

Paper-ID: VGI\_198901



## Die redundante Einzelpunkteinschaltung mit Richtungen und Quasistrecken

Gerhard Brandstätter <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Technische Universität Graz, Institut für Angewandte Geodäsie und Photogrammetrie, Abteilung Photogrammetrie und Fernerkundung; Rechbauerstraße 12, A-8010 Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **77** (1), S. 1–13

1989

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Brandstaetter_VGI_198901,  
  Title = {Die redundante Einzelpunkteinschaltung mit Richtungen und  
          Quasistrecken},  
  Author = {Brandst{\a}tter, Gerhard},  
  Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen und  
            Photogrammetrie},  
  Pages = {1--13},  
  Number = {1},  
  Year = {1989},  
  Volume = {77}  
}
```



# Die redundante Einzelpunkteinschaltung mit Richtungen und Quasistrecken

Von G. Brandstätter, Graz

## Summary

This paper treats the case of redundant resection by corresponding directions and quasi-ranges. The geometry of this method yields orthogonal equations of observation and in consequence simple normal equations. They can be inverted generally and allow a transparent optimization of the constraint adjustment. The "free" adjustment is also possible, but results in a different optimal configuration. Numerical examples of those two possibilities are added.

## 1. Geometrische Grundlagen

### 1.1 Zur Methodik

Die Kombination von im Neupunkt gemessenen Richtungen  $r$  und korrespondierenden Quasistrecken\*)  $s$  ergibt eine nichtredundante Methode der Einzelpunktbestimmung, für welche zwei Festpunkte vorgegeben sein müssen (Brandstätter, 1986a). Sie bietet nebenbei die Möglichkeit, die aufgrund der geringfügigen Redundanz  $\ddot{u} = 1$  nicht sehr sinnvolle Ausgleichung des einfach überbestimmten direkten Anschlusses (bestehend aus zwei Richtungen und zwei korrespondierenden Absolutstrecken) durch Einführung des Streckenquotienten anhand einer bemerkenswert einfachen Lösung (Brandstätter, 1987) zu umgehen. Sollen nur Richtungen oder nur Quasistrecken gemessen werden, dann müssen bekanntlich für den Rückwärtsschnitt aus Richtungen oder den sogenannten Quasistreckenschnitt (Brandstätter, 1986b)  $f = 3$  Festpunkte zur Verfügung stehen. Ihre Kombination ergibt eine redundante Einzelpunktbestimmung, welche der freien Stationierung mittels Helmertransformations entspricht, da neben den Koordinaten des Standpunktes (Translation) die Orientierung  $o$  des Richtungssatzes (= Drehung der Transformation) und der Maßstabsdefekt  $\mu$  ( $m = 1 + \mu =$  Maßstabsfaktor der Transformation) als Unbekannte zu berechnen sind. Die Redundanz ist somit allgemein mit  $\ddot{u} = 2f - 4$  und im Minimalfall mit  $\ddot{u} = 2 \cdot 3 - 4 = 2$  gegeben. Sie nimmt, wenn stets Richtung und Quasistrecke zu allen  $f$ -Festpunkten gemessen werden, die geraden Zahlen  $\geq 2$  an. Die für die Ausgleichung notwendigen Näherungskordinaten des Neupunktes sind leicht anhand einer der drei erwähnten Lösungen zu erhalten.

### 1.2 Differentielle Beziehungen

Die Differentialform für beobachtete Richtungen ist bekannt und lautet mit

$$\left. \begin{array}{l} t_i \dots \dots \text{Richtungswinkel} \\ d_i \dots \dots \text{Horizontaldistanz} \end{array} \right\} \text{ zum Festpunkt } F_i$$

$$\frac{\sin t_i}{d_i} x - \frac{\cos t_i}{d_i} y - o - \frac{\sin t_i}{d} x_i + \frac{\cos t_i}{d} y_i = r_i \tag{1.2.1}$$

worin die Differentialsymbole bei  $x, y, o, r, x_i, y_i$  und Absolutglied weggelassen sind.

Da die für Quasistrecken zu verwendende Differentialform noch nicht so gebräuchlich ist, sei ihre Ableitung kurz angedeutet, und zwar ausgehend von der bekannten Taylorentwicklung

$$d_i = (d_i) - \cos t_i x - \sin t_i y + \cos t_i x_i + \sin t_i y_i = (1 + \mu) s_i$$

mit dem Näherungswert  $(d_i)$ . Umstellung und Division durch  $s_i \approx (d_i) \approx d_i$  (für die Taylorkoeffizienten) ergibt

\*) Quasistrecken: direkt gemessene Strecken mit systematischem Maßstabsdefekt wegen abweichender Modulationsfrequenz, unzureichender Refraktionskenntnis, Außerachtlassung von Projektionsverzerrung und Höhenreduktion oder stochastischen, beschränkt systematischen Maßstabsdefekten im Festpunktfeld.

$$-\frac{\cos t_i}{d_i} x - \frac{\sin t_i}{d_i} y - \mu + \frac{\cos t_i}{d_i} x_i + \frac{\sin t_i}{d_i} y_i = \frac{s_i - (d_i)}{s_i} = l_i \quad (1.2.2)$$

Die Koeffizientenvektoren dieser beiden Differentialformen

$$\mathbf{a}_i^T = \left( \frac{\sin t_i}{d_i}, -\frac{\cos t_i}{d_i}, -1, 0, -\frac{\sin t_i}{d_i}, \frac{\cos t_i}{d_i} \right)$$

und

$$\mathbf{a}_i^{\prime\prime T} = \left( -\frac{\cos t_i}{d_i}, -\frac{\sin t_i}{d_i}, 0, -1, \frac{\cos t_i}{d_i}, \frac{\sin t_i}{d_i} \right)$$

sind wegen  $\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i^{\prime\prime T} = 0$  orthogonal und wegen  $\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i^{\prime\prime T} \mathbf{a}_i^{\prime\prime} = 1 + 2/d_i^2$  von gleicher Norm. Daraus ist zu entnehmen, daß nichtorientierte Richtungen und Quasistrecken ebenso wie Winkel und Streckenquotienten oder Richtungswinkel und Absolutstrecken zueinander paarweise orthogonale konforme Parameter sind.

Mit den Vektoren  $\mathbf{z}^T = (x, y, 0, \mu)$ ,  $\mathbf{x}_i^T = (x_i, y_i)$  und  $\mathbf{l}_i^T = (r_i, l_i)$  kann schließlich der differentielle Zusammenhang zwischen Variablen und Beobachtungswerten in der Form

$$\mathbf{l}_i = \frac{1}{d_i} \begin{bmatrix} \sin t_i & -\cos t_i & -d_i & 0 \\ -\cos t_i & -\sin t_i & 0 & -d_i \end{bmatrix} \mathbf{z} + \frac{1}{d_i} \begin{bmatrix} -\sin t_i & \cos t_i \\ \cos t_i & \sin t_i \end{bmatrix} \mathbf{x}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{z} + \mathbf{B}_i \mathbf{x}_i \quad (1.2.3)$$

angeschrieben werden, woraus die Konformität deutlicher zu erkennen ist. Durch Zusammenfassung sämtlicher  $i = 1 \dots f$  Gln. entsteht, sofern die Absolutglieder konsistent sind, das System

$$\mathbf{l} = \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{B} \mathbf{x}, \quad (1.2.4)$$

(Bild 1) aus welchem nach Normalisierung mit  $\mathbf{A}^T$  die hinsichtlich  $\mathbf{z}$  explizite Beziehung

$$\mathbf{z} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{l} - \mathbf{B} \mathbf{x}) \quad (1.2.5)$$

folgt. Sie gibt die Reaktion des Unbekanntenvektors auf Änderungen in den Meßwerten oder in den Koordinaten der Festpunkte an.

$\mathbf{z}^T$	$\mathbf{x}^T$	$\mathbf{l}$
$x \ y \ 0 \ \mu$	$x_1 y_1 \ x_2 y_2 \ x_3 y_3 \ x_4 y_4 \ x_5 y_5$	$r/l$
--- $\mathbf{A}_1$ ---	- $\mathbf{B}_1$ -	$l_1$
--- $\mathbf{A}_2$ ---	- $\mathbf{B}_2$ -	$l_2$
--- $\mathbf{A}_3$ ---	- $\mathbf{B}_3$ -	$l_3$
--- $\mathbf{A}_4$ ---	- $\mathbf{B}_4$ -	$l_4$
--- $\mathbf{A}_5$ ---	- $\mathbf{B}_5$ -	$l_5$

A
B

Bild 1: Schema der Beobachtungsgleichungen für  $f = 5$  Festpunkte

## 2. Auswertung der Messungen

### 2.1 Gewichtung

Aus der rechten Seite von (1.2.2), nämlich  $l = 1 - (d)/s$ , ergibt sich mit den dort verwendeten Näherungen

$$\sigma_l^2 = \frac{d^2}{s^4} \sigma_s^2 \approx \frac{\sigma_s^2}{s^2},$$

wenn  $\sigma_s^2$  die Varianz der Streckenmessung bezeichnet. Die Gewichtsrelation zwischen Strecken- und Richtungsmessung lautet daher

$$\frac{p_l}{p_r} = \frac{\sigma_r^2}{\sigma_l^2} = \frac{s^2 \sigma_r^2}{\sigma_s^2},$$

so daß Gleichgewichtigkeit dann entsteht, wenn die beiden zueinander orthogonalen Varianzen die Bedingung  $\sigma_r = \sigma_s/s$  erfüllen und damit *isotrop* sind (zum Begriff der stochastischen Isotropie sei auf Grafarend et. al., 1979 verwiesen). Da  $\sigma_s$  im Kurzstreckenbereich durch den verwendeten Distanzmeßteil meist fest vorgegeben ist, kann dies nur mittels entsprechender Anpassung sowie verkehrtproportional zur Zielweite erfolgender Variation von  $\sigma_r$  erreicht werden. Die Befolgung dieser meßtechnisch problemlos erfüllbaren Forderung sei im weiteren vorausgesetzt.

### 2.2 Gezwängte Ausgleichung

Unter gezwängter Ausgleichung sei jene konventionelle Vorgangsweise verstanden, die von fiktiv dispersionsfreien Festpunkten ausgeht. Unter dieser Voraussetzung kann aus Gleichung (1.2.3) für jeden beobachteten Festpunkt das in Tabelle 1 wiedergegebene Koeffizientenschema für den Unbekanntenvektor  $\mathbf{z}$  entnommen werden, aus welchem die allgemeine

x	y	o	$\mu$	Abs.	Pkt.
$\frac{\text{shint}_i}{d_i}$	$-\frac{\text{cost}_i}{d_i}$	-1	0	$r_i$	F <sub>i</sub>
$-\frac{\text{cost}_i}{d_i}$	$-\frac{\text{shint}_i}{d_i}$	0	-1	$l_i$	

Tabelle 1: Koeffizientenschema der Beobachtungsgleichungen

x	y	o	$\mu$	Absolutglied
$\{1/d^2\}$	0	$\{-\{\text{shint}/d\}$	$\{\text{cost}/d\}$	$\{(\text{rsint}-\text{lcost})/d\}$
	$\{1/d^2\}$	$\{\text{cost}/d\}$	$\{\text{shint}/d\}$	$\{(-\text{rcost}-\text{lsint})/d\}$
		f	0	$\{-\{r\}$
			f	$\{-\{l\}$

Tabelle 2: Normalgleichungen

Form der in Tabelle 2 enthaltenen Normalgleichungen folgt, deren günstige Struktur auch die allgemeine Berechnung der Inversengestattet. Mit der Abkürzung  $[1/d^2] = a$  lautet nämlich die bekannte Definitionsgleichung hierzu

$$\mathbf{NQ} = \begin{bmatrix} a\mathbf{E} & \mathbf{K} \\ \mathbf{K}^T & f\mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{12}^T & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{bmatrix},$$

woraus die vier Teilgleichungen

$$\left. \begin{aligned} a\mathbf{Q}_{12} + \mathbf{K}\mathbf{Q}_{22} &= \mathbf{0} \dots \dots \mathbf{Q}_{12} = - (1/a) \mathbf{K}\mathbf{Q}_{22} \\ f\mathbf{Q}_{12}^T + \mathbf{K}^T\mathbf{Q}_{11} &= \mathbf{0} \dots \dots \mathbf{Q}_{12}^T = - (1/f) \mathbf{K}^T\mathbf{Q}_{11} \end{aligned} \right\} \quad (2.2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} a\mathbf{Q}_{11} + \mathbf{K}\mathbf{Q}_{12}^T &= \mathbf{E} \dots \dots \{a\mathbf{E} - (1/f) \mathbf{K}\mathbf{K}^T\} \mathbf{Q}_{11} = \mathbf{E} \\ f\mathbf{Q}_{22} + \mathbf{K}^T\mathbf{Q}_{12} &= \mathbf{E} \dots \dots \{f\mathbf{E} - (1/a) \mathbf{K}^T\mathbf{K}\} \mathbf{Q}_{22} = \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)$$

entstehen. Da die in  $\mathbf{N}$  enthaltene Submatrix  $\mathbf{K}$  gemäß Tabelle 2 orthogonal ist, ergibt

$$\mathbf{K}\mathbf{K}^T = \mathbf{K}^T\mathbf{K} = ([\cos t/d]^2 + [\sin t/d]^2)\mathbf{E} = b\mathbf{E}$$

und damit das Gleichungspaar (2.2.2) die Submatrizen

$$\mathbf{Q}_{11} = \frac{f}{(af - b)} \mathbf{E}, \quad \mathbf{Q}_{22} = \frac{a}{(af - b)} \mathbf{E}$$

in isotroper Diagonalform. Es sind also die Lösungspaare  $x, y$  und  $o, \mu$  jeweils untereinander unabhängig und weisen infolge der für die Meßwerte vereinbarten Isotropie gleich große Unsicherheiten (= circulare Dispersion) auf. Die nun aus (2.2.1) folgenden Seitenglieder der Inversen, welche die Korrelation zwischen Lage und Orientierung beschreiben, lauten

$$\mathbf{Q}_{12} = - \frac{1}{(af - b)} \mathbf{K},$$

so daß  $\mathbf{Q}$  die sehr einfache aber typische Form

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{(af - b)} \begin{bmatrix} f & 0 & [\sin t/d] & -[\cos t/d] \\ & f & -[\cos t/d] & -[\sin t/d] \\ \text{symmetr.} & & [1/d^2] & 0 \\ & & & [1/d^2] \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

annimmt.

Zwecks Interpretation des Nenners kann dieser durch Ausquadrieren der beiden Summen in  $b$  und Anwendung des trigonometrischen Satzes

$$\cos \alpha_{jk} = \cos (t_k - t_j) = \cos t_k \cos t_j + \sin t_k \sin t_j$$

in die Form

$$D = af - b = (f - 1) \sum_{i=1}^f \frac{1}{d_i^2} - \sum_{j=1}^{f-1} \left( \sum_{k=j+1}^f 2 \frac{\cos \alpha_{jk}}{d_j d_k} \right) = \sum_{j=1}^{f-1} \left\{ \sum_{k=j+1}^f \left( \frac{d_{jk}}{d_j d_k} \right)^2 \right\} \quad (2.2.4)$$

gebracht werden, das ist die Summe über den Quadraten der Quotienten aus allen Strecken  $d_{jk}$  (Seiten und Diagonalen) des Festpunktviereckes und dem Produkt der jeweils anliegenden Schenkel  $d_j, d_k$  (Bild 2). Das Verhalten dieser Funktion ist gut überschaubar.

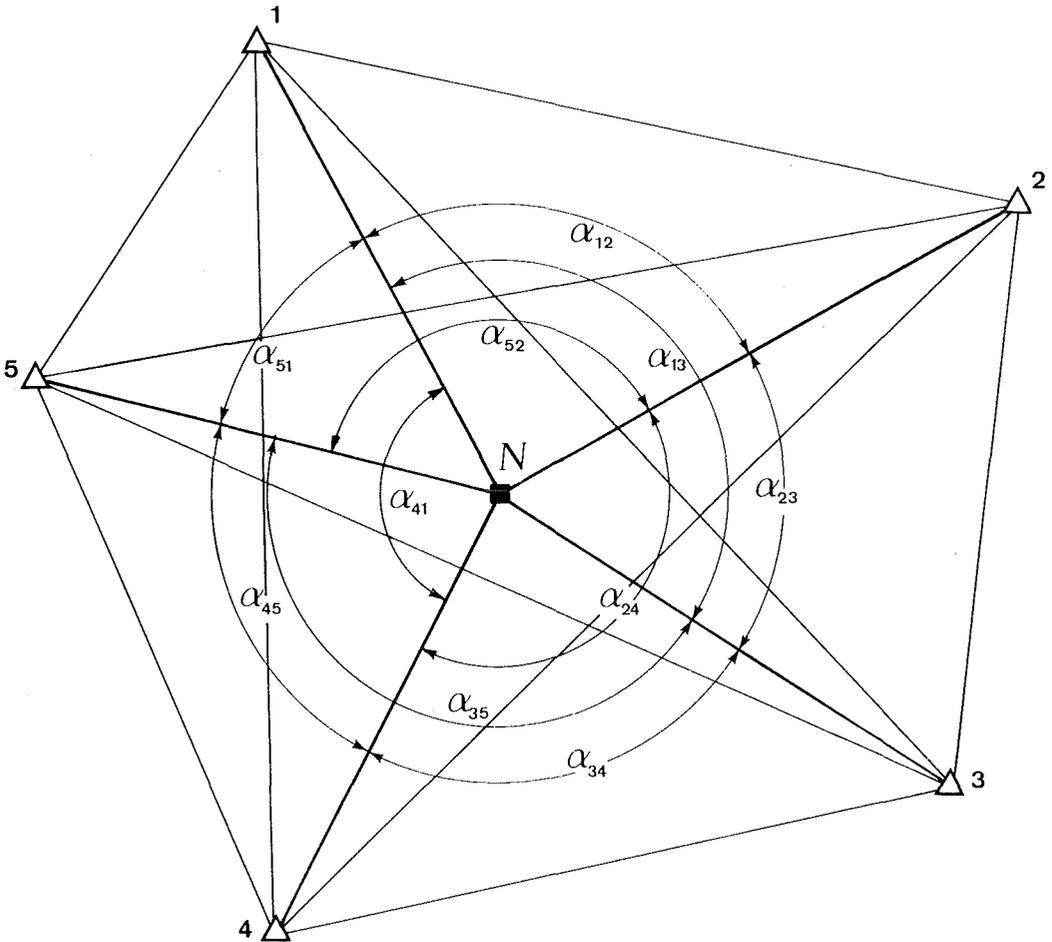


Bild 2: Neupunkt aus  $f = 5$  Festpunkten

Sie geht für  $d_i \rightarrow 0$  gegen  $\infty$ , also in jedem der Festpunkte, und kann nur für  $d_i \rightarrow \infty$  gegen 0 gehen. Eine Singularität der Normalgleichungsmatrix wegen, wie aus der Entwicklung der Determinante von  $\mathbf{N}$  hervorgeht,

$$D = af - b = \sqrt{\det(\mathbf{N})} = 0,$$

kann demnach dann und nur dann eintreten, wenn der Neupunkt im Unendlichen liegt, und hat keine praktische Bedeutung. Der für die am besten überschaubare Minimalkonfiguration  $f = 3$  zu befürchtende kritische Ort der beiden hier kombinierten Grundaufgaben, nämlich der Umkreis des Festpunktdreieckes (Brandstätter, 1986b), hat somit keine Wirkung, und zwar deswegen, weil die hier ebenfalls enthaltene Punktbestimmungsmethode mit Winkel und Streckenquotient in keinem Punkt der Koordinatenebene kritisch werden kann (Brandstätter, 1986a) und dadurch die Lösung stabilisiert.

Sind die in (1.2.5) auftretenden Änderungen stochastischer Natur, dann wird ihr Einfluß auf  $\mathbf{z}$  mit Hilfe des Erwartungswertes für Streuungen (Pelzer et al., 1985) als Dispersionsmatrix

$$\mathbf{S} = E\{\mathbf{z}\mathbf{z}^T\} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^T \{E\{\mathbf{I}\mathbf{I}^T\} - E\{\mathbf{l}\mathbf{x}^T\}\mathbf{B}^T - \mathbf{B}E\{\mathbf{x}\mathbf{l}^T\} + \mathbf{B}E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}\mathbf{B}^T\} \mathbf{A}\mathbf{Q}$$

erhalten. Hier ist

$$E\{\mathbf{ll}^T\} = \mathbf{S}_0 = \sigma_0^2 \mathbf{E} \dots \dots \text{Dispersion der Messungen } (\sigma_0 = s \cdot \sigma_r = \sigma_s)$$

$$E\{\mathbf{xx}^T\} = \mathbf{S}_F \dots \dots \dots \text{Dispersionsmatrix der Festpunkte}$$

und

$$E\{\mathbf{lx}^T\} = E\{\mathbf{x}\mathbf{l}^T\} = \mathbf{0},$$

weil Meßwerte und Koordinaten des gegebenen Festpunktfeldes voneinander unabhängig sind. Die vollständigen Varianzen und Co-Varianzen von  $\mathbf{z}$  sind somit dem Ausdruck

$$\mathbf{S} = \sigma_0^2 \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{S}_F \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} \tag{2.2.5}$$

zu entnehmen, dessen zweiter Teil auf der rechten Seite den Einfluß der Lageunsicherheit des Festpunktfeldes wiedergibt.

Empfehlungen zur Lageoptimierung des Neupunktes aus  $\mathbf{Q}$  allein sind unproblematisch und können aus einer Kartierung der Funktion  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0 \sqrt{f/D}$  ( $\sigma_s = \pm 6 \text{ mm}$ ) in Bezug auf die vorgegebene Festpunktconfiguration abgelesen werden (Bild 3). Sie zeigt innerhalb des Fest-

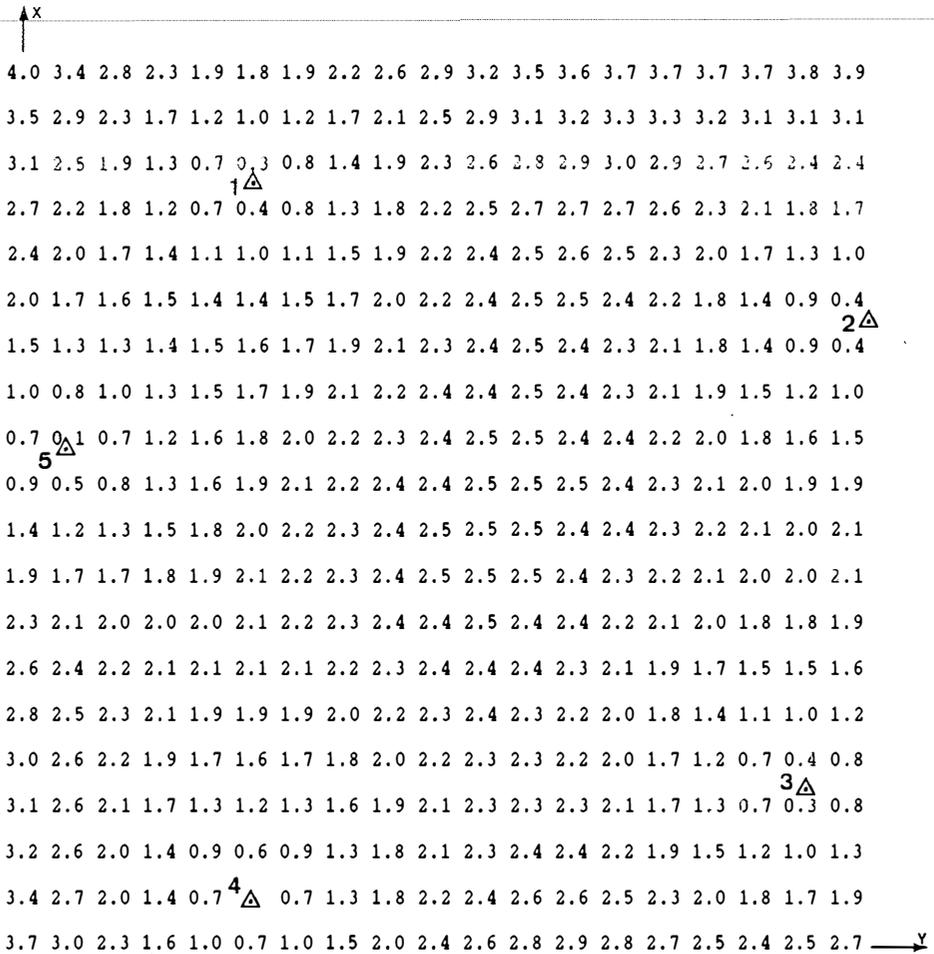


Bild 3: Kartierung der Funktion  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0 \sqrt{f/D}$  für das Festpunktfünfeck aus Bild 2 mit  $\sigma_0 = \pm 6 \cdot 10^{-6}$  und Maschenweite 100 m

punktviereckes einen gemäßigten Anstieg bis etwa  $(5/12)\sigma_s$ , außerhalb desselben wird erst nach einigen 100 Metern  $\sigma_s$  überschritten. Die günstigste Position ist somit stets in der Nähe eines der Festpunkte (wegen  $D \rightarrow \infty$ ) zu finden, aber auch der ganze Innenraum des Viereckes und dessen nähere Umgebung ermöglichen Lageunsicherheiten  $\leq \sigma_s$ .

### 2.3 Freie Ausgleichung

Die freie Ausgleichung des Meßsatzes ist ohne Anschlußzwang durchzuführen. Dadurch werden alle Variablen des in Bild 1 dargestellten Gleichungssystems zu Unbekannten und es entsteht eine Unterbestimmung, welche übereinstimmend mit den vier Freiheitsgraden eines ebenen Netzes (Datumparameter für Verschiebung, Drehung und Maßstab), in den Normalgleichungen den Rangdefekt 4 hervorruft. Dieser ist durch Anfügen von ebensoviel Bedingungen zwischen den Unbekannten behebbar, wobei aber der Meßsatz konform bleiben muß. Die einfachste Möglichkeit, diese Forderung zu erfüllen, ist die Streichung der vier in  $\mathbf{z}$  zusammengefaßten Unbekannten anhand der Bedingung  $\mathbf{Ez} = \mathbf{0}$ . (1.2.4) wird dadurch zu  $\mathbf{Bx}' = \mathbf{l}$  und, da nun das Gleichungssystem in  $f$  eindeutig bestimmte  $2 \cdot 2$ -Subsysteme zerfällt (Bild 1), wegen  $\mathbf{B}_i^{-1} = d_i^2 \mathbf{B}_i$  mühelos invertierbar. Die Zielpunkte erhalten somit als Sonderlösung die Koordinaten

$$\mathbf{x}' = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{l} = \begin{bmatrix} d_1^2 \mathbf{B}_1 & & & \\ & d_2^2 \mathbf{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_f^2 \mathbf{B}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_f \end{bmatrix} \quad (2.3.1)$$

mit der höchst einfachen Streumatrix

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}'} = \sigma_0^2 \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}^{-1T} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} d_1^2 \mathbf{E} & & & \\ & d_2^2 \mathbf{E} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_f^2 \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

Dieses Ergebnis ist jedoch insofern völlig willkürlich, als es vor allem von der Wahl der Näherungskordinaten des Neupunktes abhängt. Soll daher die freie Sonderlösung bestmöglich an das gegebene Festpunktfeld angepaßt werden, ist noch eine entsprechende Anpassungsbedingung einzuführen, welche aufgrund der sicher sehr guten Näherungskordinaten gem. Bild 4 mit Hilfe einer infinitesimalen Helmerttransformation (Rinner 1969)

$$\tilde{\mathbf{y}}_i = \mathbf{y}_i + \mathbf{x}'_i + \mathbf{G}_i t \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\mathbf{y}}_i - \mathbf{y}_i = \mathbf{x}'_i + \mathbf{G}_i t \quad (2.3.2)$$

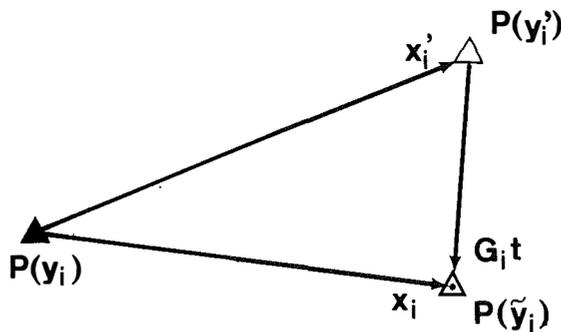


Bild 4: Bezeichnungen zur Helmerttransformation; gegebene Festpunkte  $\mathbf{y}_i$ , freie Sonderlösung  $\mathbf{y}'_i$ , Lage der bestmöglichen Anpassung  $\tilde{\mathbf{y}}_i$ .

formuliert werden kann. Hierin lautet  $\mathbf{t}^T = (x, y, o, \mu) = \mathbf{z}^T$  und

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Y_i' & X_i' \\ 0 & 1 & X_i' & Y_i' \end{bmatrix} = (\mathbf{E} \mathbf{X}_i),$$

wobei die endlichen Werte der Punktkoordinaten mit Großbuchstaben bezeichnet sind. Durch Zusammenfassung der Gln. (2.3.2) für alle  $f$ -Punkte entsteht die Gesamtbeziehung

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{Gz}, \quad (2.3.3)$$

aus welcher durch die Forderung  $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \text{Min.}$  auf bekanntem Wege die Gleichung

$$\mathbf{G}^T \mathbf{Gz} + \mathbf{G}^T \mathbf{x}' = 0$$

und in weiterer Folge wegen (2.3.1) der explizite Ausdruck

$$\mathbf{z} = -(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{x}' = -(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{l}$$

hervorgeht. Durch Übergang zu einem auf den Schwerpunkt des Festpunktviereckes bezogenen lokalen Koordinatensystem wird

$$(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/f \mathbf{E} & 0 \\ 0 & 1/[e^2] \mathbf{E} \end{bmatrix},$$

worin wegen  $\bar{X}_i' \bar{X}_i' = \bar{X}_i'^2 + \bar{Y}_i'^2 = e_i^2$  ( $e_i \dots$  Schwerpunktabstand eines Festpunktes), und ein Teilprodukt von  $\mathbf{G}^T \mathbf{B}^{-1}$  zu

$$\mathbf{G}_i^T \mathbf{B}_i^{-1} = \begin{bmatrix} -d_i \sin t_i & d_i \cos t_i \\ d_i \cos t_i & d_i \sin t_i \\ \bar{Y}_i' d_i \sin t_i + \bar{X}_i' d_i \cos t_i & -\bar{Y}_i' d_i \cos t_i + \bar{X}_i' d_i \sin t_i \\ -\bar{X}_i' d_i \sin t_i + \bar{Y}_i' d_i \cos t_i & \bar{X}_i' d_i \cos t_i + \bar{Y}_i' d_i \sin t_i \end{bmatrix},$$

so daß mit  $\Delta x_i = d_i \cos t_i$ ,  $\Delta y_i = d_i \sin t_i$  die Komponenten des Unbekanntenvektors aus

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ o \\ \mu \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -[\Delta y_r - \Delta x_l]/f \\ [\Delta x_r + \Delta y_l]/f \\ [(\bar{Y} \Delta y + \bar{X} \Delta x)_r - (\bar{Y} \Delta x - \bar{X} \Delta y)]/[e^2] \\ [-(\bar{X} \Delta y - \bar{Y} \Delta x)_r + (\bar{X} \Delta x + \bar{Y} \Delta y)]/[e^2] \end{bmatrix} \quad (2.3.4)$$

als allgemeines Mittel der Beobachtungen  $r_i, l_i$  zu berechnen sind und eine Ausgleichung im strengen Sinne eigentlich nicht stattfindet. Die ausschließlich auf den Streuungen der Meßwerte beruhenden Unsicherheiten der Unbekannten folgen aus

$$\mathbf{S}_z = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{S}_x' \mathbf{G} (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1}$$

mit

$$\mathbf{S}_z = \sigma_o^2 \begin{bmatrix} \frac{[d^2]}{f^2} \mathbf{E} & \frac{[d^2 \mathbf{X}]}{f[e^2]} \\ \frac{[d^2 \mathbf{X}]}{f[e^2]} & \frac{[d^2 e^2]}{[e^2]^2} \mathbf{E} \end{bmatrix}. \quad (2.3.5)$$

Punktlage und Orientierungen sind wie bei der gezwängten Ausgleichung untereinander isotrop; die Korrelationen zwischen diesen beiden Paaren sind wie dort gering, wenn der Neupunkt ungefähr im Schwerpunkt der Festpunkte liegt und verschwinden im Mittelpunkt eines

regelmäßigen Festpunktviereckes. Hingegen ist nun die geringste Lageunsicherheit durch die Bedingung  $[d^2] = \text{Min.}$  gekennzeichnet, welche ebenfalls von diesen Punkten erfüllt wird.

Der stochastische Einfluß des Festpunktfeldes steckt im Anpassungsvektor  $\mathbf{x}$ . Bildet man daher aus (2.3.3) mit (2.3.1) durch Normalisierung mit  $\mathbf{G}^T$  die zu (1.2.5) analoge Beziehung

$$\mathbf{z} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T (\mathbf{x} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{l}),$$

dann folgt hieraus auf dem gleichen Weg, der zu (2.2.5) führte, der bezüglich Dispersion  $\mathbf{S}_F$  des Festpunktfeldes erweiterte Ausdruck (2.3.5)

$$\mathbf{S} = E\{\mathbf{z}\mathbf{z}^T\} = \mathbf{S}_z + (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{S}_F \mathbf{G} (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1}$$

für die „innere“ und die „äußere“ Streuung der frei ausgeglichenen Einzelpunkteinschaltung aus Quasistrecken und Richtungen und damit auch für die freie Einzelpunktstationierung.

Dem versierten Leser wird natürlich sofort auffallen, daß die hier beschriebene Vorgangsweise mit der inneren Fehlertheorie nach *P. Meissl* eng verwandt ist und daß die Lösung des unterbestimmten Systems (1.2.4) mit Hilfe der Normalinversen nach *A. Bjerhammar* direkt möglich wäre. Zielsetzung der vorstehenden Ausführungen ist jedoch nicht die algebraische Behandlung des aus Richtungen und Quasistrecken kombinierten Einschneideverfahrens, sondern der für die Praxis bedeutsame geometrische Durchblick, welcher nur analytisch gewonnen werden kann.

### 3. Numerisches Beispiel

#### 3.1 Datenmaterial

Die Meßdisposition entspricht der in Bild 2 skizzierten Punktanordnung; die Koordinaten der Festpunkte, die Meßwerte sowie deren Unsicherheiten sind in Tabelle 3 angegeben. Letz-

$F_i$	Koordinaten x/y	Meßwerte r/s	$\sigma$ cc/mm	(t)/(d) gon/m
1	207661.31 14492.17	392.6103 901.269	2.1 3.0	368.9276 901.235
2	207358.69 15834.44	92.3267 1043.685	1.8 3.0	68.6523 1043.638
3	206344.90 15701.13	160.8983 942.982	2.0 3.0	137.2190 942.951
4	206101.26 14499.13	255.3952 869.833	2.2 3.0	231.7191 869.796
5	207081.13 14092.05	340.0163 850.608	2.2 3.0	316.3318 850.576

Tabelle 3: Koordinaten, Meßwerte, Streuungen, Näherungswerte

tere basieren auf der Annahme, daß ein Distanzmeßteil mit einer Standardabweichung von  $\sigma_s = \pm 3 \text{ mm}$  zur Verfügung steht und daß die Unsicherheiten der Richtungsmessung gemäß 2.1 angepaßt wurden; wegen der geringen Streckenunterschiede können sie jedoch gleichmäßig mit  $\sigma_r = \pm 2''$  in die Auswertung eingeführt werden. Die Berechnung der Näherungswerte erfolgt hinsichtlich der Koordinaten anhand der in 1.1 zitierten Methode mit  $\alpha = r_5 - r_3$  und  $q = s_5/s_3$  aus

$$\begin{aligned} (X) &= X_3 + \{(X_5 - X_3) \cdot (1 - q \cdot \cos \alpha) - (Y_5 - Y_3) \cdot q \cdot \sin \alpha\} / (1 + q^2 - 2 \cdot q \cdot \cos \alpha) \\ (Y) &= Y_3 + \{(Y_5 - Y_3) \cdot (1 - q \cdot \cos \alpha) + (X_5 - X_3) \cdot q \cdot \sin \alpha\} / (1 + q^2 - 2 \cdot q \cdot \cos \alpha). \end{aligned}$$

und liefert  $(X) = 206865.275$ ,  $(Y) = 14914.78$  sowie die genäherte Orientierung des Richtungs-satzes  $(O) = -23^{\circ}.6792$ ;  $(m)$  ist per definitionem  $= 1$ . Aus diesen Daten folgt das gemäß Bild 1 in Tabelle 4 zusammengestellte Koeffizientenschema.

### 3.2 Ausgleichung

a) gezwängt

Die Normalgleichungen  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  mit  $\mathbf{A}^T \mathbf{l}$  (in Einheiten  $10^{-10}$ ) lauten

$$\begin{bmatrix} 59780 & 0 & 4782035 & 1361499 \\ 0 & 59780 & 1361449 & -4782035 \\ 4782035 & 1361499 & 5 \cdot 10^{10} & 0 \\ 1361499 & -4782035 & 0 & 5 \cdot 10^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ o \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 469 \\ 20 \\ 3595 \\ -1968493 \end{bmatrix},$$

die Determinante  $D = \sqrt{\det(N)} = 296428 \cdot 10^{-10}$  aus Seiten und Diagonalen gemäß (2.2.4), die Inverse (keine Sondereinheiten)

$$\begin{bmatrix} 168675.0 & 0.0 & -16.1322 & -4.5930 \\ 0.0 & 168675.0 & -4.5930 & 16.1322 \\ -16.1322 & -4.5930 & 0.201668 & 0.0 \\ -4.5930 & 16.1322 & 0.0 & 0.201668 \end{bmatrix},$$

die Unbekannten

$$x = 0.881 \cdot 10^{-2}, y = -0.295 \cdot 10^{-2}, o = -0.069 \cdot 10^{-5}, \mu = -3.988 \cdot 10^{-5}$$

und schließlich das Ergebnis

$$X = 206865.284, Y = 14914.777, O = -23.6792, m = 0.9999601 \\ \sigma_x = \pm 1.2 \text{ mm}, \sigma_y = \pm 1.2 \text{ mm}, \sigma_o = \pm 1^{\circ}, \sigma_m = \pm 1.3 \cdot 10^{-6}.$$

Die angeführten Unsicherheiten gelten bei Verwendung der a priori eingeführten Varianz  $\sigma_o^2 = 9 \cdot 10^{-12}$ . Deren Schätzung  $s_o^2 = 20.3 \cdot 10^{-10}$  aus  $[vv] = 121 \cdot 10^{-10}$  mit  $\bar{u} = 6$  kann wegen  $s_o^2/\sigma_o^2 = 226 \gg \chi_{6,\gamma}^2/6$  aufgrund der Zwängung nicht erwartungstreu sein. Wird sie trotzdem für die Angabe der Unsicherheiten herangezogen, dann sind die angegebenen Werte mit 15 zu multiplizieren.

Die Bestimmung der tatsächlichen Lageunsicherheit wäre nur anhand der meist unbekanntesten Dispersionsmatrix  $\mathbf{S}_F$  des Festpunktfeldes durch Auswertung der Formel (2.2.5) möglich. Ihre üblicherweise in Form der mittleren Lageunsicherheiten der Ziele gegebene Spur genügt dabei nicht, weil auf diese Weise die meist höhere Nachbargenauigkeit verlorengeht. Aus diesem Grund muß auch hier die Angabe einer realistischen Lageunsicherheit unterbleiben.

b) frei

Die Berechnung der Sonderlösung  $\mathbf{x}'$  nach (2.3.1) ist zwar für die eigentliche Punktbestimmung unwichtig, zeigt aber im Vergleich mit der bestmöglichen Anpassung die Wirkung der in  $\mathbf{z}$  zusammengefaßten Parameter. Aus (1.2.3) ist ersichtlich, daß eine Teilmatrix von  $\mathbf{B}^{-1}$  zufolge

$$\mathbf{B}_i^{-1} = \begin{bmatrix} -\Delta y_i & \Delta x_i \\ \Delta x_i & \Delta y_i \end{bmatrix} = \Delta \mathbf{X}_i \quad (3.2.1)$$

aus den Koordinatendifferenzen zu den Zielpunkten zusammengesetzt ist. Diese, die auf den Schwerpunkt bezogenen Koordinaten und die auch in Tabelle 4 enthaltenen Absolutglieder sind im linken Teil der Tabelle 5 zusammengefaßt. Mit ihnen können vorerst nach (2.3.1) die Sonderlösungen  $\mathbf{x}'$  und unabhängig davon nach (2.3.4) der Lösungsvektor  $\mathbf{z}$  berechnet werden, nämlich

$$x = 0.550 \cdot 10^{-2}, y = 0.000, o = 0.276 \cdot 10^{-5}, \mu = 3.776 \cdot 10^{-5}.$$



F <sub>i</sub>	$\bar{X} / \bar{Y}$	$\Delta x / \Delta y$	r/l	x'	x
			$1 \cdot 10^{-7}$	mm	mm
1	751.85	796.04	239.7	17	-4
	-431.61	-422.61	91.9	15	33
2	449.23	493.42	-497.4	55	41
	910.66	919.66	179.8	-8	-41
3	-564.56	-520.37	397.9	-53	-29
	777.35	786.35	425.9	13	-18
4	-808.20	-764.01	-541.7	-88	-51
	-424.65	-415.65	854.6	6	20
5	171.67	215.86	397.9	42	43
	-831.73	-822.73	416.2	-26	6

Tabelle 5: Zahlenwerte zur freien Ausgleichung.  
Die als Rechenprobe dienende Bedingung  $[x] = 0$  ist erfüllt!

Seine Verwertung in (2.3.3) liefert sodann die bestangepaßten Koordinaten  $\mathbf{x}$ , deren Summe zwecks Verprobung der numerischen Rechenoperationen verschwinden muß, wie die Summation über die Komponenten von (2.3.3) nach Einsetzen der Lösung (2.3.4) unter Berücksichtigung von (2.3.1) und (3.2.1) zeigt. Die Covarianzmatrix in (2.3.5) lautet

$$\begin{bmatrix} 170824.1 & 0.0 & -19.2 & 5.2 \\ 0.0 & 170824.1 & 5.2 & 19.2 \\ -19.2 & 5.2 & 0.20421 & 0.0 \\ 5.2 & 19.2 & 0.0 & 0.20421 \end{bmatrix},$$

so daß schließlich die freie Ausgleichung das Resultat

$$X = 206865.280, Y = 14914.780, O = -23.6790, m = 0.9999622 \\ \sigma_x = \pm 1.2 \text{ mm}, \sigma_y = \pm 1.2 \text{ mm}, \sigma_o = \pm 1''^{\text{cc}}, \sigma_m = \pm 1.3 \cdot 10^{-6}$$

liefert. Wegen der sehr guten Näherungskordinaten sind die berechneten Änderungen eher unauffällig und lassen eine Ermittlung der plausibelsten Werte überflüssig erscheinen, wenn gleich die hier geschilderte Vorgangsweise gemäß (2.3.4) nur geringen Aufwand verlangt. Gleiches gilt für die Angabe der Lageunsicherheit, und zwar insbesondere hinsichtlich des Festpunkteinflusses, da  $\mathbf{S}_x'$  und  $\mathbf{S}_F$  nur zu summieren und dann gemeinsam mit der gleichen Kombination von  $\mathbf{G}$  zu transformieren sind. Neben der geometrisch wichtigen Eigenschaft, daß bei freier Ausgleichung der Meßsatz nicht deformiert wird, sind demnach auch die anzuwendenden Algorithmen einfacher. Eine erwartungstreue Schätzung der Meßunsicherheit ist allerdings nicht möglich; diese muß a priori bekannt sein.

#### 4. Schlußbemerkungen

Der Begriff Quasistrecke wird vermutlich nicht überall auf Gegenliebe stoßen. Da er sich aber physikalisch begründen läßt und sowohl im deterministischen als auch im stochastischen Auswertemodell unübersehbare Vorteile bringt, ist zumindest die Beschäftigung mit dieser Art von Meßgröße berechtigt. Außerdem ist auch ohne Beweis einzusehen, daß Quasistrecken stochastisch ungünstiger sind als Absolutstrecken. Gestaltungskriterien, die mit dem Modell Quasistrecke gefunden wurden, können demnach ohne weiteres auf Meßdispositionen mit

Absolutstrecken übertragen werden, welche dann aufgrund ihrer größeren Steifigkeit bessere Resultate liefern müßten. Die eigentliche Rechtfertigung der Quasistrecke ist jedoch die freie Stationierung mittels Helmertrtransformation, welche den eingangs definierten Maßstabsdefekt in der Streckenmessung klar impliziert.

#### Literatur

*Brandstätter, G.*: Einzelpunktbestimmung mit Richtungen und Streckenkombinationen im Neupunkt; Z. f. Vermessungswesen 111, 405–416, 1986a

*Brandstätter, G.*: Der ebene Quasistreckenschnitt; Geowissenschaftliche Mitteilungen der TU Wien, Heft 29, 19–32, 1986b

*Brandstätter, G.*: Polygonzugartige Mehrfachpunktbestimmung mit Winkeln und Quasistrecken; Z. f. Vermessungswesen 112, 515–525, 1987

*Grafarend, E. et al.*: Optimierung geodätischer Meßoperationen; Verlag Herbert Wichmann – Karlsruhe, 1979

*Pelzer, H. et al.*: Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II; Konrad Wittwer – Stuttgart, 1985

*Rinner, K.* Über die Ausgleichung von Prüfnetzen; Sonderheft der Nachrichten aus dem Karten- und Vermessungswesen, 115–131, Inst. f. Ang. Geodäsie, Frankfurt a. M., 1969

Manuskript eingelangt im Oktober 1988