

Paper-ID: VGI\_199303



## Eine Lösung von 3-D-Transformationen mit Hilfe der Methode der kleinsten Absolutwertsumme

J. Somogyi <sup>1</sup>, J. Závoti <sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Geodetical and Geophysical Research Institute of the Hungarian Academy of Sciences, Muzeum n. 6-8, H-9401 Sopron*

<sup>2</sup> *Geodetical and Geophysical Research Institute of the Hungarian Academy of Sciences, Muzeum n. 6-8, H-9401 Sopron*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **81** (1), S. 16–24

1993

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Somogyi_VGI_199303,  
Title = {Eine Lösung von 3-D-Transformationen mit Hilfe der Methode der  
kleinsten Absolutwertsumme},  
Author = {Somogyi, J. and Závoti, J.},  
Journal = {{Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {16--24},  
Number = {1},  
Year = {1993},  
Volume = {81}  
}
```



schen der zentralen Organisationsstelle und den einzelnen Meßtrupps zu. Ebenso wichtig sind die Sicherheitsvorkehrungen für das gesamte Personal.

Die im Bericht angeführten Ergebnisse bestätigen die Genauigkeitsangaben der Meßgeräte-Hersteller. Der Einsatz der modernen Meßmittel ermöglicht zwar einen rationellen Arbeitsablauf, der aber noch mit umfangreicheren Vorbereitungen und höheren Kosten verbunden ist.

### Literatur

- [1] Stanek, V. et al: Das Projekt der Belastungsprobe der "Brücke der Jugend" in Bratislava. Institut für Geodäsie der STU Bratislava, 1990 (slowakisch).
- [2] Ingesand, H.: Das Wild NA2000 - das erste digitale Nivellier der Welt. Allgemeine Vermessungs-nachrichten, 97, 1990, Heft 6.
- [3] Fabiankowitsch, J.: Automatische Richtungsmessung mit digitalen Differenzbildern. Dissertationsarbeit, TU Wien, 1990.

#### *Anschrift der Autoren:*

Kopacik Alojz, Dr.Dipl.-Ing.,

Stanek Vlastimil, Doz.Dr.Dipl.-Ing.,

Institut für Geodäsie der STU Bratislava, Radlinskeho 11, CS-813 68 Bratislava.

Fabiankowitsch Johannes, Dr.Dipl.-Ing.,

Plach Hans, OR Dipl.-Ing.,

Institut für Landesvermessung und Ingenieurgeodäsie der TU Wien, Gußhausstraße 27-29, A-1040 Wien.



## Eine Lösung von 3-D Transformationen mit Hilfe der Methode der kleinsten Absolutwertsumme

von J. Somogyi und J. Závoti, Sopron

### Zusammenfassung

Der Aufsatz beschäftigt sich mit der Bestimmung von Transformationsparametern mittels der Methode der kleinsten Absolutwertsumme. Es wird eine Lösung für die dreidimensionale Transformation vorgestellt, die auch als zweidimensionale Variante einsetzbar ist.

### Abstract

The paper deals with the determination of transformation parameters with the method of the least sum of absolute values. It gives a solution for the three dimensional transformation which is also useable for the two dimensional version.

### 1. Einleitung

Eine sehr effektive Methode der robusten Schätzung zur Ausscheidung grober Fehler ist die Methode der Summe der kleinsten Absolutwerte (auch als L1-Norm bezeichnet). Es wurden bereits mehrere Versuche zu ihrer Anwendung in der Geodäsie unternommen (z.B.

Fuchs, 1982; Hahn und Bill, 1984; Ebong, 1985; Kampmann, 1986; Burstedde und Cremer, 1986). Bei dieser Lösung wird der Positionsparameter (annehmbarer Wert) mit Hilfe des Medians geschätzt. Die Bestimmung des Medians ist eine Aufgabe der linearen Programmierung, was von den in der Geodäsie allgemein angewandten Berechnungsalgorithmen abweicht und im allgemeinen zu komplizierteren Lösungen führt. Ein gutes Beispiel dafür ist die Lösung der Helmertransformation aufgrund des von Fuchs (1982) beschriebenen Algorithmus, der ein konvexes, nicht-lineares Optimierungsproblem in sich birgt. Im folgenden wird eine einfachere Lösungsmöglichkeit beschrieben, die zur Lösung von drei- und zweidimensionalen Transformationen mit Hilfe der L1-Norm anwendbar ist.

**2. Direkte Bestimmung der Drehparameter einer dreidimensionalen Transformation aufgrund der L1-Norm**

Die allgemeine Form der dreidimensionalen Ähnlichkeitstransformation lautet:

$$\underline{X} = m \underline{R} \underline{x} + \underline{X}_0 \tag{1}$$

Bekanntlich setzt sich die räumliche Transformation aus folgenden drei Phasen zusammen: Verschiebung, Maßstabsermittlung und Drehung um die drei Koordinatenachsen. Vom mathematischen Gesichtspunkt aus ist die dritte Phase am interessantesten, da die Koeffizienten der orthogonalen Drehmatrix  $\underline{R}$  nichtlineare Funktionen der drei unabhängigen Parameter sind. Deshalb wird allgemein eine Iterationslösung mit Hilfe der durch das Differenzieren der Formeln (1) gewonnenen linearen Gleichung angewendet. Es besteht jedoch auch die Möglichkeit der direkten Bestimmung von  $\underline{R}$  (z.B. Thompson, 1959; Schut, 1959; Somogyi, 1969), was hauptsächlich in der photogrammetrischen Praxis Anwendung gefunden hat.

Die Verschiebung kann durch die Einführung von Schwerpunktkoordinaten eliminiert werden und auch die beiden Koordinatensysteme können leicht auf gemeinsamen Maßstab gebracht werden. Die Koeffizienten  $r_{11} \dots r_{33}$  der Matrix  $\underline{R}$  sind Funktionen von drei Parametern  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ . (Einzelheiten dazu findet man z.B. in den oben erwähnten Arbeiten):

$$\begin{matrix} \frac{1 + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} & \frac{2(\alpha\beta - \gamma)}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} & \frac{2(\alpha\gamma + \beta)}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \\ \frac{2(\alpha\beta + \gamma)}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} & \frac{1 + \beta^2 - \alpha^2 - \gamma^2}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} & \frac{2(\beta\gamma - \alpha)}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \\ \frac{2(\alpha\gamma - \beta)}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} & \frac{2(\alpha + \beta\gamma)}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} & \frac{1 + \gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \end{matrix} \tag{2}$$

Zwecks Bestimmung der drei unabhängigen Parameter können folgende lineare Gleichungen geschrieben werden:

$$\begin{matrix} 0 & + (Z + z)_i\beta & - (Y + y)_i\gamma & = (X - x)_i \\ -(Z + z)_i\alpha & + 0 & + (X + x)_i\gamma & = (Y - y)_i \\ (Y + y)_i\alpha & - (X + x)_i\beta & + 0 & = (Z - z)_i \end{matrix} \tag{3}$$

wo X, Y und Z die auf den Schwerpunkt reduzierten Koordinaten des ersten Systems, x, y und z die auf den Schwerpunkt des zu transformierenden Systems und auf den Maßstab des ersten Systems reduzierten Koordinaten bedeuten.

Die Aufstellung der Simplex-Tabelle geschieht aufgrund von (3) wie folgt:

$$\begin{array}{lll}
 a_{i,1} & = 0 & a_{i+n,1} = -Z_i - z_i & a_{i+2n,1} = Y_i + y_i \\
 a_{i,2} & = Z_i + z_i & a_{i+n,2} = 0 & a_{i+2n,2} = -X_i - x_i \\
 a_{i,3} & = -Y_i - y_i & a_{i+n,3} = X_i + x_i & a_{i+2n,3} = 0 \\
 b_i & = X_i - x_i & & \\
 b_{i+n} & = Y_i - y_i & i = 1, 2, \dots, n & \\
 b_{i+2n} & = Z_i - z_i & & 
 \end{array} \quad (4)$$

Zur Bestimmung der Unbekannten  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  des überbestimmten Systems von  $3n$  Gleichungen nach L1-Norm wurde der Algorithmus von Barrodale und Roberts (1973) angewendet. Der Algorithmus bestimmt jene Werte von  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ , für die die Summe der Absolutwerte der Reste ein Minimum ergibt:

$$e = \sum_{i=1}^{3n} |b_i - a_{i,1}\alpha - a_{i,2}\beta - a_{i,3}\gamma| \quad (5)$$

Danach wurden mit Hilfe von  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  die Elemente  $r_{11} \dots r_{33}$  der Drehmatrix  $\underline{R}$  mit Hilfe der Gleichungen (2) ermittelt. Letztlich erhält man die einzelnen Verbesserungen folgenderweise:

$$\begin{array}{l}
 v_x = X_i - x_i r_{11} - y_i r_{12} - z_i r_{13} \\
 v_y = Y_i - x_i r_{21} - y_i r_{22} - z_i r_{23} \\
 v_z = Z_i - x_i r_{31} - y_i r_{32} - z_i r_{33}
 \end{array} \quad (6)$$

In diesen Formeln beziehen sich die Koordinaten ebenfalls auf die Schwerpunkte der Koordinatensysteme und die Koordinaten  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  wurden bereits durch den Maßstab  $m$  modifiziert. Zur Bestimmung des Maßstabes wurden die Entfernungen der in die Ausgleichung einbezogenen Punkte vom Schwerpunkt genommen und aus ihnen der erste Näherungswert als Durchschnittswert errechnet. Der Näherungswert wurde dann bei jeder Iteration verbessert.

Die in den Ausgangsdaten möglicherweise vorhandenen groben Fehler können die Maßstabsbestimmung verunsichern, da die Bestimmung dieser Unbekannten nicht mit der L1-Norm durchgeführt worden ist. Der Einfluß der groben Fehler auf den Maßstab kann dadurch eliminiert werden, daß im Laufe der L1-Norm-Lösung des Gleichungssystems (3) für die Größe der Widersprüche eine obere Grenze angegeben wird. Wenn die an einem Punkt berechneten Widersprüche diesen Grenzwert überschreiten, beginnt das Programm die Rechnungen neu durchzuführen, wobei jene Punkte, bei denen die Grenzwerte überschritten worden sind, bei der Bestimmung des Maßstabes und des Schwerpunktes außer acht gelassen werden. Die Iteration wird solange wiederholt, bis in den Gleichungen (3) sämtliche Widersprüche innerhalb des angegebenen Grenzwertes liegen, vorausgesetzt, daß noch genügend Punkte zur Bestimmung der Unbekannten übrig bleiben. Falls dies nicht mehr zutrifft, muß der Grenzwert erhöht oder die Messung verworfen werden.

Die soeben beschriebene direkte Bestimmung der Elemente der Drehmatrix  $\underline{R}$  ermöglicht die Rückführung der Lösung der dreidimensionalen Transformation nach L1-Norm auf eine einfache lineare Programmierungsaufgabe. Bei der oben stehenden Methode tritt die bei der Helmertransformation angewandte nichtlineare Ungleichung nicht auf. Damit kann die Lösung einer konvexen Optimierungsaufgabe vermieden werden, die übrigens nur iterativ gelöst werden könnte (Meissl, 1968). Bei der dreidimensionalen Transformation lautet diese Ungleichung:

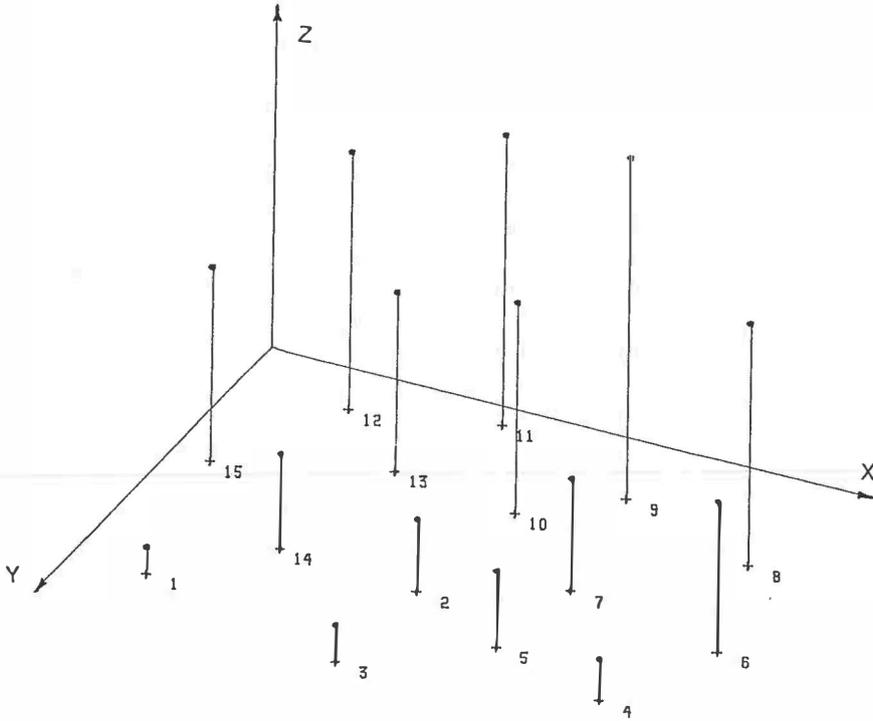


Abb. 1: Projektion der Raumpunkte des Testfeldes auf eine Ebene

P	$x_i$	$y_i$	$z_i$	$X_i$	$Y_i$	$Z_i$	Rauschwerte		
							x	y	z
1	85.222	473.597	31.406	100	600	50	.001	.000	-.002
2	341.643	384.317	84.508	425	490	120	-.003	.007	.002
3	331.247	549.753	42.720	410	700	70	.005	-.001	.004
4	599.341	499.197	47.686	750	640	80	-.003	-.006	-.005
5	461.038	450.123	98.809	575	575	130	-.003	-.001	.001
6	662.555	358.101	175.311	830	460	240	-.003	-.003	-.009
7	479.666	312.235	131.080	600	400	180	.008	-.003	-.002
8	614.483	186.415	281.204	770	240	370	.010	.003	.003
9	449.272	118.973	395.079	560	150	510	-.002	.002	-.001
10	361.278	196.823	245.016	450	250	320	<u>-.947</u>	-.032	.000
11	273.686	41.185	335.413	340	50	430	.006	.005	.005
12	123.544	81.933	297.367	150	100	380	.000	-.003	<u>-.317</u>
13	218.276	177.286	207.798	270	220	270	.000	-.000	<u>.002</u>
14	183.757	366.847	110.633	225	465	150	-.004	<u>-.751</u>	<u>.050</u>
15	45.481	239.828	225.011	50	300	290	.000	.000	.002

Tabelle 1

P	L <sub>1</sub>			W <sub>S</sub>			Parameter nach Ausgleichung
	v <sub>x</sub>	v <sub>y</sub>	v <sub>z</sub>	v <sub>x</sub>	v <sub>y</sub>	v <sub>z</sub>	
1	.002	.001	-.001	.000	.001	-.005	a <sub>11</sub> =.9998339 a <sub>21</sub> =-.0122114
2	-.005	.010	.004	-.005	.010	.003	a <sub>12</sub> =.0120107 a <sub>22</sub> =.9998181
3	.006	-.001	.008	.006	.000	.007	a <sub>13</sub> =.0137113 a <sub>23</sub> =.0146485
4	-.006	-.008	-.003	-.004	-.005	-.0027	1/m = 1.265818
5	-.006	-.001	.004	-.005	.000	.004	a <sub>31</sub> =-.0133529
6	-.007	-.005	-.009	-.005	-.003	-.007	a <sub>32</sub> =-.0148135
7	.008	-.004	-.002	.009	-.003	-.002	a <sub>33</sub> =.9997987
8	.009	.002	.002	.011	.003	.005	
9	-.007	.000	-.005	-.007	-.001	-.002	a <sub>11</sub> =.9998336 a <sub>21</sub> =-.0122161
10	-1.201	-.048	.003	-1.201	-.049	.003	a <sub>12</sub> =.0120153 a <sub>22</sub> =.9998180
11	.005	.006	.002	.005	.003	.003	a <sub>13</sub> =.0137178 a <sub>23</sub> =.0146476
12	.001	-.001	-.394	.000	-.004	-.406	1/m = 1.265825
13	-.001	.001	.000	-.002	-.001	-.001	a <sub>31</sub> =-.0135393
14	.001	-.950	.054	.000	-.951	.054	a <sub>32</sub> =-.0148128
15	.000	.000	.000	-.002	-.002	-.002	a <sub>33</sub> =.9997986
Sollwerte							
	a <sub>11</sub> = .999833		a <sub>21</sub> = -.012213		a <sub>31</sub> = -.013529		
	a <sub>12</sub> = .012012		a <sub>22</sub> = .998818		a <sub>32</sub> = -.014804		
	a <sub>13</sub> = .013708		a <sub>23</sub> = .014639		a <sub>33</sub> = .999798		
			1/m = 1.265823				

Tabelle 2

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \leq \rho_i \quad (7)$$

und bezieht sich im geometrischen Sinn auf den zu einer Kugel gehörenden räumlichen Radius  $\rho$ . Die Iterationslösung eines derartigen konvexen Programmes wäre noch komplizierter, da anstatt eines Kreises bereits eine Kugel durch Polyeder angenähert werden müßte.

Aufgrund der oben ausgeführten Prinzipien haben wir das Programm LTRANS entwickelt. Es eignet sich recht gut zur robusten Ausgleichung räumlicher Transformationsprobleme. Durch Einführung der Substituierung  $z_i = Z_i = 0$  kann dieses Programm zur robusten Ausgleichung von Parametern einer Ähnlichkeitstransformation in der Ebene ebenfalls verwendet werden.

### 3. Rechenbeispiel

Als Abschluß möchten wir anhand einiger numerischer Berechnungen die vorher besprochene L1-Norm-Lösung der räumlichen und ebenen Transformation im Vergleich mit anderen Methoden veranschaulichen. Die Koordinaten x, y und z eines aus 110 Punkten

# Leistungen, die Grenzen sprengen



## Setzen Sie auf Dialog, um Meßprobleme zu lösen

Freies Stationieren mit Ausgleichung; Koordinatenbestimmung; Absteckung nach Koordinaten; Abstand Punkt - Gerade; Spannmaßbestimmung ...

Hat Ihr Tachymeter für jedes Meßproblem eine elegante Lösung?

Wenn für Sie die Software eines elektronischen Tachymeters „verständlich“ sein muß, dann führt an den Computer-Tachymetern



Neu! Computer-Tachymeter Rec Elta

Rec Elta der Baureihe E von Carl Zeiss kein Weg vorbei.

Die Software der Rec Elta bietet universelle Möglichkeiten, selbst für komplexe Meßaufgaben. Im Dialog erreichen Sie schnell und zuverlässig das gewünschte Meßergebnis. Und, weil Sie mit einem Rec Elta mit interner Registrierung Zeit sparen – durch praxisgerechte Zusatzfunktionen ...



Zeiss Österreich GmbH  
Rooseveltplatz 2  
1096 Wien  
Tel. 02 22-42 36 01  
Fax 02 22-43 44 25

**BAU-  
REIHE E** Zukunftswende  
Elektronik im  
Vermessungswesen

Automatische Erfassung von Luftdruck und Temperatur

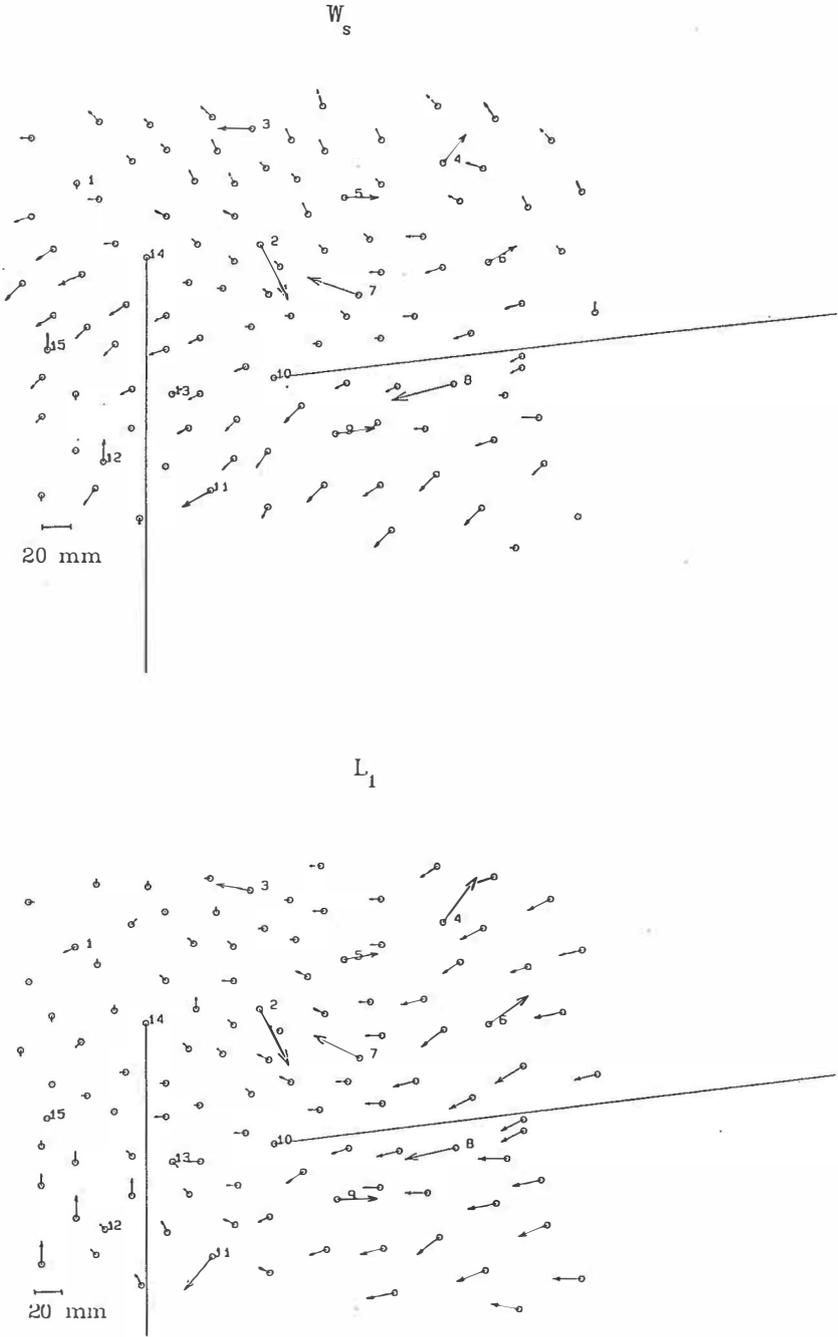


Abb. 2: Diagramm der Unterschiede  $(V_{xi}, V_{yi})$  für M-Schätzer und  $L_1$ -Norm

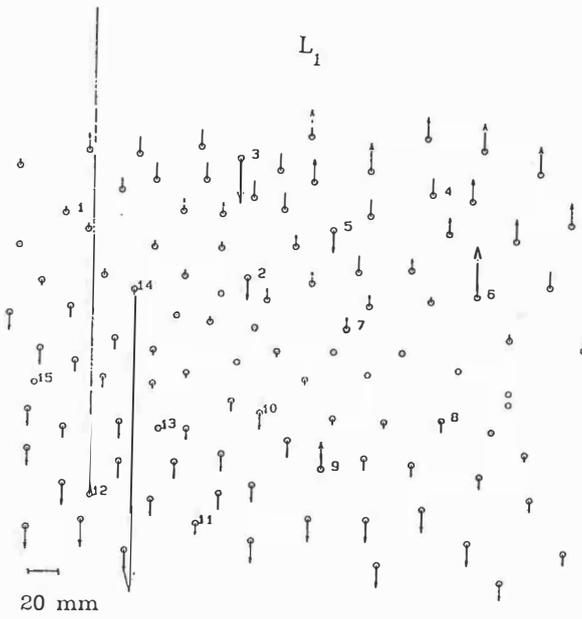
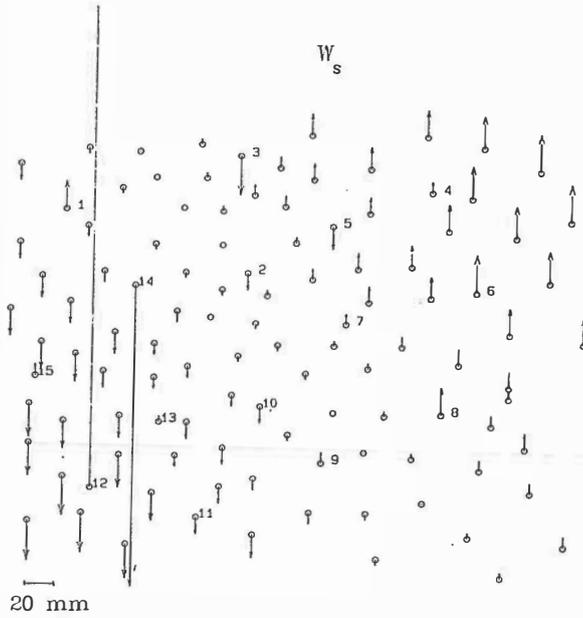


Abb. 3: Diagramm der Unterschiede  $V_{zi}$  für M-Schätzer und  $L_1$ -Norm

(X, Y, Z) bestehenden simulierten Testfeldes haben wir so erhalten, daß das System X, Y, Z mit Hilfe der Werte  $r_{11} \dots r_{33}$  (Tabelle 2) verdreht und mit dem Maßstabfaktor  $m = 0.79$  multipliziert wurde. Zum Vergleich der Schätzungsmethoden wurden 15 Punkte ausgewählt und ihre Koordinaten  $x_i, y_i$  und  $z_i$  mit einem Rauschen ( $\varepsilon_{xi}, \varepsilon_{yi}, \varepsilon_{zi}$ ) von kontaminierter Normalverteilung versehen (Tabelle 1). Die Projektion der Raumpunkte des Testfeldes auf eine Ebene ist in Abbildung 1 zu sehen. Mit den so veränderten Daten wurden die Transformationsparameter mit der L1-Methode und mit einem robusten M-Schätzer (Somogyi 1987, Somogyi, Kalmar 1991) bestimmt. Tabelle 2 zeigt die so erhaltenen Koordinatenwidersprüche und Transformationsparameter für die verschiedenen Ansätze. In der Tabelle wurden auch die Soll-Werte angegeben.

Mit Hilfe der fehlerfreien, auf beide Systeme bezogenen 95 Punkte wurden mit den Transformationsparametern neue  $\hat{X}_i, \hat{Y}_i$  und  $\hat{Z}_i$  Koordinaten berechnet. Die Vektordiagramme der Unterschiede  $X_i - \hat{X}_i = Vx_i, Y_i - \hat{Y}_i = Vy_i$  und  $Z_i - \hat{Z}_i = Vz_i$  sind in den Abbildungen 2 und 3 dargestellt. Sie spiegeln die Zuverlässigkeit der durch verschiedene Ausgleichungen erhaltenen Koordinaten wider. Zwischen den einzelnen Lösungen haben sich keine wesentlichen Unterschiede ergeben.

### Literatur

- Barrodale, I. and Roberts, F.D.K. (1973): An improved algorithm for discrete L-1 approximation. SIAM, Journal of Num. Analysis, Vol. 10, No. 5, p. 839-848.
- Burstedde, J. und Cremer, K. (1986): Zur Ausgleichung geodätischer Netze nach der 1-Norm. Allgemeine Vermessungsnachrichten, No. 6, p. 228-234.
- Ebong, M.B. (1985): The Least Sum adjustment of a geodetic levelling network. Manuscripta Geodaeica, Vol. 10, p. 32-36.
- Fuchs, H. (1982): Contributions to the Adjustment by Minimizing the Sum of Absolute Residuals. Manuscripta Geodaeica, Vol. 7, p. 151-207.
- Hahn, M. und Bull, R. (1984): Ein Vergleich der L1- und L2-Norm am Beispiel Helmertransformations. Allgemeine Vermessungsnachrichten, No. 11-12. p. 440-450.
- Kampmann, G. (1986): Robuster Ausreißertest mit Hilfe der L1-Norm-Methode. Allgemeine Vermessungsnachrichten, No. 4, p. 139-147.
- Meissl, P. (1968): Überbestimmte Punkttransformation nach dem Prinzip der kleinsten maximalen Klaffung. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, Vol. 56. No. 4, p. 140-149.
- Schut, G. (1958-59): Construction of Orthogonal Matrices and their Application in Analytical Photogrammetry. Photogrammetria, Vol. XV, No. 4, p. 149.
- Somogyi, J. (1969): About the Direct Determination of the Elements of Rotation Matrix. Acta Geod. Geoph. Mont. Hung., Tom. 4(3-4), p. 451-458.
- Somogyi, J. (1987): Robust estimation of the parameters for three dimensional transformation. DGK, Reihe B, Heft Nr. 287, München 1988.
- Somogyi, J. and Kalmar, J. (1991): The Use of Robust Estimation in the Geodetic Data Processing. Acta Geod. Geoph. Mont. Hung., Vol. 26(1-4), p. 57-68.
- Thompson, E.H. (1958-59): An Exact Linear Solution of the Problem of Absolute Orientation. Photogrammetria, Vol. XV, No. 4, p. 163.

#### *Anschrift der Autoren:*

Somogyi, J., Dr. Prof.

Závoti, J., Dr.,

Geodetical and Geophysical Research Institute of the Hungarian Academy of Sciences, Muzeum n. 6-8, H-9401 Sopron.