Berechnung der geopotentiellen Kotendifferenzen

Josef Zeger [1]

[1] *Quellenstraße 71 /4/23, 1100 Wien*

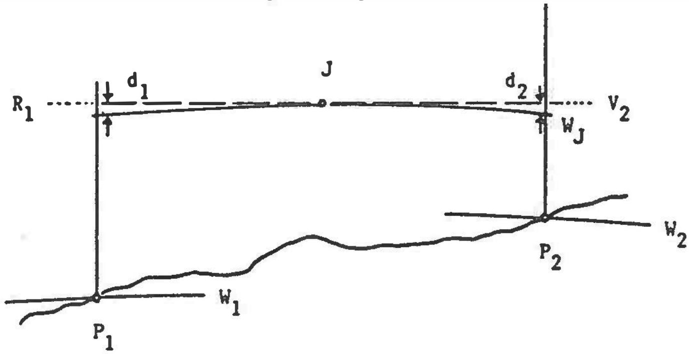
Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **76** (4), S. 416–420

1988

Berechnung der geopotentiellen Kotendifferenzen

Von *Josef Zeger*, Wien

Professor *Embacher* behauptet in seinem Artikel „Ein Versuch, die hypothesenfreie Reduktion des geometrischen Nivellements und die Schwerelosigkeit beim Freien Fall aus der Kräftefunktion darzustellen" im Heft 2/1988 der Schweizer Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik im Abschnitt 3, das Zusatzglied zu der Gleichung für die praktische Berechnung der geopotentiellen Kotendifferenz zwischen zwei Punkten wäre fehlerhaft. Dies zwingt dazu, für eine allgemein bekannte Tatsache vorerst die zugehörige Ableitung anzuführen und zu dieser Behauptung Stellung zu nehmen.



W_1, W_2 . . . Niveaufläche durch Punkt P_1 bzw. P_2
W_J . . . Niveaufläche durch Instrumentenhorizont
R_1 . . . Lattenablesung im Rückblick auf Lattenstandpunkt P_1
V_2 . . . Lattenablesung im Vorblick auf Lattenstandpunkt P_2
d_1, d_2 . . . Abstand im Punkt P_1 bzw. P_2 zwischen Horizontalebene und Niveaufläche durch den Instrumentenhorizont J
$\Delta C_{1,2}$ . . . Potentialdifferenz zwischen den Punkten P_1 und P_2

Nach *Ledersteger* in *Jordan/Eggert/Kneissl,* Band V, Seite 788—789, kann man die Potentialdifferenz $\Delta C_{1,2}$ in folgender Form erzeugen:

$$\Delta C_{1,2} = W_2 - W_1 = -\int_0^{R_1-d_1} g \, . \, dh - \int_{R_1-d_1}^{V_2-d_2} g \, . \, dh - \int_{V_2-d_2}^{0} g \, . \, dh \tag{1}$$

Das mittlere der drei Integrale von Gleichung (1) wird über die Niveaufläche durch den Instrumentenhorizont J geführt und ist daher gleich Null, da sämtliche dh gleich Null sind. Nach Auflösung der beiden übrigen Integrale wird die Gleichung (1) zu

$$\Delta C_{1,2} = -\bar{g}_1 \, . \, (R_1 - d_1) + \bar{g}_2 \, . \, (V_2 - d_2) \tag{2}$$

Helmert hat im Band II seines Buches *„Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie"* im Kapitel 7 auf Seite 503 diese Gleichung etwas umgeformt, was auch Ledersteger übernommen hat:

$$\begin{aligned}\Delta C_{1,2} = &- \tfrac{1}{2} \, . \, (R_1 - V_2) \, . \, (\bar{g}_1 + \bar{g}_2) - \tfrac{1}{2} \, . \, (R_1 + V_2) \, . \, (\bar{g}_1 - \bar{g}_2) + \\ &+ \tfrac{1}{2} \, . \, (d_1 - d_2) \, . \, (\bar{g}_1 + \bar{g}_2) + \tfrac{1}{2} \, . \, (d_1 + d_2) \, . \, (\bar{g}_1 - \bar{g}_2)\end{aligned} \tag{3}$$

Sowohl Ledersteger als auch Helmert haben bereits gezeigt, daß das dritte und vierte Glied in der Gleichung (3) vernachlässigt werden kann. Das bedeutet, daß die Abstände d_1 und d_2 keine praktische Auswirkung haben. Man kann die beiden letzten Glieder der Gleichung (3) auch ausmultiplizieren und kommt dann schließlich auf die Form $d_1 . \overline{g}_1 - d_2 . \overline{g}_2$, also auf einen vernachlässigbar kleinen Wert.

Die mittleren Schwerewerte $\overline{g}_1$ und $\overline{g}_2$, bezogen auf die Hälfte der Lattenablesungen R_1 bzw. V_2, können aus den in den Punkten P_1 und P_2 gemessenen Oberflächenschwerewerten g_1 und g_2 unter Verwendung der äußeren Vertikalgradienten $\delta g_1^{(V_a)}$ und $\delta g_2^{(V_a)}$ abgeleitet werden:

$$\overline{g}_1 = g_1 - \frac{R_1}{2} . \delta g_1^{(V_a)} \quad \text{und} \quad \overline{g}_2 = g_2 - \frac{V_2}{2} . \delta g_2^{(V_a)} \tag{4}$$

Auf diese kurze Entfernung zwischen den beiden Lattenaufstellungen beim Nivellement kann man die an sich unterschiedlichen beiden Vertikalgradienten genähert als gleich groß annehmen, vor allem im Hinblick darauf, daß es letztlich um die Abschätzung der Größe des Zusatzgliedes zu der Gleichung für die Berechnung der geopotentiellen Koten geht:

$$\delta g_1^{(V_a)} \doteq \delta g_2^{(V_a)} \doteq \delta g^{(V_a)} \tag{5}$$

Damit wird die Gleichung (3) zu

$$\Delta C_{1,2} = -\tfrac{1}{2} . (g_1 + g_2) . (R_1 - V_2) - \tfrac{1}{2} . (g_1 - g_2) . (R_1 + V_2) + \\ + \tfrac{1}{2} . (R_1 + V_2) . (R_1 - V_2) . \delta g^{(V_a)} \tag{6}$$

Man kann nun setzen

$$R_1 - V_2 = \Delta h_{1,2} \tag{7}$$

Weiters kann g_2 durch g_1 ausgedrückt werden:

$$g_2 = g_1 - \Delta h_{1,2} . \delta g^{(V_a)} + s_{1,2} . \delta g_{1,2}^{(H_a)} \tag{8}$$

$\delta g_{1,2}^{(H_a)}$ ist der äußere Horizontalgradient in der Richtung vom Punkt P_1 nach dem Punkt P_2. $s_{1,2}$ stellt die Horizontalentfernung zwischen diesen beiden Punkten dar. Man kann somit die Differenz der Oberflächenschwerewerte ausdrücken durch

$$g_1 - g_2 = \Delta h_{1,2} . \delta g^{(V_a)} - s_{1,2} . \delta g_{1,2}^{(H_a)} \tag{9}$$

Führt man dies in die Gleichung (6) ein, dann erhält man

$$\Delta C_{1,2} = -\tfrac{1}{2} . (g_1 + g_2) . \Delta h_{1,2} - \tfrac{1}{2} . \delta g^{(V_a)} . \Delta h_{1,2} . (R_1 + V_2) + \\ + \tfrac{1}{2} . \delta g^{(V_a)} . \Delta h_{1,2} . (R_1 + V_2) + \tfrac{1}{2} . s_{1,2} . (R_1 + V_2) . \delta g_{1,2}^{(H_a)},$$

woraus dann schließlich wird

$$\Delta C_{1,2} = -\tfrac{1}{2} . (g_1 + g_2) . \Delta h_{1,2} + \tfrac{1}{2} . s_{1,2} . (R_1 + V_2) . \delta g_{1,2}^{(H_a)} \tag{10}$$

Das erste Glied der Gleichung (10) stellt die bekannte Formel für die Berechnung der geopotentiellen Kotendifferenzen dar, dann kommt das Zusatzglied, von dem noch zu überprüfen ist, ob es einen praktischen Einfluß ausübt. Im allgemeinen wird jedoch die Schweremessung nicht bei den einzelnen Lattenstandpunkten vorgenommen, sondern bei den stabilisierten Höhenfestpunkten. Man muß daher die Gleichung (10) für die einzelnen Teilstücke zwischen zwei Höhenfestpunkten A und B aufsummieren:

$$\Delta C_{A,B} = \Delta C_{A,1} + \Delta C_{1,2} + \ldots + \Delta C_{n-1,n} + \Delta C_{n,B} \tag{11}$$

Nimmt man von der Gleichung (10) das erste Glied und summiert man dieses über die einzelnen Teilstrecken auf, kann man den jeweils ersten der beiden Schwerewerte mit dem Vertikalgradienten vom Schwerewert g_A ableiten und den jeweils zweiten Schwerewert vom Schwerewert g_B. Dann erhält man für diese Teilsumme letztlich den Ausdruck

$$-\tfrac{1}{2} . (g_A + g_1) . \Delta h_{A,1} - \tfrac{1}{2} . (g_1 + g_2) . \Delta h_{1,2} - \ldots - \tfrac{1}{2} . (g_{n-1} + g_n) . \Delta h_{n-1,n} - \\ - \tfrac{1}{2} . (g_n + g_B) . \Delta h_{n,B} = -\tfrac{1}{2} . (g_A + g_B) . \Delta h_{A,B} \tag{12}$$

Summiert man dann die zweiten Glieder der Gleichung (10) über alle Teilstrecken auf, dann kann man den Horizontalgradienten herausheben und es verbleibt die Summe der Produkte aus den Teilstreckenlängen mal der Summe aus Rückblick und Vorblick. Die einzelnen Summen ($R_i + V_k$) haben immer ungefähr die gleiche Größe von etwa 3,4 m. Man kann sie daher praktisch einander gleich setzen:

$$R_A + V_1 \doteq R_1 + V_2 \doteq \ldots \doteq R_{n-1} + V_n \doteq R_n + V_B \doteq 3{,}4 \text{ m} \tag{13}$$

Damit wird schließlich die Gleichung (11) zu

$$\Delta C_{A,B} = -\tfrac{1}{2} \,.\, (g_A + g_B) \,.\, \Delta h_{A,B} + \tfrac{1}{2} \,.\, 3{,}4 \,.\, s_{A,B} \,.\, \delta g_{A,B}^{(H_a)} \tag{14}$$

Statt des im allgemeinen nicht bekannten mittleren Horizontalgradienten zwischen den Punkten A und B kann der Differenzenquotient der Schwerewerte im Niveau des höher gelegenen Punktes verwendet werden:

$$\delta g_{A,B}^{(H_a)} \doteq \frac{g_B - \{(g_A - \Delta h_{A,B} \,.\, \delta g^{(V_a)}\}}{s_{A,B}} \tag{15}$$

Damit erhält die Gleichung (14) folgende Endform:

$$\Delta C_{A,B} = -\tfrac{1}{2} \,.\, (g_A + g_B) \,.\, \Delta h_{A,B} + 1{,}7 \,.\, \{g_B - g_A + \Delta h_{A,B} \,.\, \delta g^{(V_a)}\} \tag{16}$$

Diese Vereinfachungen dürfen selbstverständlich nur dann vorgenommen werden, wenn der Schwerewert sich zwischen den Punkten A und B linear ändert, anderenfalls müßte ja an der zu erwartenden Bruchstelle eine zusätzliche Schweremessung vorgenommen werden.

So weit nun die Ableitung der Gleichung für die Berechnung der geopotentiellen Kotendifferenzen. Jetzt einige *Anmerkungen zu dem Artikel von W. Embacher*. Er führt z. B. an, daß Helmert und Ledersteger bei der Potentialdifferenz zweier Punkte, gegeben durch seine Gleichung (6,0), identisch mit dem ersten Glied der Gleichung (6) hier, das Restglied

$$\tfrac{1}{2} \,.\, (z_2 + z_1) \,.\, (g_2 - g_1)$$

„wegen angeblicher Geringfügigkeit" vernachlässigt hätten. Der Gleichung (6) des vorliegenden Beitrages kann man entnehmen, daß der zu Recht vernachlässigte Teil in der Schreibweise von Embacher folgende Form hat:

$$-\tfrac{1}{2} \,.\, (z_1 + z_2) \,.\, (g_1 - g_2) + \tfrac{1}{2} \,.\, (z_1 + z_2) \,.\, (z_1 - z_2) \,.\, V_a \,.$$

Im Anschluß an seine Gleichung (7,0), die identisch ist mit der Gleichung (10) aus der Ableitung hier, behauptet Embacher, ein Reduktionsglied der Potentialdifferenz könne nicht von der jeweiligen Instrumentenhöhe abhängen. Dazu ist vor allem einmal festzustellen, daß die hier durchgeführte Ableitung selbstverständlich unabhängig von der bei einem Nivellement möglichen Geländeform ist. Man kann daher im allgemeinen die halbe Summe von Rückblick und Vorblick nicht gleich der Instrumentenhöhe setzen. In dem Zusatzglied steckt daher im allgemeinen nicht die Instrumentenhöhe. Daß das Zusatzglied aber die halbe Summe von Rückblick und Vorblick enthält, stammt aus dem Ersetzen der mittleren Schwerewerte $\bar{g}_i$ durch die Schwerewerte g_i in den zugehörigen Bodenpunkten unter Verwendung der Gleichungen (4) und muß daher auch so sein.

Für seine weitere Ableitung geht Embacher von der Gleichung (2) hier aus, wobei er berechtigterweise die Glieder mit d_i vernachlässigt. Es ist dann

$$\Delta C_{1,2} = -\bar{g}_1 \,.\, R_1 + \bar{g}_2 \,.\, V_2 \tag{17}$$

Setzt man hier die Gleichungen (4) ein, erhält man

$$\Delta C_{1,2} = -g_1 \,.\, R_1 + g_2 \,.\, V_2 + \frac{R_1^2}{2} \,.\, \delta g_1^{(V_a)} - \frac{V_2^2}{2} \,.\, \delta g_2^{(V_a)} \tag{18}$$

Könnte nun ein Nivellement ausschließlich auf ein und derselben Niveaufläche durchgeführt werden, dann müßte die geopotentielle Kotendifferenz $\Delta C_{1,2}$ gleich Null sein. Die Gleichung (18) würde dann zu

$$g_1 \,.\, R_1 - g_2 \,.\, V_2 = \frac{R_1^2}{2} \,.\, \delta g_1^{(V_a)} - \frac{V_2^2}{2} \,.\, \delta g_2^{(V_a)}. \tag{19}$$

Für die hier durchzuführenden Überlegungen darf allerdings nicht die durch die Gleichung (5) gegebene näherungsweise Gleichsetzung der Vertikalgradienten eingeführt werden. Man kann aber andererseits davon ausgehen, daß bei einem Nivellement auf einer Niveaufläche Vorblick und Rückblick gleich groß sind:

$$R_1 = V_2 = Z \tag{20}$$

Führt man dies in die Gleichung (19) ein, dann erhält man

$$Z \,.\, (g_1 - g_2) = \frac{Z^2}{2} \,.\, \{\delta g_1^{(V_a)} - \delta g_2^{(V_a)}\} \tag{21}$$

Dies wird weiter zu

$$g_1 - g_2 = \frac{Z}{2} \,.\, \{\delta g_1^{(V_a)} - \delta g_2^{(V_a)}\} \tag{22}$$

Hätte man also hier, so wie dies Embacher macht, die näherungsweise Gleichsetzung der Vertikalgradienten durch Gleichung (5) eingeführt, dann würde die rechte Seite der Gleichung (22) zu Null werden. Dies würde weiters bedeuten, daß $g_1 = g_2$ sein müßte. Dies ist jedoch im allgemeinen auch auf einer Niveaufläche nicht der Fall.

Nach diesen Überlegungen würde, falls dies praktisch möglich wäre, für ein Nivellement auf einer Niveaufläche nach Einführung der Gleichung (20) die Gleichung (18) zu

$$\Delta C_{1,2} = - Z \,.\, (g_1 - g_2) + \frac{Z^2}{2} \,.\, \{\delta g_1^{(V_a)} - \delta g_2^{(V_a)}\} = 0 \tag{23}$$

So viel zu der Gleichung (10) von Embacher. Er hat diese Gleichung unter der Voraussetzung abgeleitet, daß das Nivellement auf ein und derselben Niveaufläche durchgeführt würde. Unerklärlicherweise leitet Embacher dann aus dieser Gleichung plötzlich die Konvergenz z w e i e r Niveauflächen vom Äquator bis zum Pol mit einem Höhenunterschied von 1,50 m ab, was natürlich den ursprünglich gemachten Voraussetzungen voll und ganz widerspricht.

Vergleicht man nun die Gleichung (11) von Embacher mit der Gleichung (10) hier, dann stellt man fest, daß beide Gleichungen bis auf ein Vorzeichen im Zusatzglied identisch sind. Die Gleichung (10) hier enthält im zweiten Glied den Faktor $(R_1 + V_2)$, in der Gleichung (11) von Embacher steht statt dessen $-\Delta h_{2,1}$, dies ist nach Gleichung (7) von hier gleich $(R_1 - V_2)$. Für ein Zusatzglied, das in der praktischen Berechnung keine Bedeutung hat, da sein Einfluß unter der Meßgenauigkeit liegt, ist allerdings diese Vorzeichendifferenz ohne Bedeutung.

Geht man nun von einer einzelnen Instrumentenaufstellung über zu dem Abschnitt zwischen zwei Höhenfestpunkten, dann muß die Gleichung (16) verwendet werden. An einem praktischen Extrembeispiel soll nun untersucht werden, wie groß das Zusatzglied in der Gleichung (16) sein kann. Ohne dieses Zusatzglied stellt die Gleichung (16) ja die bekannte Formel für die praktische Berechnung der geopotentiellen Kotenunterschiede dar.

Wendet man die Gleichung (16) auf eine Nivellementlinie oder auf eine Nivellementschleife an, dann kann der Horizontalgradient abhängig von den jeweiligen örtlichen Gegebenheiten stark unterschiedliche Größe und auch unterschiedliches Vorzeichen haben. Es ist daher zu erwarten, daß das zweite Glied in der Gleichung (16) sich praktisch nicht auswirken wird. Es sei hier daran erinnert, daß in diesem Zusatzglied der Horizontalgradient enthalten ist, allerdings in der Form eines Differenzenquotienten, wobei explizit nur ein Vertikalgradient aufscheint. Über einen längeren Nivellementweg hinweg werden die durch das Zusatzglied bedingten vernachlässigbaren Einflüsse fast den Charakter zufälliger Fehler annehmen und sich weitgehend gegenseitig aufheben.

Es darf auch nicht übersehen werden, daß die Schwerewerte bei der Ermittlung der geopotentiellen Kotendifferenzen in Kilogal-Einheiten eingeführt werden. Dadurch wirkt sich z. B. eine Änderung im Schwerewert von 100 Milligal bei 1 m Höhenunterschied bzw. von 1 Milligal bei 100 m Höhenunterschied nur mit 0,0001 geopotentiellen Einheiten aus, das entspricht rund 0,1 mm.

Für eine praktische Überprüfung der Größenordnung des Zusatzgliedes in der Gleichung (16) wurde das Präzisionsnivellement über die Tauernschleife aus dem Sonderheft 15 der ÖZfV herangezogen. Über die gesamte Schleife ergab sich durch das Zusatzglied eine Auswirkung von +0,000 000 94 geopotentiellen Einheiten, also praktisch gleich Null. Zwischen den Punkten 58 und 59 entstand, aufsummiert vom Beginn der Schleife, ein Maximalwert von +0,000 265 22 geopotentiellen Einheiten, das entspricht 0,27 mm. Die Einzelwerte liegen zwischen −0,000 039 100 und +0,000 029 835 geopotentiellen Einheiten, der kleinste Wert beträgt 0,000 000 017 geopotentielle Einheiten. In diesem Extrembeispiel einer Nivellementschleife ist ein maximaler Höhenunterschied von 1751 m enthalten. Dieses praktische Beispiel in einem extremen Gelände zeigt, daß das Zusatzglied unterhalb der Meßgenauigkeit gelegen ist und daher praktisch vernachlässigt werden kann. Für die Untersuchung der Tauernschleife wurde ein einheitlicher Vertikalgradient von 0,308 55 mgal/m verwendet.

Würde man nun andererseits von dem Zusatzglied in der Gleichung (11) von Embacher ausgehen, dann wäre die Auswirkung bei einer praktischen Anwendung noch geringer, da hierin statt der Summe von Vorblick und Rückblick nur die Differenz dieser Werte erhalten ist.

Bei der Berechnung der geopotentiellen Kotendifferenzen aus den durch das Nivellement ermittelten geometrischen Höhenunterschieden benötigt man bekanntlich keine hypothetischen Annahmen. Dies ist ja gerade der große Vorzug der geopotentiellen Koten und daher verwendet man diese ja auch bei der strengen Ausgleichung von Nivellementnetzen. Es ist daher auch überhaupt nicht einzusehen, warum man entsprechend der Forderung von Embacher seine Gleichung (11) verwenden und zusätzlich noch Horizontalgradienten ermitteln sollte, vor allem im Hinblick darauf, daß dieses Zusatzglied ohne praktischen Einfluß ist, wie die entsprechende Auswertung der Tauernschleife gezeigt hat, die ja einen Extremfall darstellt.

Abgesehen von den hier angeführten Unterschieden in den Ansichten sind im Abschnitt 3 der Veröffentlichung Embachers auch noch einige andere schwerwiegende Differenzen in den Meinungen enthalten. Als ein Beispiel hiefür sei der nachstehende Satz wörtlich zitiert:

„Die Nichtparallelität der tatsächlichen Niveauflächen kann beim geometrischen Nivellement nicht festgestellt werden, weil das geometrische Nivellement sowohl auf der ungestörten als auch auf der gestörten Niveaufläche den Höhenunterschied Null ergibt.“

Der erste Teil dieses Satzes bezieht sich auf mehrere Niveauflächen, die Begründung für die darin aufgestellte Behauptung bezieht sich jedoch auf eine einzige Niveaufläche und kann daher mit der Behauptung im ersten Satzteil überhaupt nicht in Verbindung gebracht werden. Die im ersten Teil dieses Satzes aufgestellte Behauptung bedeutet praktisch, daß damit die Tatsache des theoretischen Schleifenschlußfehlers beim unreduzierten geometrischen Nivellement in einer Nivellementschleife geleugnet wird. Abgesehen davon, daß ein Nivellement auf einer von Embacher so benannten „gestörten“ Niveaufläche praktisch kaum durchführbar wäre, ist ein Nivellement auf einer sogenannten „ungestörten“ Niveaufläche überhaupt unmöglich, da es diese in Wirklichkeit nicht gibt, denn sie setzt eine tatsächlich nicht vorhandene regularisierte Erde voraus.

Manuskript eingelangt im April 1988