Paper-ID: VGI_199105

Über die Auswirkung von Koordinatenänderungen in der Referenzstation bei relativen Positionierungen mittels GPS

Herbert Lichtenegger [1]

[1] *Abteilung für Landesvermessung und Landinformation, Institut für Angewandte Geodäsie und Photogrammetrie, Technische Universität Graz, Steyrergasse 30, 8010 Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **79** (1), S. 49–52

1991

BibTeX:

```
@ARTICLE{Lichtenegger_VGI_199105,
Title = {{\"U}ber die Auswirkung von Koordinaten{\"a}nderungen in der
   Referenzstation bei relativen Positionierungen mittels GPS},
Author = {Lichtenegger, Herbert},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen und
   Photogrammetrie},
Pages = {49--52},
Number = {1},
Year = {1991},
Volume = {79}
}
```

Literatur

Chesi, G., Grimm-Pitzinger, A.: GPS-Messungen in Tunnelnetz Roppen, Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie, 1989/3.

Grimm-Pitzinger, A.: Zuverlässigkeitskriterien für GPS-Messungen in Tunnelnetzen, (Deutsche) Zeitschrift für Vermessungswesen, 10/1990.

Kahmen, H., Schwarz, J., Wunderlich, T.: GPS-Messungen im Testnetz „Neue Welt", Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie, 1987/3.

Über die Auswirkung von Koordinatenänderungen in der Referenzstation bei relativen Positionierungen mittels GPS

von *H. Lichtenegger,* Graz

Summary

Based on vector- and matrix-calculus the paper presents a simple derivation of the formulas describing the effect of coordinate changes in the reference site on relative positioning with GPS.

Zusammenfassung

In der Arbeit werden auf einfache Weise jene Fomelsysteme hergeleitet, welche den Einfluß von Koordinatenänderungen in der Referenzstation bei relativen Positionierungen mittels GPS beschreiben.

1. Problemstellung

Bei relativen Positionierungen mittels GPS müssen zur Vermeidung von Rangdefekten die Koordinaten einer Referenzstation $\underline{X}_0$ vorgegeben werden und die Koordinaten einer benachbarten Station $\underline{X}_i$ folgen über den aus Beobachtungen abgeleiteten Basisvektor $\Delta\underline{X}_i$:

$$\underline{X}_i = \underline{X}_0 + \Delta\underline{X}_i \tag{1}$$

Alle in Gl. (1) auftretenden Vektoren seien vorerst in dem geozentrischen kartesischen Bezugssystem von GPS, d. h. im System WGS 84, ausgedrückt. In diesem Fall folgt bei festgehaltenem Basisvektor $\Delta\underline{X}_i$ unmittelbar, daß sich bei einer Änderung der Referenzkoordinaten um $d\underline{X}_0$ zwar die absolute Position der benachbarten Station um den gleichen Betrag ändert, die relative Position hingegen bleibt dadurch unbeeinflußt.

Andere Verhältnisse liegen vor, wenn von den dreidimensionalen kartesischen Koordinaten (X, Y, Z) auf die ellipsoidischen Koordinaten (φ, λ, h) übergegangen wird. Es gilt jetzt also, den funktionalen Zusammenhang zwischen den Änderungen der ellipsoidischen Koordinaten in der Referenzstation und jenen in einer benachbarten Station zu finden, wobei der zugehörige Basisvektor $\Delta\underline{X}_i$ wiederum festgehalten wird.

Das Problem wurde zwar bereits in (*Heiskanen* und *Moritz* 1967, Gl. (5—57)) im Zusammenhang mit Datumstransformationen gelöst, doch hat es bei relativen Punktbestimmungen mittels GPS neue Aktualität erlangt und wurde erst jüngst in (*Breach* 1990) wieder behandelt. Da letztere Arbeit aber wegen der skalaren Schreibweise eher schwer lesbar ist und eine Reihe von Druckfehlern aufweist, erscheint die Darstellung einer einfachen Ableitung der Lösung gerechtfertigt.

2. Lösung

Zwischen den dreidimensionalen kartesischen Koordinaten (X, Y, Z) und den ellipsoidischen Koordinaten (φ, λ, h) bestehen nach (*Heiskanen* und *Moritz* 1967, Gln. (5—5)) die bekannten Beziehungen:

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{N + h\} \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda \\ \{N + h\} \cdot \cos\varphi \cdot \sin\lambda \\ \left\{\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot N + h\right\} \cdot \sin\varphi \end{bmatrix} \tag{2}$$

φ	ellipsoidische Breite
λ	ellipsoidische Länge
h	ellipsoidische Höhe
N	Normalkrümmungshalbmesser
a, b	Achslängen des Bezugsellipsoides

Für die Gl. (2) kann auch leicht eine Differentialform angegeben werden, wenn die zu berücksichtigenden Koordinatenänderungen nur im Meterbereich liegen und daher sphärische Vereinfachungen zulässig sind.

$$d\underline{X} = \underline{R} \cdot d\underline{x} \tag{3}$$

$$d\underline{X} = \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix}; \underline{R} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \cdot \cos\lambda & -\sin\lambda & \cos\varphi \cdot \cos\lambda \\ -\sin\varphi \cdot \sin\lambda & \cos\lambda & \cos\varphi \cdot \sin\lambda \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{bmatrix}; d\underline{x} = \begin{bmatrix} a \cdot d\varphi \\ a \cdot \cos\varphi \cdot d\lambda \\ dh \end{bmatrix}$$

Die Komponenten des Vektors $d\underline{x}$ können in der sphärischen Näherung auch als Änderungen von ebenen Gauß-Krüger-Koordinaten (dx, dy) und der ellipsoidischen Höhe dh interpretiert werden. Die Spaltenvektoren der Matrix $\underline{R}$ stellen die Achse eines lokalen Tangentialkoordinatensystems dar. Die Matrix $\underline{R}$ ist daher orthogonal und die zu Gl. (3) inverse Beziehung lautet:

$$d\underline{x} = \underline{R}^T \cdot d\underline{X}\,. \tag{4}$$

Aus Gl. (1) folgt wegen des festgehaltenen Basisvektors die Differentialform:

$$d\underline{X}_i = d\underline{X}_o\,, \tag{5}$$

oder wegen $d\underline{X}_i - d\underline{X}_o = \underline{0}$ die Invarianz der relativen Position. Werden in die Gl. (5) auf beiden Seiten die der Gl. (3) entsprechenden Beziehungen für den Referenz- und den Nachbarpunkt eingesetzt, dann ergibt sich unter Berücksichtigung von Gl. (4) bereits die gesuchte Beziehung:

$$d\underline{x}_i = \underline{R}_i^T \cdot \underline{R}_o \cdot d\underline{x}_o = \underline{C} \cdot d\underline{x}_o\,. \tag{6}$$

Die Matrix $\underline{C}$, als Produkt der orthogonalen Matrizen $\underline{R}_i^T$ und $\underline{R}_o$, stellt keine Einheitsmatrix dar. Daraus folgt aber, daß bei Änderungen der ellipsoidischen Koordinaten der Referenzstation wegen $d\underline{x}_i - d\underline{x}_o \neq \underline{0}$ neben den absoluten auch die relativen ellipsoidischen Koordinaten einer Nachbarstation geändert werden.

Die Elemente der Matrix $\underline{C} = \{c_{nm}\}$ werden der Vollständigkeit halber nachfolgend spaltenweise angegeben. Sie können auch als partielle Differentialquotienten gedeutet werden, wobei sich der erste Index jeweils auf den benachbarten Punkt und der zweite Index auf den Referenzpunkt bezieht. Es gilt also beispielsweise $c_{\varphi h} = \partial \varphi_i / \partial h_o$.

Elemente der 1. Spalte von $\underline{C}$:

$$\begin{aligned} c_{\varphi\varphi} &= \sin\varphi_i \,.\, \sin\varphi_o \,.\, \cos(\lambda_i - \lambda_o) + \cos\varphi_i \,.\, \cos\varphi_o \\ c_{\lambda\varphi} &= \sin\varphi_o \,.\, \sin(\lambda_i - \lambda_o) \\ c_{h\varphi} &= -\cos\varphi_i \,.\, \sin\varphi_o \,.\, \cos(\lambda_i - \lambda_o) + \sin\varphi_i \,.\, \cos\varphi_o \end{aligned} \tag{7.1}$$

Elemente der 2. Spalte von $\underline{C}$:

$$\begin{aligned} c_{\varphi\lambda} &= -\sin\varphi_i \sin(\lambda_i - \lambda_o) \\ c_{\lambda\lambda} &= \cos(\lambda_i - \lambda_o) \\ c_{h\lambda} &= \cos\varphi_i \,.\, \sin(\lambda_i - \lambda_o) \end{aligned} \tag{7.2}$$

Elemente der 3. Spalte von $\underline{C}$:

$$\begin{aligned} c_{\varphi h} &= -\sin\varphi_i \,.\, \cos\varphi_o \,.\, \cos(\lambda_i - \lambda_o) + \cos\varphi_i \,.\, \sin\varphi_o \\ c_{\lambda h} &= -\cos\varphi_o \,.\, \sin(\lambda_i - \lambda_o) \\ c_{hh} &= -\cos\varphi_i \,.\, \cos\varphi_o \,.\, \cos(\lambda_i - \lambda_o) + \sin\varphi_i \,.\, \sin\varphi_o \end{aligned} \tag{7.3}$$

Bemerkt sei, daß mittels der Matrix $\underline{C}$ auch zwei benachbarte lokale Tangentialkoordinatensysteme aufeinander transformiert werden können.

Eine wesentliche Vereinfachung tritt bei kurzen Basislinien bis etwa 100 km auf. In diesem Fall werden die Differenzen $\Delta\lambda = (\lambda_i - \lambda_o)$ und $\Delta\varphi = (\varphi_i - \varphi_o)$ klein und die Matrix $\underline{C}$ geht mit der mittleren Breite φ über in:

$$\underline{C}^o = \begin{bmatrix} 1 & -\sin\varphi \,.\, \Delta\lambda & -\Delta\varphi \\ \sin\varphi \,.\, \Delta\lambda & 1 & -\cos\varphi \,.\, \Delta\lambda \\ \Delta\varphi & \cos\varphi \,.\, \Delta\lambda & 1 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Diese Matrix kann nach Einführung der Einheitsmatrix $\underline{E}$ und einer als Axiator bezeichneten schiefsymmetrischen Matrix $\underline{A}$ auch folgend geschrieben werden:

$$\underline{C}^o = \underline{E} + \underline{A}\,. \tag{9}$$

Wird die obige Beziehung in die Gl. (6) eingesetzt, so ergibt sich direkt die relative Lageänderung, welche eine differentielle Rotation von $d\underline{x}_o$ darstellt:

$$d\underline{x}_i - d\underline{x}_o = \underline{A} \,.\, d\underline{x}_o\,. \tag{10}$$

3. Abschließende Bemerkungen

In (*Breach* 1990) wurde in einem numerischen Beispiel für die Basislinie zwischen Greenwich und Paris nachgewiesen, daß Änderungen der kartesischen Koordinaten der Referenzstation um 5 m bereits zu relativen Änderungen der ellipsoidischen Koordinaten in der Größenordnung von 10^{-6} führen, welche zumindest im Bereich der Meßgenauigkeit liegen. Dabei sind die angenommenen Werte durchaus realistisch, da die im System WGS 84 benötigten geozentrischen Koordinaten der Referenzstation im allgemeinen nicht bekannt sind und daher aus einer GPS-Navigationslösung mittels Code-Entfernungen gewonnen werden müssen.

Aber auch in kleinräumigen Netzen können spürbare Verzerrungen in relativen ellipsoidischen Koordinaten auftreten, wenn etwa wie in Österreich beim Übergang auf das nationale Bezugsellipsoid unter anderem implizit ein geozentrischer Verschiebungsvektor von mehreren hundert Metern eingeführt werden muß. Da der Axiator eine Ortsfunktion darstellt, können diese Verzerrungen auch durch räumliche oder ebene Ähnlichkeitstransformationen von ellipsoidischen Landes- und ellipsoidischen GPS-Koordinaten nicht restlos eliminiert werden.

Literatur

Breach, M. C. (1990): The importance of accurate coordinates of a known station in precise relative positioning. Survey Review, Vol. 30, No. 238, P. 398—403.

Heiskanen, W. A., H. Moritz (1967): Physical Geodesy. W. H. Freeman and Company, San Francisco and London.