13)$$

Nach Multiplikation dieser Gleichung mit  $n^2$  stellt man das Ergebnis der Gleichung (4) gegenüber und vergleicht die beiden Beziehungen:

$$\begin{aligned} n^2(dx^2 + dy^2) &= n^2(A^2 + B^2)(du^2 + dv^2) \\ n^2(dx^2 + dy^2) &= m^2(du^2 + dv^2). \end{aligned} \quad (14)$$

Aus dem Vergleich folgt unmittelbar

$$m^2 = n^2(A^2 + B^2). \quad (15)$$

In (9) wurden  $A$  und  $B$  als Komponenten der komplexen Ableitung  $f'(w)$  eingeführt. Wenn man  $f'(w)$  als Vektor in der komplexen Zahlenebene betrachtet und  $A$  und  $B$  als die entsprechenden Komponenten des Vektors, dann folgt die Länge des Vektors (oder Betrag des Vektors) aus  $|f'(w)| = \sqrt{A^2 + B^2}$ .

Daher kann man anstelle von (15) auch

$$m^2 = n^2|f'(w)|^2 \quad (16)$$

schreiben.

Damit aber ist die Rechtfertigung des Gaußschen Ansatzes (8) bewiesen. Durch diesen Be-

weis, der für eine allgemein definierte komplexe Funktion  $f$  geführt wurde, können nun zwei wichtige Schlüsse gezogen werden:

- Wenn mit  $u, v$  ein isothermes Koordinatensystem auf der Fläche eingeführt wird, dann gibt es auf derselben Fläche ein isothermes Koordinatensystem  $x, y$ , das durch eine komplexe Funktion  $f$  zum isothermen Koordinatensystem  $u, v$  in Beziehung steht. Man kann auch sagen, jeder komplexen Funktion entspricht ein isothermes Koordinatensystem.
- Wenn wiederum mit  $u, v$  ein isothermes Koordinatensystem auf der Fläche eingeführt wird, dann sind durch die Gesamtheit aller komplexen Funktionen  $f$  alle isothermen Koordinatensysteme  $x, y$  auf dieser Fläche gefunden.

Den Gaußschen Ansatz (8) kann man auch noch anders motivieren. Wenn man nach den Bedingungen fragt, die erfüllt werden müssen, um von den isothermen Koordinaten  $u, v$  zu den isothermen Koordinaten  $x, y$  zu gelangen, so kann man zeigen, daß als Bedingungen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen resultieren, vgl. Hubeny (1953), Seite 6f. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen wiederum sind genau dann erfüllt, wenn man  $u, v$  und  $x, y$  über eine komplexe Funktion  $f$  in Beziehung bringt, also gerade den Gaußschen Ansatz (8) wählt.

### 2.3 Konforme Abbildung einer Fläche in die Ebene

Die Problemstellung kann man mit einer sehr einfachen Argumentation lösen. Wie bereits früher zitiert, ist eine konforme Abbildung dadurch gekennzeichnet, daß zwischen dem Urbild und dem Abbild eine Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen besteht.

Als Urbild bezeichnet man nun die Fläche und als Abbild die Ebene. Es wird also von der Fläche in die Ebene abgebildet. Wenn isotherme Koordinaten auf der Fläche eingeführt und die Parameterlinien dieser isothermen Koordinaten, die differentiell betrachtet quadratische Maschen bilden, in die Ebene abgebildet werden, dann muß die Eigenschaft der quadratischen Maschen in der Ebene erhalten bleiben (andernfalls liegt keine Konformität vor). Es muß also das isotherme Netz auf der Fläche in ein isothermes Netz in der Ebene übergehen. Daraus kann man nun aber auch folgern, daß eine konforme Abbildung einer Fläche in die Ebene dann entsteht, wenn man irgendwelche isothermen Koordinaten auf der Fläche irgendwelchen isothermen Koordinaten in der Ebene zuordnet.

Oder anders ausgedrückt: eine konforme Abbildung einer Fläche in die Ebene entsteht, wenn man irgendwelche isothermen Koordinaten auf der Fläche mit irgendwelchen isothermen Koordinaten in der Ebene identifiziert, also numerisch gleichsetzt. Man setzt daher

$$(\text{Isotherme Koordinaten})_{\text{Ebene}} = (\text{Isotherme Koordinaten})_{\text{Fläche}}$$

Auf der Fläche wurden beispielsweise die isothermen Koordinaten  $u, v$  verwendet. In der Ebene bezeichnet man wie üblich die rechtwinkligen Koordinaten mit  $x, y$ . Diese Koordinaten sind isotherm, da das Bogenelement  $ds^2 = dx^2 + dy^2$  lautet. Die Parameterlinien ( $x$ - und  $y$ -Linien) bilden überall gleich große Quadrate. Die konforme Abbildung von der Fläche in die Ebene kann daher durch die Zuordnung

$$(x, y)_{\text{Ebene}} \Leftarrow (u, v)_{\text{Fläche}} \quad (17)$$

oder durch die numerische Identifikation

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \end{aligned} \quad (18)$$

erfolgen.

Damit wurde eine konforme Abbildung von der Fläche in die Ebene gefunden. Da aber im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, wie man zu allen isothermen Koordinatensystemen auf der Fläche gelangt, kann man damit auch zu allen Abbildungen in die Ebene gelangen.

Das Prinzip wird nochmals in drei Schritten zusammengefaßt:

1. Man bestimme auf der Fläche ein isothermes Koordinatensystem  $u, v$ .
2. Durch den Gaußschen Ansatz

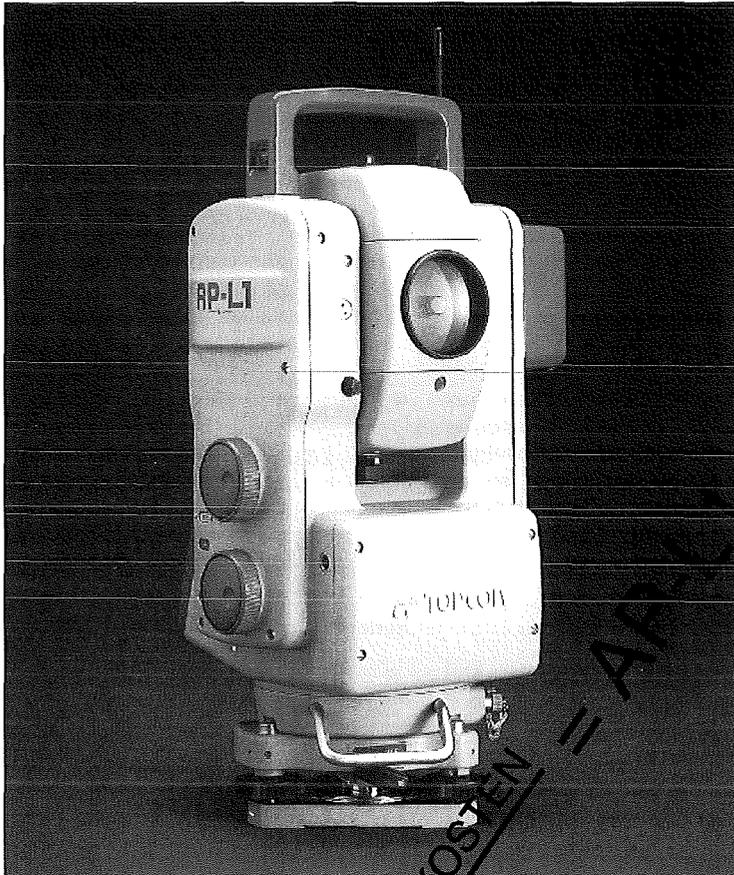
$$x + iy = f(u + iv) \quad (19)$$

erhält man auf der Fläche ein anderes isothermes Koordinatensystem  $x, y$ . Das sind im allgemeinen krummlinige Koordinaten auf der Fläche. Durch verschiedene Wahl der analytischen Funktion  $f$  können alle isothermen Koordinaten auf der Fläche gefunden werden.

3. Man identifiziere numerisch die krummlinigen isothermen Koordinaten  $x, y$  mit den rechtwinkligen Koordinaten (isothermen Koordinaten)  $x, y$  der Ebene.

Der dritte Schritt bewirkt die Abbildung in die Ebene und er besteht lediglich aus einer Neuinterpretation der ursprünglich krummlinigen isothermen Flächenkoordinaten  $x, y$  als nunmehr rechtwinklige (isotherme) Ebenenkoordinaten  $x, y$ . Gerade diese numerische Identifizierung erklärt auch, warum auf der Fläche dieselbe Koor-

# EINMANNBEDIENUNG MIT TOTALSTATION TOPCON AP-L1



Automatische Zielverfolgung

Programmierbare Messung

Tracking Geschwindigkeit 10°/s,

das entspricht auf 100m 63,5 km/h

Ferngesteuerte Meßweite 4m bis 700 m

Meßdauer 0,5s bis 3s

Fordern Sie für detaillierte Informationen unser Prospektmaterial an:

Bitte senden Sie mir Informationsmaterial über TOPCON AP-L1:

Fax: 0222/2147571-54

Tel.: 0222/2147571-53

Name \_\_\_\_\_

Firma \_\_\_\_\_

Straße \_\_\_\_\_

Ort \_\_\_\_\_

**iPECAD**

Ges.m.b.H. & Co. KG

dinatenbezeichnung wie für die Ebene gewählt wurde.

Die gesamte Argumentation für die konforme Abbildung einer Fläche in die Ebene kann ganz allgemein für die Abbildung einer Fläche in eine andere Fläche verwendet werden. Dies wird bereits von Gauß (1822) bewiesen, der zeigt, daß man eine (analytische) Fläche konform in eine andere (analytische) Fläche abbilden kann, wenn man auf jeder Fläche isotherme Koordinaten einführt und Punkte mit gleichen isothermen Koordinaten einander zuordnet. Alle konformen Abbildungen einer Fläche in eine andere Fläche erhält man schließlich, wenn man alle isothermen Koordinaten mittels analytischer Funktionen im Sinn des Gaußschen Ansatzes (19) findet.

#### 2.4 Konforme Abbildung des Ellipsoids in die Ebene

Das in drei Schritten gegliederte Rezept aus dem vorigen Abschnitt kann für die konforme Abbildung des Ellipsoids in die Ebene unmittelbar angewendet werden. Gemäß dem ersten Schritt muß auf dem Ellipsoid ein isothermes Koordinatensystem gefunden.

##### Isotherme Koordinaten für das Ellipsoid

Das Bogenelement für ein Rotationsellipsoid ist durch

$$ds^2 = M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 \quad (20)$$

gegeben, wobei  $M$  und  $N$  den Meridiankrümmungsradius und den Querkrümmungsradius bedeuten. Vergleicht man diese Formel mit der allgemeinen Darstellung (2), so sieht man, daß als Flächenparameter, also als Parameter für das Ellipsoid, die geographischen Koordinaten  $\varphi$ ,  $\lambda$  gewählt wurden und daß wegen

$$\begin{aligned} E &= M^2 \\ F &= 0 \\ G &= N^2 \cos^2 \varphi \end{aligned} \quad (21)$$

zwar ein orthogonales, aber kein isothermes Koordinatensystem vorliegt. Abweichend von früher, wo die isothermen Koordinaten auf der Fläche mit  $u$  und  $v$  bezeichnet wurden, führt man für das Ellipsoid die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} q & \dots \text{ isometrische Breite} \\ \ell = \lambda - \lambda_0 & \dots \text{ Länge mit } \lambda_0 = \text{const} \end{aligned} \quad (22)$$

ein. Der Übergang von den geographischen (nicht isothermen) Koordinaten  $\varphi$ ,  $\lambda$  zu den isometrischen Koordinaten  $q$ ,  $\ell$  wird leicht er-

reicht, wenn zunächst das Bogenelement (20) durch Herausheben von  $N^2 \cos^2 \varphi$  zu

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi \left( \frac{M^2}{N^2 \cos^2 \varphi} d\varphi^2 + d\lambda^2 \right) \quad (23)$$

umgeformt wird. Nun führt man einerseits

$$m^2 = N^2 \cos^2 \varphi \quad (24)$$

ein und definiert andererseits

$$\begin{aligned} dq^2 &= \frac{M^2}{N^2 \cos^2 \varphi} d\varphi^2, \\ d\ell^2 &= d\lambda^2, \end{aligned} \quad (25)$$

so daß man nunmehr für das Bogenelement

$$ds^2 = m^2 (dq^2 + d\ell^2) \quad (26)$$

bekommt, aus dem sofort der isotherme Charakter von  $q$ ,  $\ell$  erkennbar ist. Durch Integrieren der differentiellen Beziehung für  $q$  in (25) bekommt man

$$q = \int_0^\varphi \frac{M}{N \cos \varphi} d\varphi. \quad (27)$$

Die Lösung dieses Integrals ist analytisch möglich. Aber der Lösungsweg wird nicht im Detail nachvollzogen. Das Integral kann zu

$$q = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - e^2 \int_0^\varphi \frac{\cos \varphi d\varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \quad (28)$$

zerlegt werden, wobei mit

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (29)$$

die erste numerische Exzentrizität eingeführt wurde, die aus den Halbachsen  $a$  und  $b$  des Ellipsoids ermittelt werden kann. Das erste der beiden Integrale von (28) ist das Mercator Integral (das bei der Abbildung der Kugel in die Ebene resultiert). Dessen Lösung und auch die Lösung des zweiten Integrals in (28) können in Integraltafelwerken gefunden werden. Man erhält

$$q = \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \ln \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \quad (30)$$

$$\ell = \lambda - \lambda_0$$

wobei auch die Beziehung zwischen  $\ell$  und  $\lambda$  hinzugefügt wurde. Mit diesen Formeln hat man die Möglichkeit, auf dem Ellipsoid die geographischen Koordinaten  $\varphi$ ,  $\lambda$  in die isometrischen Koordinaten  $q$ ,  $\ell$  umzurechnen. Der erste der drei Schritte für die konforme Abbildung des Ellipsoids in die Ebene, nämlich auf dem Ellipsoid isotherme Koordinaten zu finden, ist mit (30) erfüllt.

Der zweite Schritt ist nun der Übergang von diesem einen isothermen Koordinatensystem  $q$ ,  $\ell$  auf dem Ellipsoid auf alle anderen isothermen Koordinatensysteme auf dem Ellipsoid. In allgemeiner Form wird dies durch den Gaußschen Ansatz

$$x + iy = f(q + i\ell) \quad (31)$$

erreicht. Durch den dritten Schritt, nämlich der Identifizierung von  $x$ ,  $y$  mit Koordinaten in der Ebene, erzielt man die konforme Abbildung in die Ebene. Bei der praktischen Durchführung des zweiten und dritten Schritts ist man im allgemeinen nicht mehr ganz so ehrgeizig, alle isothermen Koordinatensysteme und damit alle konformen Abbildungen in die Ebene zu finden. Man beschränkt sich auf die Abbildungen, die in der Landesvermessung die größte Bedeutung haben: die konforme Zylinderabbildung, die konforme Kegelabbildung und die konforme Azimutalabbildung. Statt Abbildung wird auch häufig das Wort Projektion verwendet. Die Begriffe Zylinderprojektion, Kegelprojektion, Azimutalprojektion sind also gleichbedeutend mit den Begriffen Zylinderabbildung, Kegelabbildung, Azimutalabbildung.

Im Rahmen dieser Publikation wird nur noch ein Beispiel herausgegriffen, nämlich die Gauß-Krüger Abbildung, die zur Gruppe der konformen Zylinderabbildung gehört.

### Gauß-Krüger Abbildung

Auf dem Ellipsoid bezeichnet man die Kurven konstanter Breite als Parallelkreise und die Kurven konstanter Länge als Meridiane. Die Gauß-Krüger Abbildung ist nun durch folgende Forderungen definiert:

- Konforme Abbildung des Ellipsoids in die Ebene.
- Ein Meridian, der als Hauptmeridian bezeichnet wird, soll in die Abszissenachse des ebenen isothermen Koordinatensystems abgebildet werden.
- Die Länge des Hauptmeridians soll bei der Abbildung in die Ebene erhalten bleiben. Der Hauptmeridian soll also *längentreu* abgebildet werden.

Die erste Forderung ist erfüllt, wenn auf dem Ellipsoid wie früher mit  $q$ ,  $\ell$  isotherme Koordinaten eingeführt werden und der Gaußsche Ansatz

$$x + iy = f(q + i\ell) \quad (32)$$

gewählt wird. Für die beiden anderen Forderungen entwickelt man die Funktion  $f$  in (32) in eine Taylorreihe

$$x + iy = f(q) + i\ell \frac{df(q)}{dq} + \frac{1}{2!} (i\ell)^2 \frac{d^2 f(q)}{dq^2} + \frac{1}{3!} (i\ell)^3 \frac{d^3 f(q)}{dq^3} + \frac{1}{4!} (i\ell)^4 \frac{d^4 f(q)}{dq^4} + \frac{1}{5!} (i\ell)^5 \frac{d^5 f(q)}{dq^5} + \frac{1}{6!} (i\ell)^6 \frac{d^6 f(q)}{dq^6} + \dots \quad (33)$$

Wegen  $i = \sqrt{-1}$  und folglich  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$ ,  $i^5 = i$  und  $i^6 = -1$  kann man auch schreiben

$$x + iy = f(q) + i\ell \frac{df(q)}{dq} - \frac{1}{2!} \ell^2 \frac{d^2 f(q)}{dq^2} - \frac{1}{3!} i\ell^3 \frac{d^3 f(q)}{dq^3} + \frac{1}{4!} \ell^4 \frac{d^4 f(q)}{dq^4} + \frac{1}{5!} i\ell^5 \frac{d^5 f(q)}{dq^5} - \frac{1}{6!} \ell^6 \frac{d^6 f(q)}{dq^6} + \dots \quad (34)$$

und Real- und Imaginärteil trennen:

$$x = f(q) - \frac{1}{2!} \ell^2 \frac{d^2 f(q)}{dq^2} + \frac{1}{4!} \ell^4 \frac{d^4 f(q)}{dq^4} - \frac{1}{6!} \ell^6 \frac{d^6 f(q)}{dq^6} + \dots$$

$$y = \ell \frac{df(q)}{dq} - \frac{1}{3!} i\ell^3 \frac{d^3 f(q)}{dq^3} + \frac{1}{5!} i\ell^5 \frac{d^5 f(q)}{dq^5} - \dots \quad (35)$$

Die Forderung nach Abbildung des Hauptmeridians in die Abszissenachse des ebenen isothermen Koordinatensystems  $x$ ,  $y$  wird erreicht, wenn man den Hauptmeridian als Nullmeridian mit  $\ell = 0$  (Beginn der Längenzählung) wählt, denn dann folgt aus (35) sofort

$$x = f(q)$$

$$y = 0. \quad (36)$$

Die Längentreue für den abgebildeten Hauptmeridian wird erreicht, wenn man fordert, daß die Abszisse  $x$  dem Meridianbogen für die Breite  $q$  entspricht, wenn also  $x = B(q)$  für  $\ell = 0$  (Hauptmeridian) gilt, wobei mit  $B(q)$  die Meridianbogenlänge bezeichnet wurde. Diese Beziehung setzt man in (35) ein:

$$x = B - \frac{1}{2!} \ell^2 \frac{d^2 B}{dq^2} + \frac{1}{4!} \ell^4 \frac{d^4 B}{dq^4} - \frac{1}{6!} \ell^6 \frac{d^6 B}{dq^6} + \dots$$

$$y = \ell \frac{dB}{dq} - \frac{1}{3!} i\ell^3 \frac{d^3 B}{dq^3} + \frac{1}{5!} i\ell^5 \frac{d^5 B}{dq^5} - \dots \quad (37)$$

Für die Meridianbogenlänge wurde anstelle von  $B(q)$  abkürzend nur  $B$  geschrieben.

Diese beiden Gleichungen erfüllen nun alle Bedingungen für die Gauß-Krüger Abbildung. Die Formeln resultieren aus einer Taylorentwicklung,  $\ell$  muß folglich klein sein, damit die Reihen konvergieren. Ein kleines  $\ell$  bedeutet aber, daß nicht mehr das gesamte Ellipsoid mit  $-180^\circ \leq \ell \leq +180^\circ$  mit einem einzigen Hauptmeridian in die Ebene abgebildet werden kann. Daher werden *Zonen* oder *Meridianstreifen* eingeführt. Bei der Gauß-Krüger Abbildung wird das Ellipsoid in 120 Meri-

dianstreifen unterteilt. Jeder Meridianstreifen erstreckt sich somit über  $3^\circ$ , der Hauptmeridian ist jeweils in der Mitte jedes Meridianstreifens.

Die Berechnung der Koeffizienten in (37) wird nicht mehr explizit ausgeführt. Für eine detaillierte Herleitung sei zum Beispiel auf Jordan und Eggert (1941), Seite 151, verwiesen. Das Ergebnis lautet

$$\begin{aligned}
 x = B(\varphi) &+ \frac{1}{2} N \cos^2 \varphi \ell^2 \\
 &+ \frac{t}{24} N \cos^4 \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \ell^4 \\
 &+ \frac{t}{720} N \cos^6 \varphi (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2\eta^2) \ell^6 \\
 &+ \frac{t}{40320} N \cos^8 \varphi (1385 - 3111t^2 + 543t^4 - t^6) \ell^8 + \dots
 \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
 y = N \cos \varphi \ell &+ \frac{1}{6} N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) \ell^3 \\
 &+ \frac{1}{120} N \cos^5 \varphi (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2) \ell^5 \\
 &+ \frac{1}{5040} N \cos^7 \varphi (61 - 479t^2 + 179t^4 - t^6) \ell^7 + \dots
 \end{aligned}$$

wobei auch noch die isometrische Breite  $q$  durch die geographische Breite  $\varphi$  ausgedrückt wurde und wobei

- $B(\varphi)$  ... Meridianbogenlänge vom Äquator
- $N = \frac{a^2}{b\sqrt{1+\eta^2}}$  ... Normalkrümmungsradius
- $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$  ... Hilfsgröße
- $e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$  ... Zweite numerische Exzentrizität
- $t = \tan \varphi$  ... Hilfsgröße
- $\lambda_0$  ... Geographische Länge des Hauptmeridians
- $\ell = \lambda - \lambda_0$  ... Längenunterschied

bedeuten. Die Meridianbogenlänge kann mit der Formel

$$B(\varphi) = \alpha[\varphi + \beta \sin 2\varphi + \gamma \sin 4\varphi + \delta \sin 6\varphi + \dots] \tag{39}$$

mit

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{a+b}{2} \left(1 + \frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{64} n^4 + \dots\right) \\
 \beta &= -\frac{3}{2} n + \frac{9}{16} n^3 - \frac{3}{32} n^5 + \dots
 \end{aligned} \tag{40}$$

$$\gamma = \frac{15}{16} n^2 - \frac{15}{32} n^4 + \dots$$

$$\delta = \frac{35}{48} n^3 + \frac{105}{256} n^5 - \dots$$

und

$$n = \frac{a-b}{a+b} \tag{41}$$

berechnet werden.

Die Formeln für die umgekehrte Abbildung sowie konforme Kegel- und Azimutalabbildungen zusammen mit numerischen Beispielen können im Anhang 2 in Hofmann-Wellenhop u.a. (1994) gefunden werden.

#### Literatur

- [1] *Gauß CF (1822)*: Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche auf eine andere gegebene Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird. Schumachers Astronomische Abhandlungen, Heft 3, Altona 1825. Neuausgabe von Wangerin, Leipzig 1921.
- [2] *Hofmann-Wellenhop B, Kienast G, Lichtenegger H (1994)*: GPS in der Praxis. Springer, Wien New York.
- [3] *Hubeny K (1953)*: Isotherme Koordinatensysteme und konforme Abbildungen des Rotationsellipsoids. Sonderheft 13 der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen.
- [4] *Jordan W, Eggert O (1941)*: Sphärische Berechnungen, konforme Abbildung des Erdellipsoids und Aufgaben der Erdmessung. Handbuch der Vermessungskunde, Dritter Band, Zweiter Halbband. Metzler, Stuttgart.
- [5] *Meissl P (1981)*: Ellipsoidische Geometrie (Vorlesungsskriptum). Technische Universität Graz, Institut für Theoretische Geodäsie.
- [6] *Moritz H und Hofmann-Wellenhop B (1994)*: Geometry, relativity, geodesy. Wichmann, Karlsruhe.

#### Anschrift des Verfassers:

Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. Bernhard Hofmann-Wellenhop, Abteilung für Landesvermessung und Landinformation, Technische Universität Graz, Steyrergasse 30, A-8010 Graz.