

Paper-ID: VGI\_198902



## Über gefährliche Flächen, Räume und “Linien“ in der Photogrammetrie

Karl Killian <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Hadikgasse 40, 1140 Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **77** (1), S. 15–20

1989

BibT<sub>E</sub>X:

```
@ARTICLE{Killian_VGI_198902,  
Title = {{\U}ber gef{\a}hrliche Fl{\a}chen, R{\a}ume und ‘‘Linien‘‘ in der  
Photogrammetrie},  
Author = {Killian, Karl},  
Journal = {{\O}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {15--20},  
Number = {1},  
Year = {1989},  
Volume = {77}  
}
```



## Über gefährliche Flächen, Räume und „Linien“ in der Photogrammetrie

Von Karl Killian, Wien

Wir beginnen mit einer ganz einfachen Überlegung: In der Luftbildmessung liegt sehr häufig ein ebenes Gelände vor, und die Aufnahmebasis  $O_1, O_2$  ist im allgemeinen ungefähr horizontal. Die innere Orientierung ist bekannt. Die gegenseitige Orientierung zweier Luftbilder ist bekanntlich im allgemeinen ohne Bedenken möglich.

Wir stellen die Frage: Gibt es in dem ebenen Gelände Punkte, die, falls sie zur gegenseitigen Orientierung zweier Luftbilder herangezogen werden, Orientierungsunsicherheiten ergeben, die ebenso groß sind wie die Orientierungsunsicherheiten zweier Luftbilder, die von gefährlichen Flächen stammen? Nach einer flüchtigen Überlegung heißt die Antwort „Nein“. Daß diese Antwort nicht richtig sein kann, erkennt man zunächst sofort aus Fig. 1. Die Punkte  $O_1, O_2$  sind die Zentren der Aufnahmen; die durch sie gehende Kreisschar stellt die gefährlichen Zylinder dar. Diese schneiden das ebene Gelände  $G$  in den Geradenpaaren  $a, a'$ ;  $b, b'$ ;  $c, c'$ ;  $d, d'$ ; ... Liegen die Punkte zur gegenseitigen Orientierung nur auf jeweils einem dieser Geradenpaare, so besteht offenbar obige Unsicherheit. Linien dieser Art wollen wir „gefährliche Linien“ nennen.

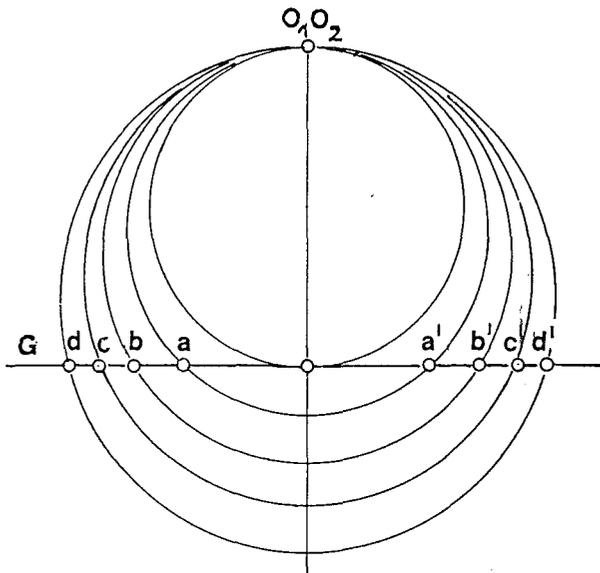


Fig. 1

Außerdem gibt es für dieselbe Basis und für dasselbe ebene Gelände eine zunächst noch unübersehbare Anzahl von gefährlichen Linien, die dieselbe Eigenschaft haben wie die genannten Geradenpaare. Denn, denken wir uns einen orthogonalen Kegel, im Auf-, Grund- und Kreuzriß dargestellt (Fig. 2), so erkennt man, daß die gefährlichen Linien Parabelscharen sind. Wir halten die Basis und die Geländeebene fest. Ferner halten wir auch den Öffnungswinkel  $\alpha$  des orthogonalen Kegels fest. Verschieben wir die Spitze  $S$  des Kegels, so ergibt sich eine Schar kongruenter Parabeln. Halten wir  $S$  fest und ändert man  $\alpha$ , so ergibt sich eine Schar nicht-kongruenter Parabeln. In Fig. 2 ist ein nach rechts geöffneter orthogonaler Kegel dargestellt. Dieselben Überlegungen gelten natürlich für einen nach links geöffneter orthogonaler Kegel [1] [3a; b] [5] [6].

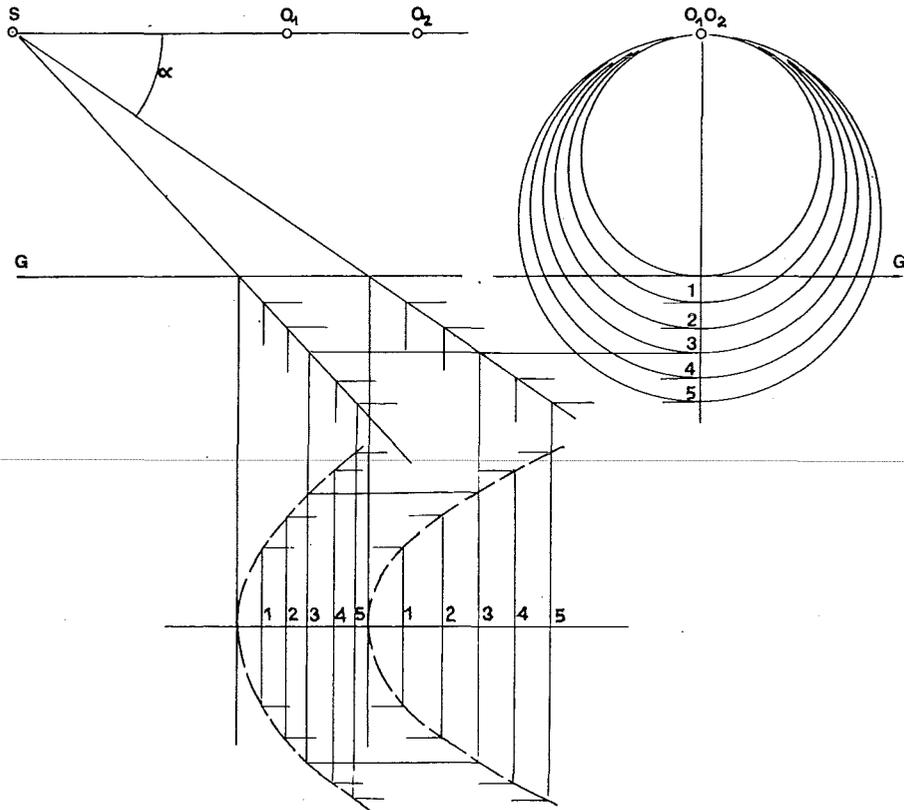


Fig. 2

Ferner gibt es für dieselbe Basis und für dasselbe ebene Gelände weitere gefährliche Linien. Wir betrachten das orthogonale Hyperboloid. Liegen die Achsen der Kehlellipse in der x- bzw. y-Achse, so liegt die z-Achse in der Hyperboloid-Achse.

Die Gleichung des einschaligen Hyperboloides lautet bekanntlich:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

Zur klaren Darstellung der Beziehungen konstruieren wir ein orthogonales Hyperboloid im Grund- und Aufriß. Wir wählen die Halbachsen der Kehlellipse: Große Halbachse a, kleine Halbachse b.

Die Bedingung für die Orthogonalität lautet [4 S.180] [3 a) S. 338]:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0 \quad (2)$$

Daraus berechnen wir c. Somit ergibt sich  $\alpha$  (=Winkel zwischen z-Achse und Haupterzeugenden) konstruktiv und durch Rechnung:  $\tan \alpha = b/a$ . Analog bestimmen wir den Winkel  $\beta$ . Die Brennpunkte der im Grund- und Aufriß darzustellenden Hyperbeln ergeben sich bekanntlich mit Hilfe der gezeichneten Kreisbögen. Somit können die für den Grund- und Aufriß darzustellenden Hyperbeln konstruiert werden. (Rechnung:  $x=0$  bzw.  $y=0$  in Gl. 1). Die Kreisschnitte

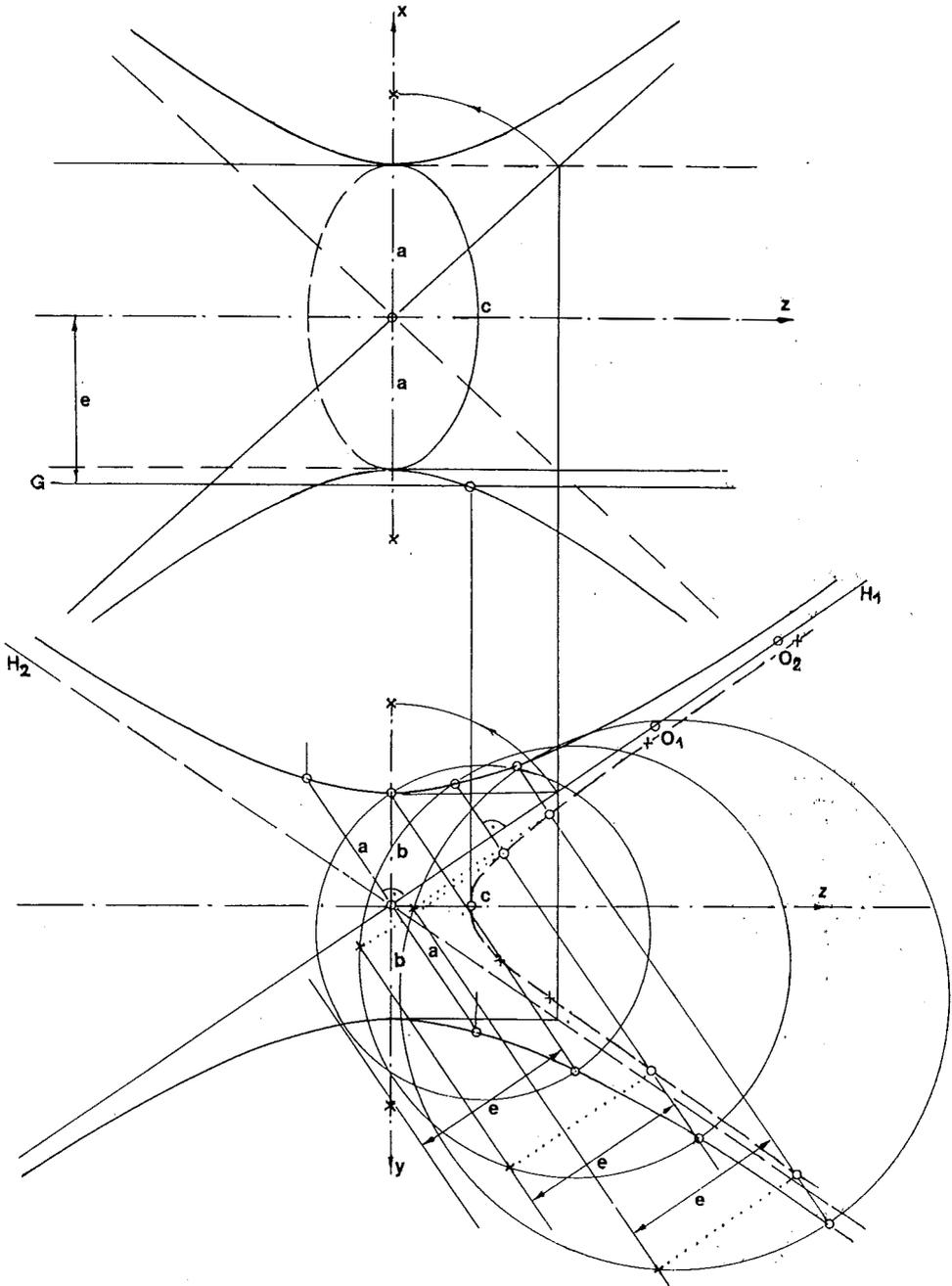


Fig. 3

der orthogonalen Hyperboloide stehen bekanntlich normal zu den Haupterzeugenden. Die Lagen von 4 Kreisschnitten im Grundriß sind gezeichnet. Dieses orthogonale Hyperboloid schneiden wir mit der Geländeebene  $G$  ( $x = -e$ ). Aus Gleichung (1) erkennt man sofort, daß die Schnittfigur eine Hyperbel ist. Punkte der Hälfte dieser Hyperbel sind mit den Seitenrissen der Kreisschnitte konstruiert. (Kontrolle: Einsetzen von  $x = -e$  in Gl. 1). Die Basis  $O_1, O_2$  sowie die Geländeebene  $G$  halten wir wieder fest.

Da wir  $a$  und  $b$  wählen können, ergeben sich aus diesem Grunde  $\infty^2$  Hyperbeln. Ferner können wir bei fester Basis das Hyperboloid verschieben, u. zw. so, daß seine Haupterzeugende  $H_1$  immer mit der Basis zusammenfällt. Analog dem in Fig. 2 dargestellten orthogonalen Kegel und dem nicht dargestellten nach links geöffneten orthogonalen Kegel denken wir uns die Fig. 3 um eine durch den Mittelpunkt des Hyperboloides gehende, zur Haupterzeugenden  $H_1$  normal in der Zeichenebene liegenden Achse um  $180^\circ$  gedreht. Wir bekommen eine weitere Hyperbelschar. Sie liegt auf der anderen Seite der Haupterzeugenden  $H_1$ . Somit haben wir  $\infty^4$  Hyperbeln, die gefährliche Linien darstellen.

Bis jetzt haben wir ein ebenes Objekt (Gelände) angenommen. Für räumliche Objekte wird die Frage nach den gefährlichen Linien, sie gehen über Berg und Tal, ganz wesentlich unübersichtlicher. Der Einfachheit wegen sind in den Fig. 4, 5, 6 nur jene gefährlichen Linien gezeichnet, die aus einem einzigen gefährlichen Zylinder folgen, u. zw. für eine Kegel-, eine Kugel- bzw. eine Geländefläche. Von den ersteren zwei gefährlichen Linien (Kurven 4. Ordnung) ist je ein Viertel gekennzeichnet. Für die Kegel- und Kugelfläche ist symmetrische Lage der Basis angenommen. Mit Hilfe eines Plotters können die gefährlichen Linien graphisch dargestellt werden, wenn man aus Kegel- und Kugelflächen ein „Gelände“ aufbaut. In einem der folgenden Hefte dieser Zeitschrift wird ein solches Gelände mit den gefährlichen Linien dargestellt. Die Anschaulichkeit geht dabei zum Teil verloren und allgemein gültige Forderungen können daraus nicht einfach gezogen werden. Jedoch man kann mit Sicherheit sagen, daß die gegenseitige Orientierung zweier Bilder ohne Bedenken erfolgen kann, wenn die Punkte zur gegenseitigen Orientierung einigermaßen gleichmäßig im doppelt überdeckten Raum verteilt sind.

Die aus der theoretischen Photogrammetrie bekannten gefährlichen Flächen spielen in der praktischen Photogrammetrie keine besondere Rolle. Mit dem Wissen über den gefährlichen Zylinder findet man im allgemeinen das Auslangen. Daß es noch andere gefährliche Flächen gibt, ist jedoch nicht nur erkenntnismäßig sehr beachtenswert, sondern z. B. für die Auffindung der gefährlichen Linien können sie in speziellen Fällen von Bedeutung sein, u. zw. besonders dann, wenn es sich um die Auswertung eines räumlichen Objektes handelt, wobei die Basis nicht horizontal ist, die Aufnahmerichtungen vom Normalfall wesentlich abweichen und die Punkte zur gegenseitigen Orientierung nicht genügend gleichmäßig verteilt sind. Das kann gelegentlich bei terrestrischen Aufnahmen und Satelliten-Aufnahmen vorkommen.

Ein vortreffliches Beispiel dieser Art gibt die Stellartriangulation ohne Zeitmessung. Bei dieser werden in einigen Observatorien je ein photogrammetrisches Bild eines Lichtblitzes (von einer Rakete oder einem Satelliten ausgesandt) samt den dahinterliegenden Fixsternen abgebildet. Aus den Fixsternkoordinaten können die astronomischen Koordinaten des Lichtblitzes einfach berechnet werden. Somit ist ein Strahlenbündel bestimmt. Mit einem anderen Lichtblitz wird auf dieselbe Weise ein zweites Strahlenbündel bestimmt. Werden die Strahlenbündel gegenseitig orientiert, so ergibt sich die gegenseitige Lage der Observatorien. Gefährliche Flächen können dabei, so sagt der Praktiker, nicht vorkommen; denn die Erde ist konvex gekrümmt. Aber die gefährlichen Linien, das sind die Schnittlinien der gefährlichen Flächen mit der „Erdkugel“ sind maßgebend. (Dieses Thema behandle ich unter Beachtung der Erdachsenrichtung seit Jahren in meiner Vorlesung.)

Für genauere Überlegungen sind noch die gefährlichen Räume zu beachten. Durch diese werden den gefährlichen Linien bestimmte Breiten zugeordnet. Die gefährlichen Räume habe ich erstmals im Jahre 1945 definiert [2] [3d].

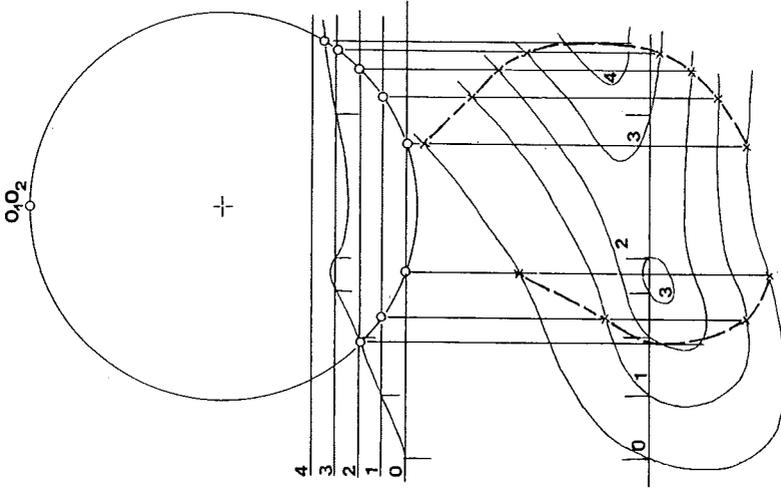


Fig. 6

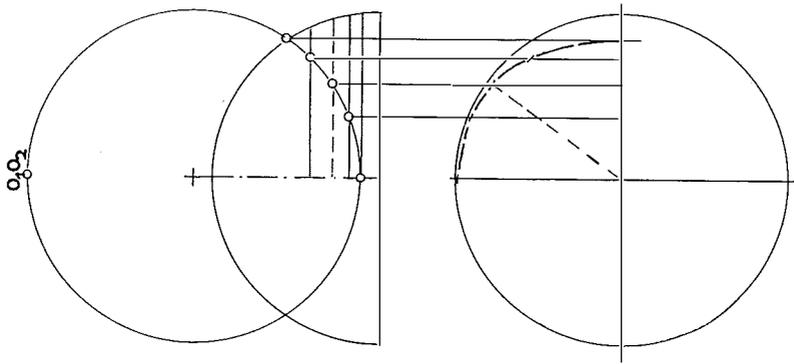


Fig. 5

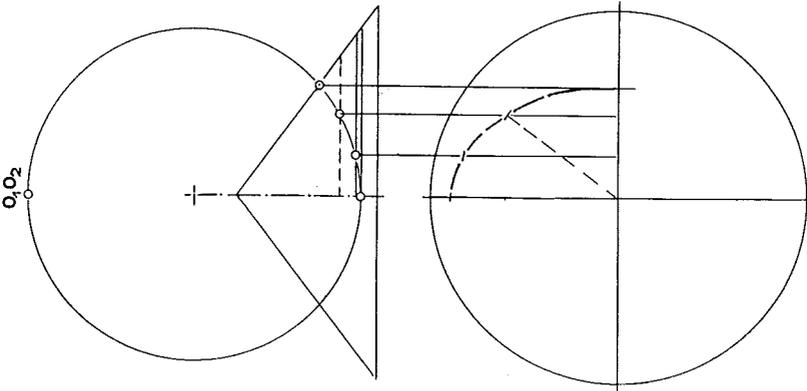


Fig. 4

Über 3- und n-fach überdeckte Gebiete sei folgendes bemerkt: Die Zentren  $O_1, O_2$  liegen auf der Haupterzeugenden  $H_1$  (Fig. 3). Im übrigen haben sie in weiten Grenzen beliebige Lage. Diese Grenzen sind bestimmt durch die Aufnahmerichtungen und durch die Größen der Bildfelder. Liegt ein drittes Zentrum  $O_3$  ebenfalls auf  $H_1$ , so müssen  $O_1, O_2; O_1, O_3; O_2, O_3$  jeweils dieselben gefährlichen Linien ergeben. Das Analoge gilt für n-fach überdeckte Gebiete. Natürlich besteht dieselbe Überlegung für den gefährlichen Zylinder und für den orthogonalen Kegel (Figuren 1, 2, 4, 5, 6).

#### Literatur

[1] *Gotthard E.*: Der gefährliche Ort bei der photogrammetrischen Hauptaufgabe. Z. f. V. 68, 1939, Heft 10.

[2] *Killian K.*: Über die bei der gegenseitigen Orientierung von Luftbildern vorkommenden gefährlichen Flächen und „gefährlichen Räumen“. Photographische Korrespondenz 81. Bd. Nr. 1–12, 1945 (Nach Kriegsende gab es keine Zeitschrift für Vermessungswesen.)

[3] *Krames J.*: a) Zur Ermittlung eines Objektes aus zwei Perspektiven (Ein Beitrag zur Theorie der gefährlichen Örter). Monatshefte für Mathematik und Physik, 49. Bd., S. 327–354.

b) Über bemerkenswerte Sonderfälle des gefährlichen Ortes der photogrammetrischen Hauptaufgabe. Monatshefte für Mathematik und Physik, 50. Bd., S. 1–13.

c) Über die bei der Hauptaufgabe der Luftphotogrammetrie auftretenden gefährlichen Flächen. Bildmessung und Luftbildwesen, 17. Jg. 1942, Heft 1/2.

d) Sitzung der math.-naturw. Klasse vom 29. Mai 1947 der österreichischen Akademie der Wissenschaften. Akademischer Anzeiger Nr. 8.

[4] *Schröter H.*: Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung, S. 180; Verlag Teubner 1880.

[5] *Wunderlich, W.*: Zur Eindeutigkeitsfrage der Hauptaufgabe der Photogrammetrie. Monatshefte für Mathematik und Physik, 50. Bd., S. 151–164.

[6] *Rinner, K.*: Handbuch der Vermessungskunde; Jordan/Eggert/Kneissl, Band IIIa/1, S. 422–427

Manuskript eingelangt im Jänner 1989