

Paper-ID: VGI\_199013



## Informationsorientierte Filterung ebener Kurven

Siegfried Meier <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Technische Universität Dresden, Sektion Geodäsie und Kartographie,  
Mommssenstraße 13, Dresden*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **78** (4), S.  
200–211

1990

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Meier_VGI_199013,  
Title = {Informationsorientierte Filterung ebener Kurven},  
Author = {Meier, Siegfried},  
Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {200--211},  
Number = {4},  
Year = {1990},  
Volume = {78}  
}
```



## Informationsorientierte Filterung ebener Kurven

von S. Meier, Dresden

### Zusammenfassung

Die Wirkung eines linearen Filters wird gewöhnlich mit Hilfe der Filtercharakteristik im Frequenzbereich beschrieben. Filtert man die Komponenten ebener stochastischer Kurven in Parameterdarstellung mit der Bogenlänge als Parameter, ist diese Charakteristik nicht mehr unmittelbar anschaulich. Auf der Grundlage eines Satzes über den wechselseitigen Informationsinhalt zufälliger Gaußscher Vektoren werden die informationsübertragenden Eigenschaften linearer Filter zur Formvereinfachung ebener Kurven (kartographischer Linien) untersucht und an Modellbeispielen demonstriert. In diesem Konzept beschreibt der Begriff „informationsorientierte Generalisierung“ die inhaltliche Seite (Formverwandtschaft), der Begriff „filterorientierte Generalisierung“ die technologische (rechentechnische) Seite ein und des selben Verfahrens.

### Summary

The effect of a linear filter is usually being described by means of the frequency response within the spectral domain. The above characteristic function is no longer obviously when the components of planar random curves in parameter representation with the curve length as the crucial parameter are smoothed. Therefore, the information transferring qualities of linear filters for the purpose of generalization of stochastically curved lines are based on a theorem of the relative information content of random Gaussian vectors and are illustrated by relevant examples. In this conception the notation "information-oriented generalization" is related to similarity in shape and the synonym "filter-oriented generalization" characterizes the technological aspect of one and the same procedure.

In einer Übersichtsarbeit zur automationsgestützten Generalisierung hat W. Weber (1982) die möglichen Verfahren in drei Klassen eingeteilt: informationsorientierte, filterorientierte und heuristische. Diese Einteilung könnte zu dem Schluß verführen, informationsorientierte und filterorientierte Generalisierung schließen einander aus. Indessen wird durch jede Generalisierungsmaßnahme Information verändert; entscheidend ist das Informationsmaß, das als Zielfunktion einem rechnergestützten Generalisierungsverfahren zugrunde gelegt wird.

Die von Weber so genannte informationsorientierte Generalisierung — angewandt auf die Generalisierung unregelmäßig geformter Oberflächen und Linien — beruht auf der Shannonschen Entropie. Dieses auf Probleme der Datenverarbeitung (Speicherung, Kodierung, Übertragung) zugeschnittene, zunächst rein statistische Informationsmaß muß a priori nicht notwendig mit der kartographisch-inhaltlichen Seite der Information korrespondieren, selbst wenn die kartographischen Inhalte („Zeichen“) statistisch strukturiert sind. Ideal für die Kartographie wären Informationsmaße, die sowohl der statistischen als auch der inhaltlichen Seite Rechnung tragen. Der inhaltliche Gesichtspunkt erfordert relative Informationsmaße — relativ in dem Sinne, daß eine Struktur in der Karte (im Folgemaßstab) Information über die gleiche Struktur in der Natur (im Grundmaßstab) enthält.

Nachfolgend wird ein relatives Informationsmaß für ebene stochastische Kurven (Linien, -netze, -scharen im Grund- und Folgemaßstab) angegeben. Voraussetzung ist die Parameterdarstellung ebener Kurven und ihre Deutung als Realisierungen von Vektorprozessen. Es werden die informationsübertragenden Eigenschaften zweier linearer phasentreuer Digitalfilter, angewandt auf Modell-Prozesse (Linienstrukturen mit unterschiedlichen spektralen Eigenschaften) untersucht. Ferner wird gezeigt, wie ein vorgegebener Filter durch Wahl der (äquidistanten) Tastweite (des Stützpunktabstandes der

diskreten Daten) informationsmaximierend bzw. -optimierend ausgelegt werden kann. In diesem Konzept beschreibt der Begriff „filterorientiert“ den technologischen, der Begriff „informationsorientiert“ den inhaltlichen, speziell den formgestaltenden Aspekt ein und des selben Verfahrens.

### 1. Parameterdarstellung ebener Kurven

Eine ebene stochastische Kurve der Länge T werde dargestellt durch

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, t \in [0, T] \tag{1}$$

mit der Bogenlänge t als Parameter, und zerlegt in Trend (Grobstrukturen)  $\mathbf{x}_T$  und stochastischem Rest (vorrangig mittlere und feine Strukturen)  $\mathbf{x}_S$ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_T + \mathbf{x}_S, \quad \mathbf{x}_T = \begin{bmatrix} x_{1,T} \\ x_{2,T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} x_{1,S} \\ x_{2,S} \end{bmatrix}. \tag{1a}$$

Die Darstellung (1) ist eindeutig: zu jedem t gehört genau ein Wertepaar  $\{x_1(t), x_2(t)\}$ . Sie ist außerdem den Digitalisierverfahren angepaßt: Linienverfolgung im Vektordatenformat oder Konturverfolgung im Rasterdatenformat. Die Zerlegung (1a) soll insbesondere so erfolgen, daß die stochastischen Komponenten  $x_{1,S}, x_{2,S}$  (wenigstens approximativ) stationär und gaußsch ausfallen, ggf. auf ihre Mittelwerte zentriert sind, und daß nur  $x_{1,S}, x_{2,S}$  mittels linearer Filterung formvereinfacht werden. Eine Änderung der Information erfolgt dann nur am stochastischen Anteil  $\mathbf{x}_S = \mathbf{x}$  als Realisierung eines Vektorprozesses  $\mathbf{X}$  mit den skalaren Komponenten  $X_1, X_2$ . Seine Momente 2. Ordnung sind

$$\mathbf{C}_{XX} := \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_{XX} := \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

$C_{ij} = C_{ij}(\tau), \tau := t'' - t'; i, j = 1, 2$  bezeichnen die Autokovarianzfunktionen (AKF;  $i = j$ ) und Kreuzkovarianzfunktionen (KKF;  $i \neq j$ ),  $S_{ij}(\omega)$  die Spektraldichten ( $i = j$ ) und Kreuzspektraldichten ( $i \neq j$ ) der Komponenten  $X_1, X_2$ .

### 2. Lineare Filterung ebener Kurven

Wird der Prozeß  $\mathbf{X}$  mit stationären Gaußschen Komponenten  $X_1, X_2$  linear transformiert, entsteht ein Prozeß  $\mathbf{Y}$ , dessen Komponenten  $Y_1, Y_2$  ebenfalls stationär und gaußsch sind mit Momenten 2.O.  $\mathbf{C}_{YY}$  bzw.  $\mathbf{S}_{YY}$  von gleicher Struktur wie (2). Außerdem sind  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$  paarweise stationär miteinander verbunden mit entsprechenden KKF  $\mathbf{C}_{XY}, \mathbf{C}_{YX}$  bzw. Kreuzspektraldichten  $\mathbf{S}_{XY}, \mathbf{S}_{YX}$  (sog. gemischte Momente 2.O.).

In der Digitalkartographie benutzt man zur Linienglättung im Vektordatenformat vorzugsweise phasentreue Filter in Form gleitender Mittel

$$\left. \begin{aligned} y_k &= \sum_{l=-N}^{+N} g_{k+l} x_{k+l}, \quad N = 0, 1, 2, \dots \\ y_k &= y(t_k), \quad x_k = x(t_k) \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

mit Gewichtskoeffizienten  $\{g_{k+1}\}$ , die getrennt auf beide Komponenten angewandt werden (eindimensionale Filterungen).

Tabelle 1 enthält zwei Beispiele: einen reinen Glättungsfilter mit monoton abnehmender Filtercharakteristik  $G$  (Tiefpaß) und einen Glättungsfilter mit Amplitudenverstärkung im niederfrequenten Bereich (Tiefpaß mit Restauration), der im hochfrequenten Bereich glättet und dominierende Strukturen (geringfügig) betont (Abb. 1). Beide Filter werden zur Modellrechnung benutzt.

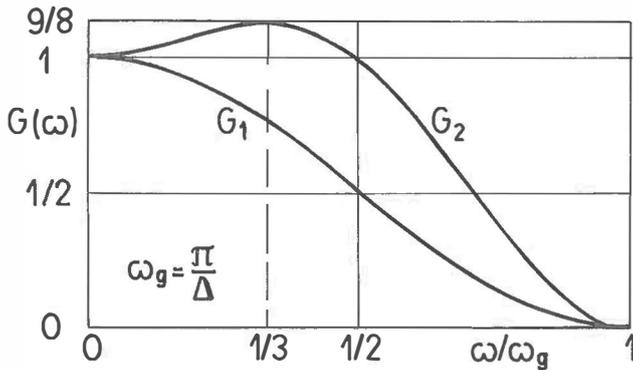


Abbildung 1: Filtercharakteristiken der in Tabelle 1 angegebenen phasentreuen Digitalfilter:  $G_1$  (Tiefpaß),  $G_2$  (Tiefpaß mit Restauration).  $\Delta = \pi/\omega_g$  ist die Tastweite lt. Abtasttheorem, wobei unbegrenzte Spektraldichten bei  $\omega = \omega_g$  „abgeschnitten“ werden.

Filtertyp	$g_{k+1}$	$G(\omega)$
Tiefpaß	$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$	$\cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)$
Tiefpaß mit Restauration	$-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}$	$3\cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right) - 2\cos^4\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)$
Zweite Momente	ungefilterter Prozeß	gefilterter Prozeß

Spektraldichten	$S_{XX}(\omega)$	$S_{YY}(\omega) = G^2(\omega) S_{XX}(\omega)$
Kreuzspektraldichten	$S_{XY}(\omega) = S_{YX}(\omega) = G(\omega) S_{XX}(\omega)$	
Varianzen	$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) d\omega, \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(\omega) S_{XX}(\omega) d\omega$	
Kreuzkovarianzen	$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) S_{XX}(\omega) d\omega$	

Tabelle 1: Zwei phasentreue lineare Filter (gleitende Mittel) mit Filtervorschrift (3), äquidistantem Stützpunktabstand (Tastweite)  $\Delta = t_{k+1} - t_k$ , Gewichtskoeffizienten  $g_{k+1}$ , reeller Filtercharakteristik  $G(\omega) \geq 0$ . Änderung der Spektraldichten und der Varianzen/Kovarianzen durch lineare Filterung.

Die Beziehungen zwischen den Spektraldichten der ungefilterten und der gefilterten Prozeßrealisierungen sind in Tabelle 1 angegeben. Sie gelten für beide Komponenten  $i = j = 1, 2$ . Die zugehörigen AKF/KKF gewinnt man nach dem Theorem von *Wiener/Chintschin* mittels inverser *Fourier*-Transformation; speziell sind die Varianzen/Kreuzkovarianzen

$$\sigma_x^2 = C_{XX}(0), \sigma_y^2 = C_{YY}(0), \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = C_{XY}(0) = C_{YX}(0) \tag{4}$$

Integrale über die zugehörigen Spektraldichten siehe Tabelle 1.

### 3. Relative Information

Wenn die Komponenten von  $X, Y$  paarweise stationär miteinander verbunden sind, dann bedeutet dies, daß in  $Y$  Information über  $X$  (und umgekehrt) enthalten ist. Zur Berechnung dieser wechselseitigen bzw. relativen Information dient der folgende, von *Gelfand* und *Jaglom* (1957) stammende

**Satz:** Die in einem von zwei gaußschen Zufallsvektoren  $X, Y$  bezüglich des anderen enthaltene Information  $J(X, Y)$  wird durch die Formel

$$J(X, Y) = \frac{1}{2} \log \frac{\det A \cdot \det B}{\det C} \tag{5}$$

angegeben.  $A, B$  und  $C$  bezeichnen dabei die Matrizen der zweiten Momente von  $X, Y$  und  $Z = (X, Y)$ , die als nicht ausgeartet vorausgesetzt werden.

Im einfachsten Fall zweier eindimensionaler Zufallsgrößen  $X, Y$  geht die Formel (5) in

$$J(X, Y) = -\frac{1}{2} \log [1 - r^2(X, Y)] \tag{5a}$$

über, wobei  $r(X, Y)$  der Korrelationskoeffizient zwischen  $X$  und  $Y$  ist. *Beide* Größen,  $r$  und  $J$ , messen die gegenseitige Abhängigkeit von  $X$  und  $Y$ . Insbesondere ist  $J = 0$ , wenn  $r = 0$ , und  $J \rightarrow \infty$  für  $r \rightarrow \pm 1$ , d. h., wenn  $Y$  eine lineare Funktion von  $X$  ist.

Nun wenden wir den zitierten Satz auf ebene stochastische Kurven an. Die Vektoren  $X(t'), Y(t'')$  bilden bei festen  $t', t''$  jeweils Ensembles von Punktpaaren im Abstand  $\tau = t'' - t'$  auf dem Bogen. Die Matrizen in Formel (5) sind

$$\begin{aligned} A &= C_{XX}, & B &= C_{YY}, \\ C &= \begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} \\ C_{XY}^T & C_{YY} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{6}$$

Damit kann  $J[X(t'), Y(t'')]$  für beliebige  $\tau = t'' - t', \tau \in [0, T]$  berechnet werden. Von kartographischem Interesse ist insbesondere der Fall  $t'' = t', \tau = 0$ , d. h. jene Information, die in einem gefilterten Punkt über den ungefilterten, gemittelt über alle Punkte der Kurve(n), enthalten ist.

Wir beschränken uns ferner auf den Sonderfall, daß

$$|\sigma_{x_1 x_2}| \ll \sigma_{x_1}^2, \sigma_{x_2}^2, |\sigma_{y_1 y_2}| \ll \sigma_{y_1}^2, \sigma_{y_2}^2.$$

Dann sind die Matrizen (6) mit den Bezeichnungen (4)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sigma_{y_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{y_2}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & 0 & \sigma_{x_1 y_1} & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2}^2 & 0 & \sigma_{x_2 y_2} \\ \sigma_{x_1 y_1} & 0 & \sigma_{y_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2 y_2} & 0 & \sigma_{y_2}^2 \end{bmatrix}, \quad (6a)$$

und eingesetzt in Formel (5) erhält man die gegenseitige Information

$$J(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -\frac{1}{2} \log [(1 - r_{x_1 y_1}^2) (1 - r_{x_2 y_2}^2)] \quad (7)$$

als Funktion der Kreuzkorrelationen  $r_{x_1 y_1}$ ,  $r_{x_2 y_2}$  mit

$$r_{xy}^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = \frac{\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) S_{XX}(\omega) s \omega \right\}^2}{\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) d\omega \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(\omega) S_{XX}(\omega) d\omega \right\}} \quad (7a)$$

für beide Komponenten  $i, j = 1, 2$ . Für phasentreue Filter mit  $G \geq 0$  wird  $\sigma_{xy} > 0$  und es gilt  $r_{xy} = +\sqrt{r_{xy}^2}$ . Sind insbesondere die Spektraldichten von  $X_1, X_2$  identisch und werden die Realisierungen beider Komponenten mit der gleichen Vorschrift gefiltert, wird

$$J(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -\frac{1}{2} \log [(1 - r_{xy}^2)^2] = \log \frac{1}{1 - r_{xy}^2}. \quad (7b)$$

Analog zum eindimensionalen Fall (5a) wird die Verwandtschaft der gefilterten mit der ungefilterten Kurve und damit auch die in  $\mathbf{Y}$  über  $\mathbf{X}$  enthaltene Information über die Kreuzkorrelation  $r_{xy}$  (beider Komponenten) gemessen. Daher ist die statistische Information (7) mit dem Sonderfall (7b) zugleich inhaltlich deutbar: sie erweist sich als eine *relative Forminformation*. Im konkreten Fall hängt sie sowohl von den spektralen Eigenschaften der ungefilterten Kurve(n) ( $S$ ) als auch von der Charakteristik des linearen Filters ( $G$ ) ab; vgl. die Integraldarstellung (7a). Insbesondere kann sie über Filterwahl und -anpassung gesteuert werden. Das wird nachfolgend an einigen Beispielen gezeigt.

#### 4. Ergebnisse von Modellrechnungen

Die Komponenten  $X_1(t), X_2(t)$  bzw. die zu filternden Realisierungen  $x_1(t), x_2(t)$  sollen durch Modell-Prozesse mit AKF und Spektraldichten in Tabelle 2 repräsentiert sein.

Gefiltert werde mit dem Tiefpaß in Tabelle 1. Kartographisch bedeutsam ist besonders das Spektraldichtemodell mit dominierendem Bandbereich (Abb. 2); z. B. überwiegen bei Wasserläufen, Verkehrswegen im Bergland, Höhenlinien usw. — nach entsprechender Trendbeseitigung — Wellungen auf einem mittleren Wellen-

# SOKKISHA

## Die Totalstationen mit eingebauter Datenregistrierung

Gleichzeitige Anzeige von  
Horizontal- und Vertikalwinkel  
sowie Schrägdistanz

Höhendifferenz, Koordinaten  
und Absteckung im Feld

Datenweitergabe über  
Schnittstelle und  
IC-Karte mit 32 KB



### Systeme

mit lückenlosem Informationsfluß  
SET C - Vermessungssoftware  
CAD Arbeitsplatz - Plotter

### Service

Sokkisha und Kern Geräte

# Artaker<sup>®</sup>

Artaker Büroautomation Handelsgesellschaft mbH.  
1052 Wien, Kettenbrückengasse 16, Tel. 0222/58 805-0, Fax 56 56 51

Modell	$C(\tau)$	$S(\omega)$
Breitbandrauschen	$\sigma^2 \frac{\sin \omega_g \tau}{\omega_g \tau}$	$\sigma$ für $ \omega  \geq \omega_g$ $\sigma^2 \pi / \omega_g$ für $ \omega  < \omega_g$
Weißes Rauschen	$S_0 \delta(\tau)$	$S_0 (-\infty < \omega < +\infty)$
Rotes Rauschen (Gauß-Modell)	$\sigma^2 e^{-\alpha^2 \tau^2}$	$\frac{\sigma^2 \sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\omega^2 / 4\alpha^2}$
Rauschen mit dominierendem Bandbereich (Gauß-Kosinus-Modell)	$\sigma^2 e^{-\alpha^2 \tau^2} \cos \beta \tau$	$\frac{\sigma^2 \sqrt{\pi}}{2\alpha} (e_1 + e_2)$ $e_{1,2} = \exp[-(\omega \pm \beta)^2 / 4\alpha^2]$

Tabelle 2: Autokovarianzfunktion  $C(\tau)$  und Spektraldichte  $S(\omega)$  von Modellprozessen. Konstante Parameter: Varianz  $\sigma^2$ , obere Grenzfrequenz  $\omega_g > 0$ , Spektraldichte  $S_0 > 0$ , Abklingparameter  $\alpha > 0$ , Frequenzparameter  $\beta > 0$ .

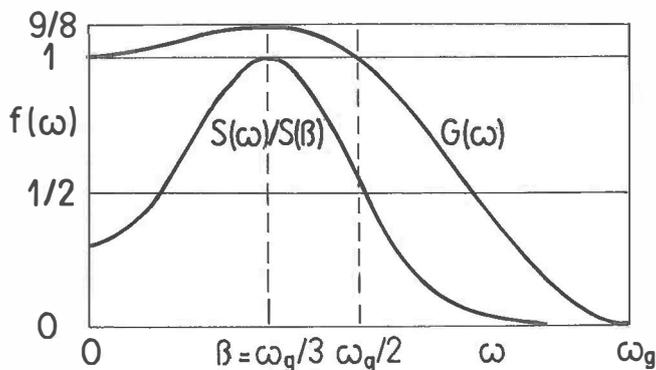


Abbildung 2: Anpassung der Filtercharakteristik  $G$  (Tiefpaß mit Restauration, Tabelle 1) an die Spektraldichte  $S$  (dominierender Bandbereich, Tabelle 2) der zu filternden Kurve(n).

zahlbereich. Realisierungen mit dieser Eigenschaft werden zusätzlich einer Glättung mit Restauration dieser typischen Formen (Tab. 1, Abb. 1) unterworfen. Paßt man die Lage des Maximums der Filtercharakteristik  $G$  der Lage des Maximums der Spektraldichte  $S$  an, so ist sichergestellt, daß genau die dominierenden Formen (geringfügig) betont werden (Abb. 2). Die Tastweite  $\Delta$  der Digitalisierung auf dem Bogen ist dabei mit

$$\Delta = \Delta_F \approx \pi/3\beta \tag{8}$$

eindeutig vorgegeben. Diese Filterung kann man als *formtreu* bezeichnen, und sie erweist sich im Falle eindimensionaler Kurven bei einem Parameterverhältnis  $\alpha/\beta \approx 1/3$  sogar als *längentreu* (Meier, 1989).

$r_{xy}^2$	Breitbandrauschen	Weißes Rauschen
Tiefpaß	$\frac{2(1 + s_1)^2}{3 + 4s_1 + s_2}$	$\frac{1}{\sqrt{2/3}}$ für $\Delta = \sigma$ für $\Delta > \sigma$
$r_{xy}^2$	Gauß-Kosinus-Modell	Gauß-Modell
Tiefpaß	$\frac{(2 + E_1)^2}{6 + 4E_1 + E_2}$	$\frac{(2 + e_1)^2}{6 + 4e_1 + e_2}$
Tiefpaß mit Restauration	$\frac{(6 + 2E_1 - E_2)^2}{46 + 20E_1 - 8E_2 - 4E_3 + E_4}$	
Abkürzungen	$s_n = \frac{\sin(n\Delta\omega_g)}{n\Delta\omega_g}$ ; $e_n = 2e^{-(n\alpha\Delta)^2}$ ; $n = 1, 2$ $E_n = 2e^{-(n\alpha\Delta)^2} \cos(n\beta\Delta)$ ; $n = 1, 2, 3, 4$ .	

Tabelle 3: Quadrate der Kreuzkorrelation  $r_{xy}^2$  zwischen der ungefilterten und der gefilterten Prozeßrealisierung in ein und dem selben Punkt, berechnet für Filter in Tabelle 1, die auf Modell-Prozesse von Tabelle 2 wirken.

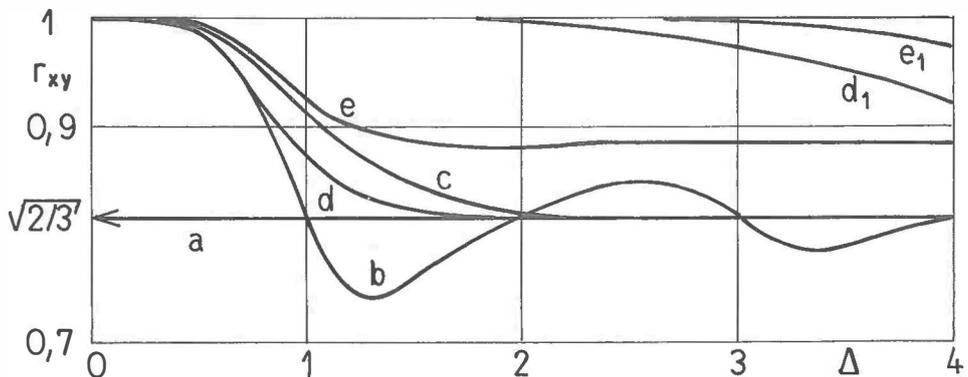


Abbildung 3: Kreuzkorrelation  $r_{xy}$  zwischen der ungefilterten ( $x = x(t)$ ) und der linear gefilterten Kurve ( $y = y(t)$ ) in ein und dem selben Punkt, als Funktion der Tastweite (Stützpunktabstand)  $\Delta = t_{k+1} - t_k$ .  
 Tiefpaß (Tabelle 1), angewandt auf die Prozeß-Modelle (Tabelle 2):  
 a) weißes Rauschen (Maßeinheit von  $\Delta$  beliebig),  
 b) Breitbandrauschen (mit oberer Grenzwellenzahl  $\omega_g$ ;  $\Delta$  in Einheiten von  $\pi/\omega_g$ ),  
 c) geformtes Rauschen (Gauß-Modell der AKF mit Abklingparameter  $\alpha > 0$ ;  $\Delta$  in Einheiten von  $1/\alpha$ ),  
 d) Rauschen mit dominierendem Bandbereich (Gauß-Kosinus-Modell der AKF mit Abklingparameter  $\alpha > 0$ ; Frequenzparameter  $\beta > 0$ ; Sonderfall  $\beta = \alpha$ ;  $\Delta$  in Einheiten von  $1/\alpha = 1/\beta$ ),  
 d<sub>1</sub>) Modell d), jedoch  $\alpha = 0,113 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\beta = 0,314 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\Delta$  in mm.  
 Tiefpaß mit Restauration (Tabelle 1), angewandt auf:  
 e) Modell d) mit Parametern wie in d),  
 e<sub>1</sub>) Modell d) mit Parametern wie in d<sub>1</sub>).

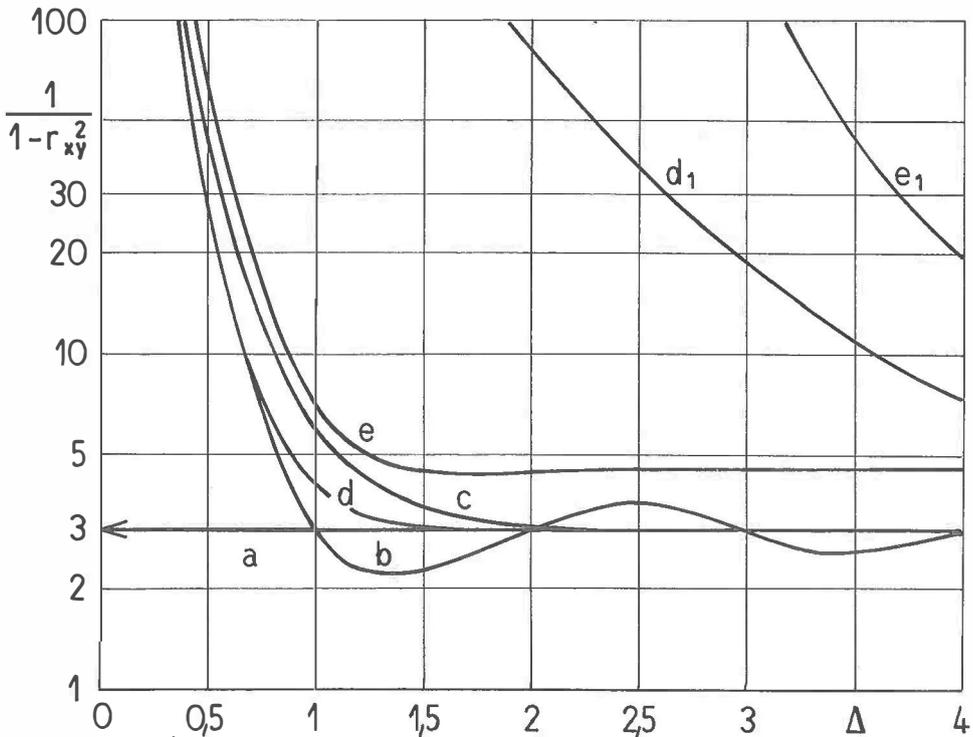


Abbildung 4: Die zu den  $r_{xy}$  in Abbildung 3a bis e gehörenden transformierten Größen  $1/(1-r_{xy}^2)$ . [Einheiten von  $\Delta$  wie in Abbildung 3.]

Die Integrale in (7a) sind mit den angegebenen Modellfunktionen geschlossen lösbar. Die Ergebnisse, Quadrate der Kreuzkorrelation  $r_{xy}^2$ , sind in Tabelle 3 aufgeführt und die  $r_{xy}$  sind als Funktion der Tastweite  $\Delta$  in Abb. 3 dargestellt. Abb. 4 zeigt die transformierten Größen  $1/(1-r_{xy}^2)$  des Sonderfalles (7b) im logarithmischen Maßstab. Die Kurven in Abb. 3 und Abb. 4 sind natürlich einander ähnlich. Anschaulicher als J ist wohl die normierte Größe  $r_{xy}$ . Digitalfilter mit  $\Delta > 0$  liefern  $r_{xy} \in (0, 1)$ , daher auch endliche  $J \in (0, \infty)$ .

In der Regel sind Filter zu bevorzugen bzw. die Tastweiten vorgegebener Filter so zu wählen, daß  $r_{xy}$  möglichst groß wird, d: h., welche die Formverwandtschaft/information maximieren. Filter mit dieser Zielstellung kann man als *informationsorientiert* bezeichnen. Natürlich steht dem entgegen, daß der gewünschte Glättungseffekt keine beliebig kleinen  $\Delta$  zuläßt, und im Anwendungsfall muß man zwischen beiden Forderungen abwägen.

Obwohl die Theorie entartete Varianz — Kovarianz — Matrizen ausschließt, erhält man für den verallgemeinerten Prozeß des weißen Rauschens bei formal richtiger Rechnung ein durchaus plausibles Resultat: im Beispiel Abb. 3a ist  $r_{xy} = \sqrt{2/3}$  für beliebige  $\Delta > 0$ , wohl wegen  $C_{xx}(\tau) \equiv 0$  für alle  $\tau > 0$  bzw.  $S_{xx} \equiv S_0$  für alle  $\omega \in (-\infty, +\infty)$ . Die Beispiele Abb. 3b, c, d für geformtes Rauschen ergeben  $r_{xy} \geq \sqrt{2/3}$ , abnehmend mit wachsendem  $\Delta$ ; für genügend große  $\Delta$  streben die  $r_{xy}$  gegen den konstanten Wert  $\sqrt{2/3}$  des gefilterten weißen Rauschens. Das Beispiel Tiefpaß mit Restauration, der auf Realisierungen mit dominierendem Bandbereich wirkt, ergibt deutlich größere  $r_{xy}$  (Abb. 3e,  $e_1$ ) als der reine Tiefpaß (Abb. 3d,  $d_1$ ), wohl wegen ähnlicher Form von Spektraldichte S und Filtercharakteristik G (vgl. Abb. 2). Im Falle der „formtreuen Filte-



## Wir bringen Bewegung ins Spiel

Bewegung! Das ist es, was noch fehlte. Jetzt kommt sie! Von Geodimeter. Denn das Geodimeter 460 positioniert sich von allein. Entsprechend Ihren Vorgaben von Servomotoren gesteuert. Dabei stehen Ihnen verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung, die zu erfassenden Punkte anzuvisieren. Aber welche Sie auch wählen, das Geodimeter 460 nimmt Ihnen einige Arbeit ab. Informationen und Vorführung "frei Haus".

Geodimeter Ges.m.b.H.  
Vivenotgasse 48  
A-1120 Wien  
Tel. (0222) 813 08 50  
Fax: 813 08 49

**Weltweit  
bewährte**



**Vermessungstechnik aus Schweden.**

rung“,  $\Delta = \Delta_F$  gemäß (8), liegt  $r_{xy}(\Delta_F)$  schon sehr nahe Eins: in den Beispielen Abb. 3e,  $e_1$  bei  $\approx 0,89$ ;  $\approx 0,99$ . Filter mit solcher Eigenschaft verdienen den Vorzug gegenüber reinen Glättungsfiltern.

Abschließend sei noch bemerkt, daß sich die  $r_{xy}(\Delta)$  ähnlich wie  $C_{xx}(\tau)$  verhalten, mit Ausnahme der Grenzwerte

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} r_{xy}(\Delta) > 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} C_{xx}(\tau) = 0;$$

z. B. Abb. 3b gedämpft schwingend mit gleichabständigen Durchgängen durch  $r_{xy} = \sqrt{2/3}$  analog der Spaltfunktion als zugehöriger AKF mit gleichabständigen Nullstellen. Auch die Kurven 3d, 3e schwingen (in der Abb. 3 nicht mehr sichtbar) geringfügig unter die Grenzwerte  $\sqrt{2/3}$ ,  $\sqrt{18/23}$ .

### 5. Schlußfolgerungen

Zur rechnergestützten Generalisierung ebener stochastischer Kurven und ebener Figuren mit stochastischem Rand verfügen wir heute schon über eine breite Palette verschiedenartiger, mehr oder weniger vollkommener Verfahren, die in Zukunft sicher noch bereichert wird. Fischer (1982) betonte u. a. den Grundsatz, „auch die bisher benutzten Verfahren weiter oder auch noch einmal neu auszuloten und einer höherwertigen Verwendung zuzuführen“. Manche der sog. Ad-hoc-Lösungen bedürfen noch der mathematischen Fundierung und praxisorientierten kartographischen Anpassung. Obwohl die „klassische“ lineare Filterung (gleitende Mittelung von Vektordaten) gut fundiert, leicht durchschau- und implementierbar ist, wurde sie in diesem Beitrag aus der Sicht der Informationsübertragung noch einmal behandelt. Speziell wurde ein wenig bekannter, aber bedeutungsvoller Satz aus der Informationstheorie zufälliger Funktionen/Vektoren auf ebene Kurven (Skelette kartographischer Linien) in Parameterdarstellung angewandt. In diesem Konzept ist die Trennung der Generalisierungsverfahren in sog. informationsorientierte und filterorientierte aufgehoben.

Nur unter Voraussetzung der Normalverteilung können praktisch verwertbare Endformeln angegeben werden. Stationarität voraussetzen ist zwar nicht notwendig, gewährt aber die bekannten Vorteile der Rechnung im Spektralbereich. Sowohl im Ansatz als auch im Anwendungsfall erfordern diese Voraussetzungen, einen geeigneten Trend abzuspalten. Da Gaußsche Vektoren und Funktionen durch ihre Momente 1. und 2. Ordnung vollständig beschrieben werden, ferner das 1. Moment lediglich das mittlere Niveau festlegt, kommen in den Informationsgrößen auch nur Momente 2. O. vor; im Sonderfall höchstens schwach korrelierter Komponenten der Parameterdarstellung sind es die Kreuzkorrelationskoeffizienten zwischen den gefilterten und ungefilterten Komponenten. Damit wird die wechselseitige (statistische) Information über die Formverwandtschaft der gefilterten und ungefilterten Kurve(n) gemessen und erweist sich deshalb als *relative Forminformation*, in welcher die Eigenschaften der zu filternden Kurve(n) und des Filterverfahrens miteinander verknüpft sind.

Anzustrebende Linienglättung einerseits (z. B. durch Vorgabe der Filtercharakteristik; großer Stützpunktstand) und Informationsmaximierung (kleiner Stützpunktstand) andererseits schließen einander aus. Ähnlich wie bei (rechnergestützten) Kartennetzentwürfen wird man auch hier *vermittelnde* Lösungen anstreben müssen. Als günstig erweisen sich z. B. Tiefpässe mit Restauration: sie glätten unwesentliche und betonen typische Strukturen, wobei ein verhältnismäßig hoher Grad an Formverwandtschaft/-information erzielt wird.

**Literatur**

*Fischer, E.-U.*: Digitale Signalverarbeitung in der rechnergestützten Kartographie. Dt. Geod. Kommiss., R. C., H. 278, Frankfurt a. M. 1982.  
*Gelfand, I. M.; Jaglom, A. M.*: Über die Berechnung der Menge an Information über eine zufällige Funktion, die in einer anderen zufälligen Funktion enthalten ist. Uspechi mat. nauk XI (73), 1957. Dt. Übers. in:  
*Grell, H.* (Hrsg.): Arbeiten zur Informationstheorie II. VEB Dt. Verl. d. Wiss., Berlin 1958, S. 7—56.  
*Meier, S.*: Formtreue Filterung. Vermessungstechnik, Berlin 37 (1989) 3, S. 97—99.  
*Weber, W.*: Automationsgestützte Generalisierung. Nachr. Karten- u. Vermessungswesen, R. I., H. 88, Frankfurt a. M. 1982, S. 77—109.

Manuskript eingelangt im Juli 1990.

# Aus der Praxis — für die Praxis

Die vierte Auflage ist erschienen.



Von den Autoren Dipl.-Ing. Johann Häsler und Dipl.-Ing. Herbert Wachsmuth mit Beratung durch Prof. Dr.-Ing. E. Bartsch. Vollkommen überarbeitet und wesentlich erweitert. Das Buch ist noch übersichtlicher, noch informativer, noch umfangreicher geworden.

Die Formelsammlung für den Vermessungsberuf nimmt seit vielen Jahren einen festen Platz in der geodätischen Fachliteratur ein. Sie gibt dem Anwender im vermessungstechnischen Beruf und dessen Randbereichen in übersichtlicher und kompakter Form mathematische Grundlagen und praxisbezogene Formeln in die Hand.

Sie ist eine unentbehrliche Hilfe für den Praktiker, für die Lehrenden und Lernenden auf allen Ausbildungsebenen.

Bei der schnellen Fortentwicklung von Techniken und Methoden auch unter Berücksichtigung der Anforderungen der EDV bei der Bearbeitung geodätischer Aufgaben soll die Formelsammlung sowohl dem Ersterwerber eine wertvolle Hilfe zur Fort- und Weiterbildung sowie zum Verständnis von Techniken und Methoden sein als auch denjenigen dienen, die frühere Auflagen erfolgreich genutzt haben und sich jetzt auf den neuesten Stand bringen wollen.

144 x 100 mm, 528 Seiten,  
396 Zeichnungen, kartoniert

**öS 308,90**  
(zzgl. Versandkosten)

Zu beziehen bei



A-1011 Wien · Schottengasse 7/5 · Postfach 485  
 Telefon 5330238 5330239  
 5353223 5353476  
 Fax 535341028 · Telex 114506 spriw a