Eliminierung der nicht-signifikanten Parameter bei der Transformation zwischen ungleichartigen Koordinatensystemen

Klaus Hanke [1]

[1] *Universität Innsbruck, Institut für Geodäsie, Technikerstraße 13, A-6020 Innsbruck*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **76** (4), S. 432–439

1988

Eliminierung der nicht-signifikanten Parameter bei der Transformation zwischen ungleichartigen Koordinatensystemen

Von *Klaus Hanke*, Innsbruck

Kurzfassung

Zur Abbildung von Punkten von einem in ein anderes Koordinatensystem werden meist lineare Transformationen verwendet. Die Anzahl identer Punkte ist im allgemeinen gering und ihre Verteilung nicht immer frei wählbar, sodaß die Art der Transformation z. B. starken Einfluß auf die Zuverlässigkeit der berechneten Parameter hat. Ausgehend von einer Affintransformation wird — durch Test der einzelnen Parameter auf Signifikanz — ein Minimalsystem von Transformationsunbekannten angestrebt und dadurch die Sicherheit deren Bestimmung erhöht. Weiters wird gezeigt, wie eine Vielzahl linearer Transformationen aus der Affintransformation durch Kombination der vorgestellten, restriktiven Bedingungen abgeleitet werden können.

Summary

Regarding the transformation of points from one coordinate system to an other the choice of its parameters is based on a statistical test of significance. Insignificant parameters are eliminated by setting up constraints. Thus a number of linear transformations are derived, which describe the connection between the coordinate systems in a sufficient way.

1. Einleitung

Mit den zunehmenden Möglichkeiten der graphischen Datenverarbeitung gewinnt auch die Verknüpfung numerischer und graphischer Daten an Bedeutung. Im Zusammenhang mit der Digitalisierung von Plänen und Karten (Analog-Digital-Umwandlung), stellt sich die Aufgabe, die gemessenen Koordinaten vom System des Digitalisiertisches in ein geodätisches Koordinatensystem überzuführen. Hiezu werden aus identen Punkten Transformationsparameter bestimmt, die eine bijektive Abbildung zwischen den beiden Koordinatensystemen beschreiben.

Bei der Wahl des funktionalen Modells der Transformation ist oft die Zahl identer Paßpunkte entscheidend. Eventuell werden noch Zusatzinformationen über die Entstehung der graphischen Vorlage oder spezielle Eigenschaften des Zeichenträgers (z. B. Papierverzug) berücksichtigt.

Kennt man mehr Punkte in beiden Systemen als zur eindeutigen Bestimmung der Transformationsparameter nötig sind, wird eine Schätzung nach dem Gauß'schen Minimumsprinzip möglich. Zur Aufdeckung von Ausreißern verwendet man statistische Verfahren, die Entscheidungen über Verbleib oder Streichung fehlerhafter Messungen erleichtern.

Ausgehend von einer Affintransformation lassen sich die „impliziten" Transformationsparameter — Maßstäbe und Drehwinkel — infolge ihrer Korrelationsfreiheit auf Signifikanz testen und sowohl die Gefahr einer Über- als auch einer Unterparametrisierung des Ausgleichsmodells vermeiden.

2. Das Modell der überbestimmten linearen Transformation

Allgemein läßt sich eine Transformation von einem Koordinatensystem (x', y') in ein anderes System (x, y) durch folgende Gleichungen beschreiben:

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 x' + a_2 y' + a_3 x'^2 + a_4 x'y' + a_5 y'^2 \ldots \\ y &= b_0 + b_1 x' + b_2 y' + b_3 x'^2 + b_4 x'y' + b_5 y'^2 \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

2.1. Affintransformation

Setzt man voraus, daß sich eine Gerade wieder als solche abbilden und auch die Parallelität zweier Geraden erhalten bleiben soll, so beschränkt man sich auf die konstanten und linearen Glieder. Diese allgemeine lineare Transformation wird auf Grund ihrer geometrischen Eigenschaften auch als affine Transformation bezeichnet und beinhaltet sechs Parameter, die zu bestimmen sind.

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1x' + a_2y' \\ y &= b_0 + b^1x' + b_2y' \end{aligned} \tag{2}$$

Implizit sind in den sechs Parametern $a_0, \ldots, b_2$ die anschaulicheren Größen – zwei Verschiebungen, zwei Verdrehungen und zwei Maßstäbe – enthalten:

$$\begin{aligned} &a_0 = x_0 \ldots \text{Verschiebung der Systeme in x-Richtung} \\ &b_0 = y_0 \ldots \text{Verschiebung der Systeme in y-Richtung} \\ &a_1 = \mu_x \cos\varphi_x, \qquad a_2 = -\mu_y \sin\varphi_y \\ &b_1 = \mu_x \sin\varphi_x, \qquad b_2 = \mu_y \cos\varphi_y \end{aligned} \tag{3}$$

μ_x, μ_y ... Maßstäbe in x'- bzw. y'-Richtung
φ_x, φ_y ... Verdrehung der x'- bezüglich x-Achse bzw. y'- bezüglich y-Achse

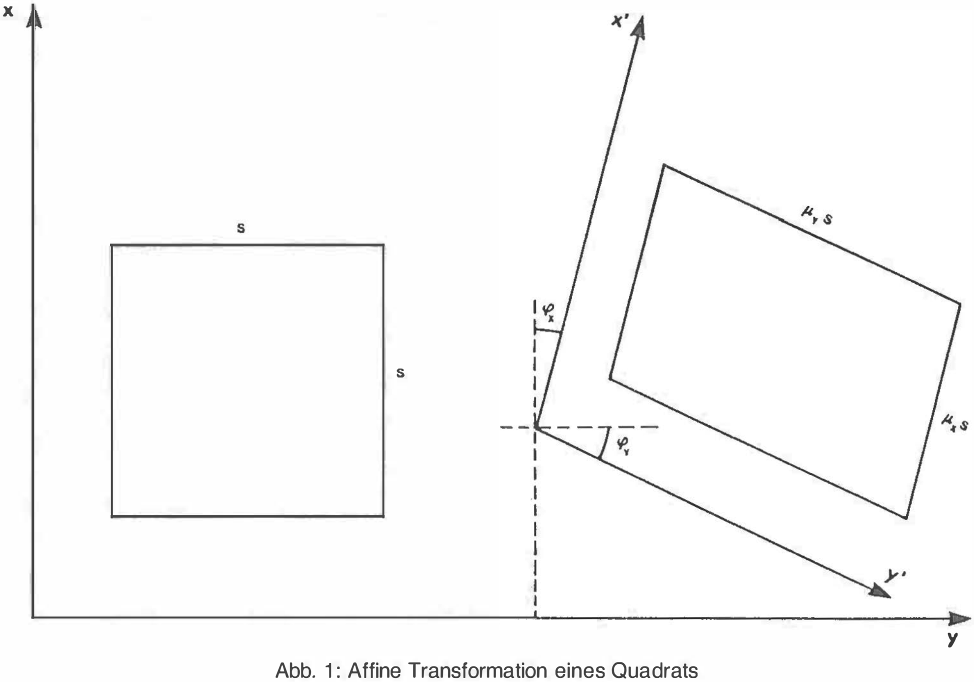

Abb. 1: Affine Transformation eines Quadrats

Abbildung 1 zeigt, wie ein Quadrat mit der Seitenlänge s in ein Parallelogramm mit den Seiten μ_x s und μ_y s transformiert wird.

Zur Bestimmung der sechs Transformationsparameter werden drei Paßpunkte benötigt. Ist deren Anzahl größer, wird eine Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen (Parameterschätzung in einem Gauß-Markov-Modell) möglich.

Aus numerischen Gründen ist die Einführung von Näherungen für die Unbekannten sinnvoll. Aus den Gleichungen (2) kann sodann das funktionale Modell in Form von Verbesserungsgleichungen formuliert werden. Die Meßwerte in beiden Koordinatenrichtungen unterliegen keiner physikalischen Korrelation und können daher als unabhängige Beobachtungen gleicher Varianz gelten (Brandstätter, 1981).

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{l}, \quad \mathbf{K}_l = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1} = \sigma_0^2 \mathbf{E} \tag{4}$$

Es sind: **A** die n × u Koeffizientenmatrix, $\hat{\mathbf{z}}$ der n × 1 Vektor der geschätzten Unbekannten, **l** der n × 1 Zufallsvektor der Beobachtungen mit der Kovarianzmatrix $\mathbf{K}_l$, **v** der n × 1 Vektor der Verbesserungen, σ_0^2 die Varianz der Gewichtseinheit und **P** die n × n positiv definite Gewichtsmatrix.

Nach Inversion der regulären Normalgleichungsmatrix **N** ergeben sich die geschätzten Transformationsparameter

$$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\, \mathbf{A}^T\mathbf{P}\,\mathbf{l} \tag{5}$$

sowie der geschätzte Gewichtseinheitsfehler

$$s_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}}{r}} \tag{6}$$

mit der Gesamtredundanz

$$r = 2p - 6 \qquad p \ldots \text{Anzahl der Paßpunkte}$$

2.2. Aufdeckung grober Fehler

Um die Unverzerrtheit der Meßdaten zu überprüfen, können die standardisierten (Baarda, 1968) oder auch studentisierten Residuen v_i statistisch getestet werden. Bei Vorliegen von mehreren groben Fehlern muß dieses Verfahren iterativ angewendet werden, wobei — bedingt durch die Korrelationen zwischen den Verbesserungen — jeweils nur die Messung mit der maximalen Testgröße T_i als fehlerhaft zu betrachten ist.

$$T_i = \frac{v_i}{s_{v_i}} \sim t_{2p-7} \tag{7}$$

mit

$$s_{vi}^2 = \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v} - \frac{v_i^2}{q_{v_i}}}{2p-7}\, q_{v_i} \tag{8}$$

q_{v_i} . . . Hauptdiagonalelement der Kofaktorenmatrix der Verbesserungen

Häufig tritt jedoch bei Messungen dieser Art ein Ausreißer in Beobachtungspaaren auf (Koch, 1985), weil eine falsche Punktlage oder Punktverwechslung im allgemeinen zu zwei fehlerhaften Koordinaten führt.

Man muß daher — eventuell zusätzlich — die zusammengehörigen Koordinaten eines Punktes gemeinsam testen. Als Testgröße dient dann

$$T_{P_i} = \frac{v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2}{2s_{v_i}^2} \sim F_{2,2p-8}$$

mit (9)

$$s_{v_i}^2 = \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{p}\mathbf{v} - \frac{v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2}{q_{v_i}}}{2p-8}\, q_{v_i}$$

Diese Testgröße wird für jeden Paßpunkt berechnet und folgt bei Unverzerrtheit einer F-Verteilung mit den Freiheitsgraden $f_1 = 2$ und $f_2 = 2p - 8$.

Dabei können zwischen den Tests mit den Testgrößen (7) und (9) widersprüchliche Ergebnisse zustandekommen. Beurteilung und Entscheidung über das weitere Vorgehen müssen deshalb der Sachkenntnis und Erfahrung des bearbeitenden Vermessungsingenieurs vorbehalten bleiben (vergleiche Lenzmann, 1984) und sollten keinesfalls einer einfachen Fallunterscheidung eines Rechenprogramms überlassen werden.

2.3. Test auf signifikante Parameter

Führt man die als Ergebnis der Ausgleichung erhaltenen Parameter $a_0 \ldots b_2$ in die anschaulicheren Größen — Verschiebungen, Drehwinkel und Maßstäbe — über, so läßt sich leichter der funktionale Zusammenhang zwischen den beiden Koordinatensystemen erkennen.

Durch diese Umformung erhält man neue, statistisch unabhängige Größen und es wird möglich, diese auf Signifikanz zu testen.

Es sind

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \arctan\frac{b_1}{a_1} \qquad \mu_x = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \\ \varphi_y &= \arctan\frac{-a_2}{b_2} \qquad \mu_y = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \\ x_0 &= a_0 \qquad y_0 = b_0\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Durch Fehlerfortpflanzung ergibt sich aus der Kofaktorenmatrix der Modellparameter $a_0, \ldots, b_2$ die Kofaktorenmatrix der anschaulichen Parameter $\varphi_x, \varphi_y, \mu_x, \mu_y, x_0, y_0$.

$$\mathbf{Q_F = FQ_zF^T} \tag{11}$$

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_x}{\partial a_0} & \frac{\partial\varphi_x}{\partial b_0} \ldots & \frac{\partial\varphi_x}{\partial b_2} \\ \frac{\partial\varphi_y}{\partial a_0} & \frac{\partial\varphi_y}{\partial b_0} \ldots & \frac{\partial\varphi_y}{\partial b_2} \\ \vdots & \vdots \quad \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_0}{\partial a_0} & \frac{\partial y_0}{\partial b_0} \ldots & \frac{\partial y_0}{\partial b_2} \end{pmatrix}$$

Fragestellung 1: Sind die Maßstäbe in x- und y-Richtung signifikant verschieden?
Nullhypothese $H_0 : E(\mu_x - \mu_y) = 0$, E ... Erwartungswert

Die abgeleitete Testgröße

$$t_\mu = \frac{\mu_x - \mu_y}{\sqrt{s^2_{\mu_x} + s^2_{\mu_y}}} \tag{12}$$

folgt einer Student-Verteilung mit dem Freiheitsgrad 2p — 6.

Ist die Testgröße t_μ größer als der zulässige Grenzwert t_0 (95%— Fraktil der t-Verteilung), so muß die Nullhypothese verworfen werden und die Maßstäbe der x- und der y-Achse sind als verschieden anzusehen.

Fragestellung 2: Sind die Drehwinkel zwischen der x- und x'-Achse sowie zwischen y- und y'-Achse signifikant verschieden? Ist zwischen den Achsen eine Scherung nachweisbar?

Nullhypothese $H_0 : E(\varphi_x - \varphi_y) = 0$

Die Testgröße

$$t_\varphi = \frac{\varphi_x - \varphi_y}{\sqrt{s^2_{\varphi_x} + s^2_{\varphi_y}}} \tag{13}$$

folgt ebenfalls einer t-Verteilung mit dem Freiheitsgrad 2p − 6. Ist die Testgröße t_φ größer als der Grenzwert t_0, so wird die Nullhypothese zu verwerfen sein. Eine signifikante Scherung ist anzunehmen.

Fragestellung 3: Unterscheiden sich die Maßstäbe vom Planmaßstab?

Sowohl für den Fall, daß die Maßstäbe in den Koordinatenrichtungen statistisch nachweislich von einander verschieden sind, als auch dann, wenn sich nur ein Maßstab für das Gesamtsystem feststellen läßt, sind diese noch auf Signifikanz bezüglich des vorgegebenen Plan- oder Kartenmaßstabs der graphischen Vorlage testbar, da sie mit den übrigen Parametern nicht oder nur schwach korreliert sind.

Nullhypothese $H_0 : E(\mu_{x,y}) = \mu_0$

Testgröße:

$$t_\mu = \frac{\mu_0 - \mu_{x,y}}{s_{\mu_{x,y}}} \tag{14}$$

Diese Testgröße ist — bei Annahme von H_0 — Student-verteilt mit dem Freiheitsgrad der jeweiligen Transformation. Unterschreitet sie das entsprechende Fraktil der t-Verteilung, so ist der berechnete Maßstab nicht signifikant verschieden vom Planmaßstab und es liegt ebenfalls eine Überparametrisierung vor.

Die beiden Drehwinkel sind zwar gegeneinander, als nicht planeigene Größen aber nicht einzeln für sich auf Signifikanz testbar.

Ist eine der Nullhypothesen angenommen worden, oder gar mehrere, so handelt es sich beim affinen Ansatz der Transformationsparameter nach (2) um eine Überparametrisierung des funktionalen Modells und eine Reduzierung um die nicht modellrelevanten Unbekannten ist notwendig. Dadurch erhöht sich der Freiheitsgrad in der Ausgleichung und führt so zu zuverlässigeren Schätzwerten für die verbliebenen Parameter und deren Genauigkeiten (Schwintzer, 1984).

3. Einführung von Bedingungen

Sollten ein oder mehrere Parameter als nicht signifikant entdeckt sein, muß eine Neuausgleichung erfolgen. Das bedeutet Aufstellen neuer Verbesserungsgleichungen und Wiederholung der kompletten Ausgleichung.

Eine Alternative zeigt sich, wenn man die durch Gleichsetzen von anschaulichen Parametern entstehenden Abhängigkeiten zwischen den Modellparametern durch die Einführung zusätzlicher Bedingungen modelliert. Dies führt die ursprünglich vermittelnde Ausgleichung in eine Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen über. Das neuerliche Linearisieren und Aufstellen von Verbesserungsgleichungen entfällt; die Normalgleichungen

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\,\mathbf{A})\,\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\,\mathbf{l} \tag{15}$$

werden um die aufgestellten Bedingungen

$$\mathbf{B}\,\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{w} \tag{16}$$

erweitert zu

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{P}\,\mathbf{a} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{P}\,\mathbf{l} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \tag{17}$$

Eine Invertierung bringt die neue Kofaktorenmatrix $\mathbf{Q}_z^{neu}$ und mit

$$\hat{\mathbf{z}}^{neu} = \mathbf{Q}_z^{neu}\,\mathbf{A}^T\mathbf{P}\,\mathbf{l}$$

die neuen Lösungen für die Transformationsparameter.

Da die Änderungen sowohl in der Kofaktorenmatrix als auch in den Unbekannten klein sein werden, lassen sich — auch ohne erneute Invertierung des Gesamtsystems — Zuschläge zur Kofaktorenmatrix $\mathbf{Q_z}$ und zu den Unbekannten $\hat{\mathbf{z}}$ berechnen (Wolf, 1975):

$$\mathbf{Q_z}^{neu} = \mathbf{Q_z} + \mathbf{dQ} \tag{18}$$

und

$$\hat{\mathbf{z}}^{neu} = \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{dz} \tag{19}$$

mit

$$\mathbf{dQ} = -\mathbf{Q_z B^T (B Q_z B^T)^{-1} B Q_z} \tag{20}$$

und

$$\mathbf{dx} = -\mathbf{Q_z B^T (B Q_z B^T)^{-1} (w + B Q_z A^T P l)} \tag{21}$$

3.1 Eliminierung einer nicht signifikanten Scherung

Eine nicht signifikante Scherung (Unterschied zwischen φ_x und φ_y) wird modelliert durch Gleichsetzen der beiden anschaulichen Transformationselemente

$$\varphi_x = \varphi_y \tag{22}$$

Ausgedrückt in Modellparametern lautet die Bedingung

$$\tan \varphi_x = \frac{b_1}{a_1} = -\frac{a_2}{b_2} = \tan \varphi_y \tag{23}$$

Die Linearisierung von (23) ergibt

$$a_2 da_1 + a_1 da_2 + b_2 db_1 + b_1 db_2 = 0 \tag{24}$$

Setzt man diese Bedingungsgleichung in (18) bis (21) ein, so ergeben sich die Transformationsparameter einer 5-Parameter-Transformation (Affintransformation ohne Scherung) bzw. deren Kovarianzmatrix.

3.2. Gleichsetzen der Maßstäbe μ_x und μ_y

Unterscheiden sich die berechneten Maßstäbe in den Koordinatenachsen nicht statistisch signifikant nach (12), so setzt man

$$\mu_x = \mu_y \tag{25}$$

In Modellparametern der affinen Transformation ausgedrückt

$$\mu_x^2 \cos^2 \varphi_x + \mu_x^2 \sin^2 \varphi_x = a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = \mu_y^2 \cos^2 \varphi_y + \mu_y^2 \sin^2 \varphi_y \tag{26}$$

Nach Linearisierung ist

$$a_1 da_1 - a_2 da_2 + b_1 db_1 - b_2 db_2 = 0 \tag{27}$$

die einzuführende Bedingungsgleichung. Das Ergebnis entspricht einer Affintransformation mit Scherung aber identischen Maßstäben in x und y.

3.3. Gleichsetzen der Maßstäbe und der Drehwinkel

Sind sowohl die Unterschiede zwischen μ_x und μ_y als auch die Scherung nicht signifikant, also

$$\varphi_x = \varphi_y \tag{28}$$

und

$$\mu_x = \mu_y$$

so lassen sich diese als Bedingungen formulieren

$$\mu_x \cos \varphi_x = a_1 = b_2 = \mu_y \cos \varphi_y \qquad (29)$$
$$\mu_x \sin \varphi_x = b_1 = -a_2 = \mu_y \sin \varphi_y$$

linearisiert ergibt das

$$\begin{aligned} da_1 - db_2 &= 0 \\ db_1 + da_2 &= 0. \end{aligned} \qquad (30)$$

Nach Einführung dieser Bedingungsgleichungen und Berechnung der Zuschläge zu den Modellparametern ergeben sich die Transformationselemente einer Helmert-Transformation sowie deren Kovarianzmatrix. Zum selben Ergebnis gelangt man durch Kombination der Bedingungen (24) und (27).

3.4. Eliminierung nicht-signifikanter Maßstäbe

Durch Einführung der zusätzlichen Bedingung

$$\mu_x = \mu_0 \qquad (31)$$

oder

$$\mu_y = \mu_0 , \qquad (32)$$

ausgedrückt in Modellparametern

$$\mu_x^2 \cos^2 \varphi_x + \mu_x^2 \sin^2 \varphi_x = a_1^2 + b_1^2 = \mu_0^2 \qquad (33)$$

bzw.

$$\mu_y^2 \cos^2 \varphi_y + \mu_y^2 \sin^2 \varphi_y = a_2^2 + b_2^2 = \mu_0^2 \qquad (34)$$

und linearisiert

$$a_1 da_1 + b_1 db_1 = 0 \qquad (35)$$

bzw.

$$a_2 da_2 + b_2 db_2 = 0 \qquad (36)$$

wird die entsprechende Maßstabsunbekannte festgehalten. Die sich dadurch ergebenden Änderungen (Zuschläge) zu den verbleibenden Parametern werden wiederum nach (21) berechnet. Die Varianz-Kovarianz-Matrix $\mathbf{Q_z}$ ergibt sich ebenfalls nach (18) und (20).

3.5. Zusammenstellung der möglichen Modellansätze

Ausgehend vom Ansatz der allgemeinen linearen Transformation (Affin-Transformation) lassen sich nun sowohl festgestellte Insignifikanzen der Parameter als auch z. B. durch die konkrete Aufgabenstellung vorgegebene Restriktionen durch Einführung von Bedingungen modellieren. Die folgende Tabelle stellt eine Übersicht der denkbaren Transformationen dar.

Nr.	Transformation	freie Unbek.	explizite Bedingungen	linearisierte Bedingungen
1	Affintransformation	6	—	—
2	. . . ohne Scherung	5	(22)	(24)
3	. . . gemeins. Maßstab	5	(25)	(27)
4	. . . festes μ_x	5	(31)	(35)
5	. . . festes μ_y	5	(32)	(36)
6	Ähnl. transf. (Helmert)	4	(22) + (25)	(24) + (27)
7	ohne Scherung, festes μ_x	4	(22) + (31)	(24) + (35)
8	ohne Scherung, festes μ_y	4	(22) + (32)	(24) + (36)
9	affin, feste Maßstäbe	4	(31) + (32)	(35) + (36)
10	Helmert, feste Maßstäbe	3	(22) + (31) + (32)	(24) + (35) + (36)

4. Zusammenfassung und Ausblick

Mit dem vorgestellten Algorithmus ist es möglich, für den Übergang zwischen zwei Koordinatensystemen bei Vorliegen von mehr als drei Paßpunkten unter Zuhilfenahme statistischer Testverfahren eine optimale Wahl der notwendigen, weil statistisch relevanten, Transformationsparameter zu ermitteln. Die Parameter werden dadurch sicherer und genauer bestimmt. Die Spur der Varianz-Kovarianzmatrix der Transformationsparameter wird kleiner.

Da durch Restklaffungen in den Paßpunkten die Nachbarschaftsgenauigkeit gestört ist, sollte nicht auf eine anschließende Interpolation der Klaffungen zur Glättung des transformierten Punkthaufens verzichtet werden. Als Algorithmen bieten sich hier unter anderen die verschiedensten Ansätze der Prädiktion (Kraus, Schuh), die multiquadratische Interpolation (Hardy, Fröhlich) und die proportionale Verteilung nach Winkel- und Abstandsgewichten (Overhoff, 1987) an.

Literatur

Baarda, W.: A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks. Publ. on Geodesy, New Series 2, Nr. 5, Delft 1968

Brandstätter, G.: Prüfung eines Digitalisiersystems. ÖZfVuPh. 1981, Heft 3 und 4

Fröhlich, H.: Die Verteilung von Restklaffungen im Modell multiquadratischer Funktionen. Vermessungsingenieur 1987, Heft 3

Hardy, R. L.: Geodetic Applications of Multiquadric Analysis. AVN 79, 1972

Koch, K.-R.: Test von Ausreißern in Beobachtungspaaren. ZfV 1985, Heft 1

Kraus, K.: Interpolation nach kleinsten Quadraten in der Photogrammetrie. BuL 40, 1972

Kraus, K.: Verschiedene Transformationen und Indikatoren zur Lokalisierung grober Datenfehler. AVN 1975, Heft 1

Kreyszig, E.: Statistische Methoden und ihre Anwendung. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1985

Lenzmann, L.: Zur Aufdeckung von Ausreißern bei überbestimmten Koordinatentransformationen. ZfV 1984, Heft 9

Schuh, W.-D.: Punkttransformationen unter Berücksichtigung lokaler Klaffungsverhältnisse. ÖZfVuPh, Heft 3, 1987

Schwintzer, P.: Zur Bestimmung der signifikanten Parameter in Approximationsfunktionen. Schriftenreihe der UniBwM, Heft 10, 1984

Overhoff, W.: Multiquadratisch oder zweidimensional proportional. Eine Untersuchung zur Transformation ungleichartiger Koordinaten. VR 1987, Heft 4 und 5

Werner, H.: Die Fünf-Paramter-Transformation — Zusammenhang mit anderen Verfahren und Elimination grober Fehler. AVN 1987, Heft 7

Wolf, H.: Ausgleichsrechnung. Dümmler Verlag, Bonn 1975

Manuskript eingelangt im Mai 1988