

Paper-ID: VGI_198711



Punkttransformationen unter Berücksichtigung lokaler Klaffungsverhältnisse

Wolf-Dieter Schuh ¹

¹ *Technische Universität Graz, Abteilung für Mathematische und Datenverarbeitende Geodäsie, Rechbauerstraße 12, A-8010 Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **75** (3), S. 104–121

1987

BibT_EX:

```
@ARTICLE{Schuh_VGI_198711,  
  Title = {Punkttransformationen unter Berücksichtigung lokaler  
    Klaffungsverhältnisse},  
  Author = {Schuh, Wolf-Dieter},  
  Journal = {{Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und  
    Photogrammetrie},  
  Pages = {104--121},  
  Number = {3},  
  Year = {1987},  
  Volume = {75}  
}
```



Punkttransformationen unter Berücksichtigung lokaler Klaffungsverhältnisse

Von *Wolf-Dieter Schuh, Graz*

Zusammenfassung

Mit den heutigen Rechnermöglichkeiten bedeutet die Neuberechnung von großen Netzen keine Schwierigkeit, wodurch es relativ oft zu gebietsweisen Koordinatenänderungen im Festpunktfeld kommt. In diesem Artikel werden verschiedene numerische Methoden zur Nachführung untergeordneter Punkte verglichen. Es zeigt sich, daß die Methoden der deterministischen und stochastischen Prädiktion bei den hier verwendeten Datensätzen nahezu gleich gute Ergebnisse liefern, und die Güte gegenüber Standardtransformationen um einen Faktor bis zu fünf gesteigert wird. Bedingt durch die einfachere Handhabung und den einfacheren Lösungsalgorithmus ist die deterministische Prädiktion allen anderen Methoden vorzuziehen.

Summary

With today's advanced computer facilities, a recomputation of large networks causes no problems anymore. Mainly because of that reason coordinates of national control points are changed frequently. This paper compares several methods to transform the secondary points in a best possible and consistent way. With three real datasets it is shown that the methods of deterministic and stochastic prediction solve the problem as well. The accuracy obtained is five times better than compared with standard solutions. Because of the easy handling and the simple algorithm the deterministic prediction seems to be the best method to do this job.

1. Einleitung

Durch die Neumessung und Berechnung des Festpunktfeldes entsteht das Problem der Nachführung untergeordneter Punkte. Da eine nachträgliche Neueinrechnung der untergeordneten Punkte mit den ursprünglichen Meßdaten nicht immer möglich ist, und auch davon ausgegangen werden kann, daß keine Punktvarianzen und Kovarianzen von der Erstberechnung vorhanden sind, muß ein Weg gefunden werden, der eine möglichst gute Einrechnung der untergeordneten Punkte, nur auf Grund ihrer Koordinaten, gewährleistet.

Herkömmliche Transformationen (Affine Transformation, Helmert-Transformation) liefern bei einer großen Anzahl von identen Punkten zwar eine global optimale Lösung, gehen aber nicht auf lokale Trends ein und liefern daher im lokalen Bereich unbefriedigende Lösungen. Bei identen Punkten wird der Unterschied zwischen den transformierten Koordinaten und den Soll-Koordinaten als Fehler oder Restklaffung betrachtet und bleibt für weitere Berechnungen unberücksichtigt, da nur die Soll-Koordinaten weiterverwendet werden. Da eine globale Transformation nicht auf lokale Verschiebungen, Verdrehungen und Maßstabsänderungen eingeht, beinhalten die Restklaffungen nicht nur zufällige Fehleranteile, sondern auch erfaßbare Informationen, die für die Einrechnung der untergeordneten Punkte von großer Bedeutung sind. Deren Vernachlässigung zerstört die Nachbarschaftsgenauigkeit und erzeugt somit lokale Spannungen. Dieser Artikel stellt verschiedene Wege zur Lösung des aufgezeigten Problems dar und vergleicht diese Methoden an Hand von drei Testfeldern im Raum Graz.

2. Berechnungsmöglichkeiten

In der Literatur werden für diese Problemstellung verschiedene Lösungsansätze aufgezeigt:

Ein interner Bericht der KAO Graz*) (1986) untersucht folgende drei Wege:

1. Schichtenlinienmethode: Aus den y- und x-Komponenten der Restklaffungen der identen Punkte werden Schichtenlinienpläne erstellt, für die untergeordneten Punkte werden Restklaffungen interpoliert und an die transformierten Koordinaten als Zuschläge angebracht.

2. Gewichtetes Mittel: Aus den y- und x-Komponenten der Restklaffungen der identen Punkte wird mit Hilfe eines gewichteten Mittels ein Zuschlag für den transformierten, untergeordneten Punkt berechnet. Als Gewichtsansatz wird ein Abstandsgewicht

$$p_{ij} = \frac{1}{s_{ij}^{2p}} \quad p = 0.5, 1, 1.5, 2, \dots \quad (1)$$

verwendet, wobei sich durch empirische Untersuchungen $p = 1$ als beste Wahl herausstellt (s_{ij} = Strecke zwischen dem identen Punkt i und dem Berechnungspunkt j).

3. Ebeneninterpolation: Aus vier benachbarten, gut verteilten Punkten werden pro Komponente vier Dreiecke im Raum aufgespannt. Durch ein gewichtetes Mittel der Durchstoßpunkte werden die Zuschläge ermittelt.

In einer Testreihe wurde der zweite Weg, gewichtetes Mittel, als bester und ökonomischster ermittelt.

A. Bjerhammar (1973) ordnet dieses Approximationsverfahren den nicht stochastischen Methoden zu und bezeichnet es deterministische Prädiktion. Der allgemeine Ansatz ist gegeben durch:

$$\Delta x_j = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ij} \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n p_{ij}} \quad (2)$$

Δx_i ... gegebene Klaffungen in den n identen Punkten i

Δx_j ... geschätzter Zuschlag zu den Berechnungspunkten j

$p_{ij} = (s_{ij}^2 + n^2)^{-p}$

s_{ij} ... Strecke zwischen identem Punkt i und Berechnungspunkt j

n ... Glättungsfaktor

p ... Potenz der Prädiktion

In einem Artikel von L. Lenzmann (1987) wird eine gewichtete Helmert-Transformation als Lösungsmöglichkeit angegeben. Dabei wird für jeden zu transformierenden Punkt eine Helmert-Transformation mit allen identen Punkten berechnet, wobei die Gewichtung der identen Punkte in Abhängigkeit der Entfernung zum zu transformierenden Punkt erfolgt. In dem Artikel werden die Gewichtsansätze

$$p_{ij} = \frac{1}{s_{ij}^2} \quad (3)$$

und

$$p_{ij} = \frac{1}{1 - 2^{-\left(\frac{s_{ij}}{h}\right)^2}} \quad (4)$$

angegeben, wobei s_{ij} die Strecke zwischen dem identen Punkt i und dem Berechnungspunkt j darstellt, und h als „Doppelwertabstand“ (= Abstand, bei dem das Gewicht p_{ij} den doppelten Minimalwert erreicht) definiert ist.

*) Katasterdienststelle für agrarische Operationen Graz des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (BEV)

Um eine Neuberechnung der Transformation für jeden Punkt zu vermeiden, kann auch folgender Weg eingeschlagen werden: die Restklaffungen werden pro Komponente durch je eine Fläche bestmöglich approximiert, und durch Interpolation gebietsabhängige Zuschläge zu den transformierten Koordinaten ermittelt. Dieser Weg entspricht einer numerischen Lösung der Schichtenlinienmethode des KAO-Berichtes.

Für die Berechnung der Approximationsflächen können verschiedene Ansätze verwendet werden. Bei größeren Gebieten werden lineare oder kubische finite Elemente vorteilhaft sein, bei wenigen Punkten wird man mit Polynomansätzen beliebiger Ordnung (Ord)

$$\Delta x_j = f(x_j, y_j) = \sum_{k=0}^{\text{Ord}} \sum_{l=0}^k a_{l, k-l} x_j^l y_j^{k-l} \quad (5)$$

das Auslangen finden. Da bei Polynomen höherer Ordnung Schwingungserscheinungen vor allem in Randgebieten und Gebieten mit wenigen identen Punkten auftreten, soll die Ordnung des Polynoms nicht zu hoch sein (maximal 3 bis 4).

Ein stochastischer Ansatz wird von G. Lachapelle und A. Mainville (1982) verfolgt, der für die Transformation des kanadischen Horizontalnetzes die Restklaffungen als Signalfeld betrachtet und mit Hilfe der Kollokationsmethode eine bestmögliche Eingliederung zu erreichen versucht.

Nach der Berechnung der Auto-Kovarianzfunktionen C_{xx} , C_{yy} in y- und x-Richtung und der Kreuzkovarianzfunktion C_{xy} errechnet sich die stochastische Prädiktion mit

$$\Delta x_j = C_{ji} C_{ii}^{-1} \Delta x_i, \quad (6)$$

wobei C_{ji} die Kreuzkovarianzmatrix zwischen den Berechnungspunkten j und den identen Punkten i und C_{ii} die Autokovarianzmatrix nur zwischen den identen Punkten bezeichnet. Δx_i ist der Vektor der gegebenen Klaffungen und Δx_j der Vektor der geschätzten Zuschläge. Bedingt durch die zwei Komponenten des Vektorfeldes errechnet sich die aus Signal- und Noise-Anteilen zusammengesetzte Kovarianzmatrix mit

$$C_{ii} = C^s + C^n = \begin{bmatrix} C_{xx}^s & C_{xy}^s \\ C_{yx}^s & C_{yy}^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{xx}^n & C_{xy}^n \\ C_{yx}^n & C_{yy}^n \end{bmatrix}, \quad (7)$$

wobei die hochgestellten s und n die Zuordnung zum Signal bzw. Noise-Anteil andeuten. Bei der Berechnung wird der für die Glättung der Approximationsfläche zuständige Noise-Anteil mit

$$\begin{aligned} C_{xx}^n &= C_{yy}^n = \sigma_n^2 I && I \dots \text{Einheitsmatrix} \\ C_{yx}^n &= C_{xy}^n = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

angenommen.

Um eine Gegenüberstellung der Leistungsfähigkeit der einzelnen Methoden zu ermöglichen, müssen die Zielvorstellungen genau definiert werden. An erster Stelle wären hier die Zuverlässigkeit und einfache Bedienung zu nennen. Unter Zuverlässigkeit ist zu verstehen, daß das Verfahren, unabhängig von der Punktconfiguration, auch in schwach besetzten Gebieten und Randgebieten ein stabiles Verhalten aufweist. Durch die Rechenvorschrift soll ferner eine Transformation in einem bestimmten Gebiet überall möglich sein, wobei sich die Transformation kontinuierlich verändern und keine Unstetigkeiten verursachen soll. Das Verfahren soll aber trotzdem gewährleisten, daß lokale Ursachen nur lokale Auswirkungen haben. Die Reproduktion von identen Punkten, das bedeutet, alle identen Punkte werden durch die

Transformation exakt wiederhergestellt, bringt den Vorteil der klaffungsfreien Angliederung, wobei dadurch die zufälligen Koordinatenunsicherheiten in den identen Punkten auf die transformierten Punkte übertragen werden, und damit der Approximationsfläche unnötige Zwänge auferlegt werden, die zu numerischen Problemen und übertriebenen Schwingungserscheinungen führen können. Eine lokale Filterung der zufälligen Unsicherheiten durch Mittelbildung erscheint daher sinnvoll. Für die Güte der Rechenvorschriften sind verschiedene Kriterien anwendbar:

- kleinste Varianz bei Beachtung aller Restklaffungen
- kleinste maximale Restklaffung
- kleinste Varianz bei Beachtung der überwiegenden Mehrheit der Restklaffungen.

Als Zielvorstellung kann man zusammenfassend folgende Stichworte nennen:

- Zuverlässigkeit
- einfache Handhabung
- kontinuierlicher Übergang
- Lokalität
- Güte
- geringer Rechenaufwand.

3. Praktische Berechnungen

Um die verschiedenen Methoden in der praktischen Anwendung vergleichen zu können, werden für drei vom BEV zur Verfügung gestellte Datensätze Testberechnungen durchgeführt.

3.1 Beschreibung der Datensätze

Der Datensatz 1 (Graz-Nord-TP) besteht aus 67 identen Punkten in einem Gebiet von 10 x 20 km im Norden von Graz. Die Koordinaten der trigonometrischen Punkte wurden im Jahre 1982 durch eine Neuberechnung, bei veränderten Ausgangspunkten, in einem Ausmaß von bis zu 22 cm geändert. In Fig. 1 sind die identen Punkte und deren Klaffungen dargestellt.

Der Datensatz 2 (Graz-Süd-EP) beinhaltet 169 idente Punkte in einem Gebiet von 8 x 5 km im Grazer Feld. Die Koordinaten der identen Punkte wurden durch zwei unabhängige, photogrammetrische Aufnahmen ermittelt. Die zweite Aufnahme wurde notwendig, da sich der Aufnahmemastab der ersten Aufnahme als zu ungenau herausgestellt hatte. Die in Fig. 2 dargestellten Restklaffungen (max. 27 cm) weisen daher eher einen zufälligen Charakter auf.

Bedingt durch die Koordinatenänderungen der trigonometrischen Punkte im Gebiet Graz-Nord änderten sich die Koordinaten von 401 Einschaltpunkten. Fig. 3 veranschaulicht die Restklaffungen (max. 22 cm). Die Auswirkung dieser Änderung des Festpunktfeldes betrifft ungefähr 70.000 Grenzpunkte, wovon sich 20.000 Punkte im Grenzkataster befinden.

3.2 Beurteilung der Ergebnisse

Für die Beurteilung der Ergebnisse wird folgende Methode gewählt: jeder idente Punkt des Datensatzes wird von allen anderen Punkten rückgerechnet und dann mit dem gegebenen Wert verglichen. Bei der Rückrechnung eines Punktes wird daher dessen Information überhaupt nicht berücksichtigt, wodurch eine gute Abschätzung der äußeren Genauigkeit erlangt wird. Da es dadurch bei der Errechnung mancher Randpunkte zu Extrapolationen kommt, wird das Ergebnis in den Randgebieten eher schlecht und teilweise zufällig sein. Zur Beurteilung der Güte wird in erster Linie die Varianz der verbleibenden Klaffungen (unabhängig gerechneter Wert minus gegebenen Werts) herangezogen. Um den Einfluß der Randzonen auf die Varianz herauszufiltern, ist eine genauere Analyse, die klassenweise erfolgt, notwendig. Als Richtwert wird der Prozentsatz der Realisierungen innerhalb einer Klasse angegeben. Als dritter Wert wird die maximale Klaffung errechnet.

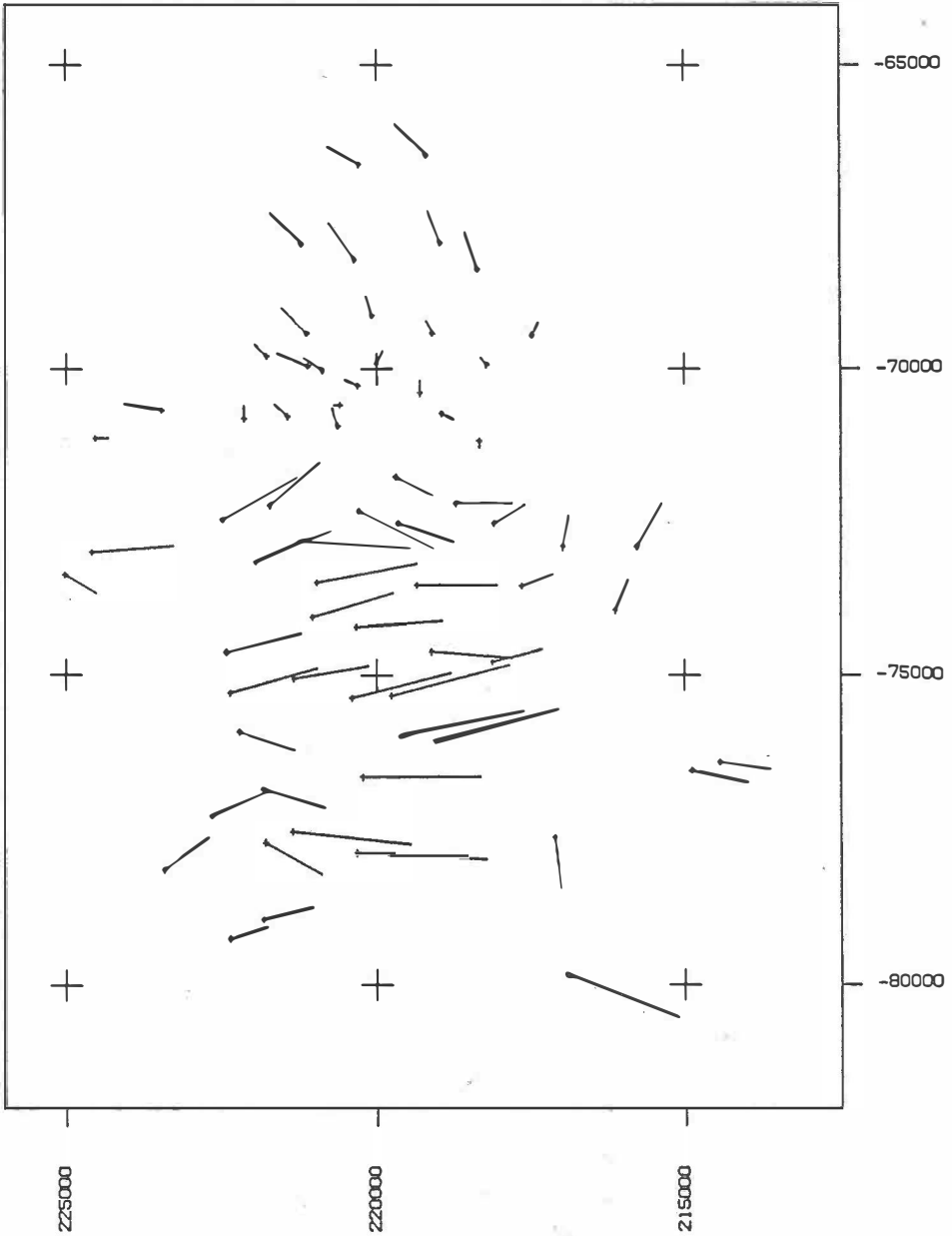


Fig. 1: Originaldaten des Datensatzes 1
Maßstab der Klaffungen — = 10 cm

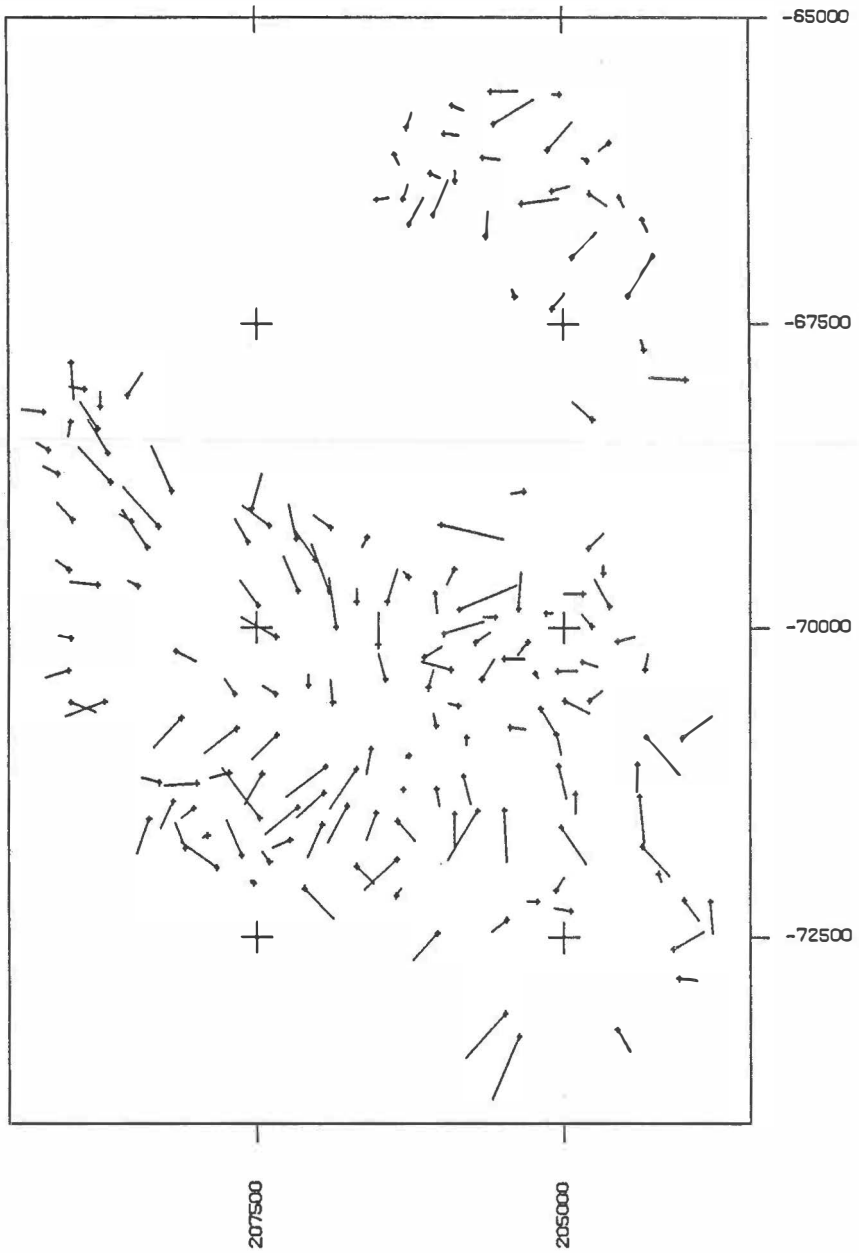


Fig. 2: Originaldaten des Datensatzes 2
Maßstab der Klaffungen $\text{---} = 25 \text{ cm}$

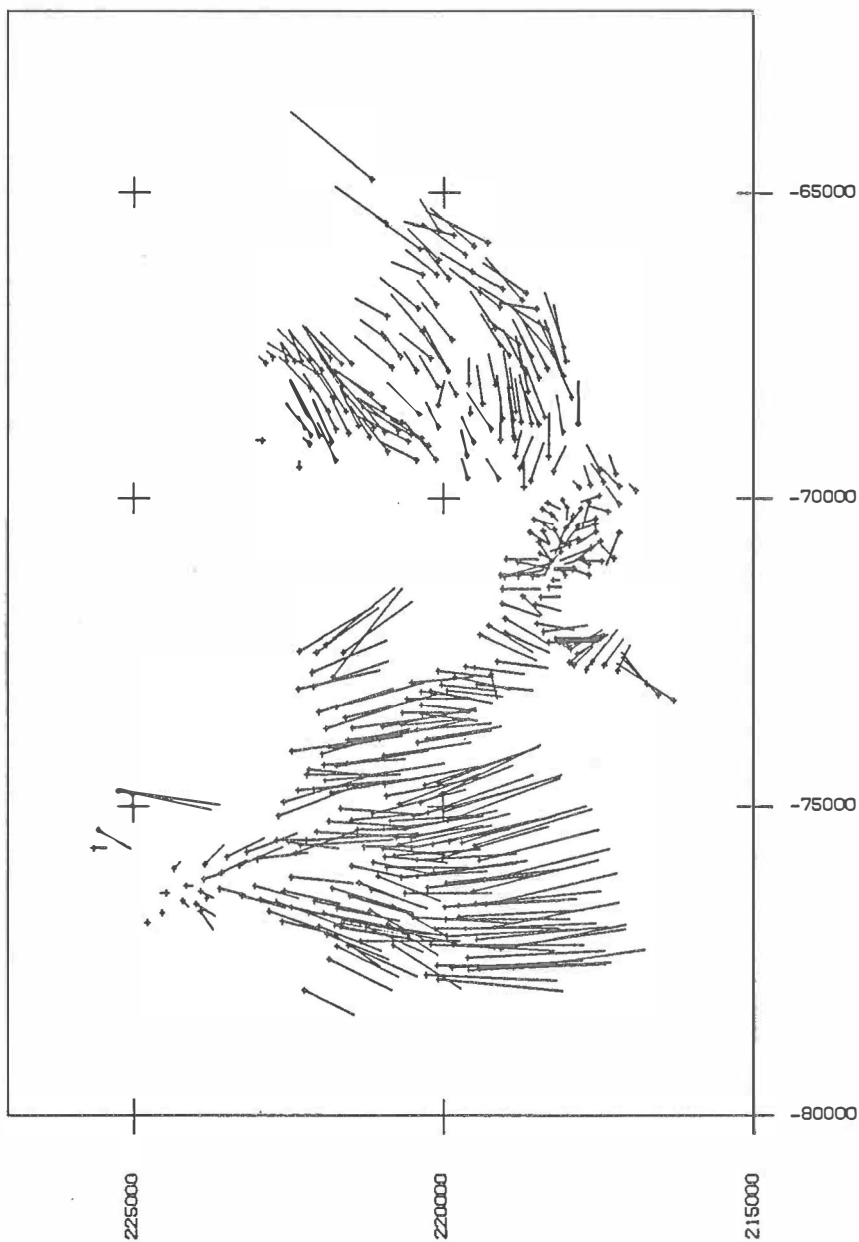


Fig. 3: Originaldaten des Datensatzes 3
Maßstab der Klaffungen $\text{---} = 10 \text{ cm}$

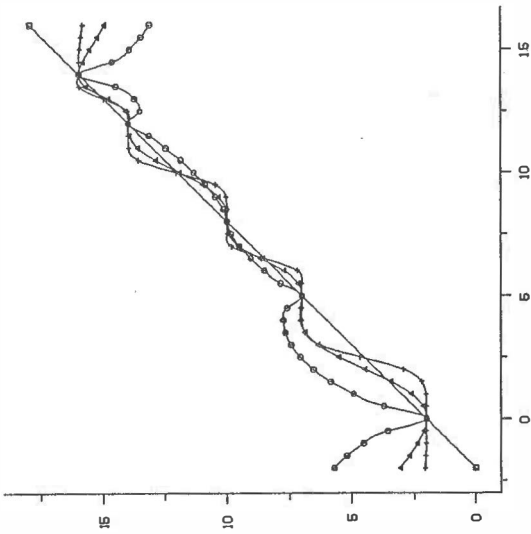


Fig 4.1: Interpolation (Formel 9)
Gerade mit der Steigung 1

○ $p = 0.5$ $n = 0$
 △ $p = 1$ $n = 0$
 + $p = 2$ $n = 0$

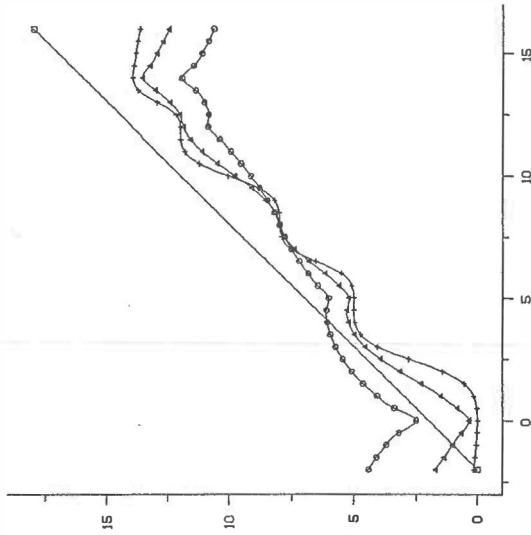


Fig 4.2: Interpolation (Formel 9)
Gerade mit der Steigung 1

○ $p = 0.5$ $n = 1$
 △ $p = 1$ $n = 1$
 + $p = 2$ $n = 1$

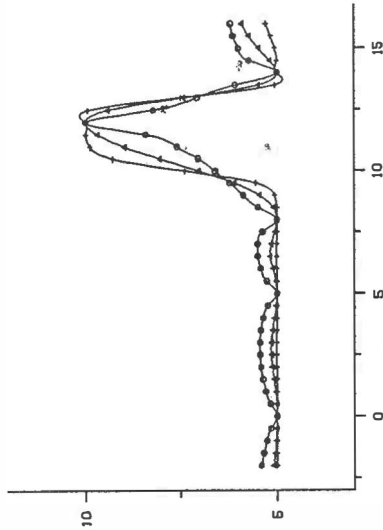


Fig 5.1: Interpolation (Formel 9)
 horizontale Gerade
 \odot $p = 0.5$ $n = 0$
 Δ $p = 1$ $n = 0$
 $+$ $p = 2$ $n = 0$

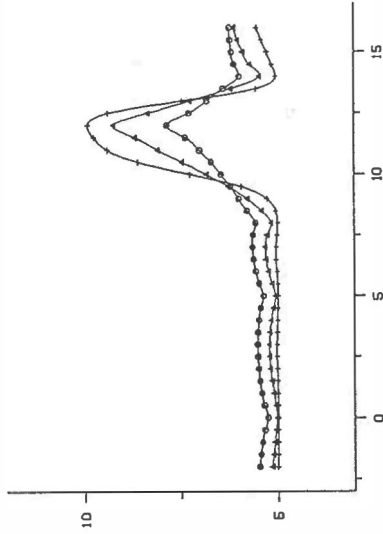


Fig 5.2: Interpolation (Formel 9)
 horizontale Gerade
 \odot $p = 0.5$ $n = 1$
 Δ $p = 1$ $n = 1$
 $+$ $p = 2$ $n = 1$

	Originaldaten	det. Prädiktion					gew. Hel-Tra				
		Helmert-Transformation	Formel (2), p=2, n=0	Formel (2), p=2, n=500	kub. Spline, Träger=4000	Formel (2), p=1.5, n=1000 Punktzahl 10 Ordnung des Polynoms (0)	Formel (3), p=4	Formel (4), h=16000	kub. Spline, Träger=4000	Ordnung des Polynoms (3)	stoch. Prädiktion +)
Varianz d. Klaffungen	10.6	6.8	4.4	4.3	4.7	4.2	4.6	4.8	4.9	5.5	4.4
maximale Klaffungen	21.9	16.6	16.9	16.9	15.7	16.1	16.1	16.1	17.1	18.0	16.5
0 < K1 < 2	9	7	42	39	22	36	39	25	24	12	33
2 < K1 < 4	15	21	36	37	48	40	37	39	46	46	40
4 < K1 < 6	13	21	6	7	12	10	10	18	13	19	13
6 < K1 < 8	13	24	7	10	12	10	6	10	7	12	10
8 < K1 < 10	13	19	7	4	3		3	4	6	7	1
10 < K1 < 12	7	3				1	1	1			
12 < K1 < 14	10	3									
14 < K1 < 16	4				3				1		
16 < K1 < 18	1	1	1	1		1	3	1	1	1	1
18 < K1	12									1	

Tabelle 1: Beste Gruppenergebnisse mit dem Datensatz 1
Dimension der Klaffungen cm, Klassentreffer %

+) Kovarianzfunktionen

$$C_{xx}^s = 0.00225e^{-0.0002s} (1 - 0.14 \cdot 10^{-6} s^2) f(s, 8000) \quad \text{Trend: 1}$$

$$C_{yy}^s = 0.0075e^{-0.0015s} (1 - 0.3 \cdot 10^{-6} s^2) f(s, 8000) \quad \text{Trend: 1}$$

$$C_{xy}^s = 0.$$

$$\sigma_n = \pm 0.02$$

f(s, 8000) ... 2-dim. finite Kovarianzfunktion (Träger=8000)

	Originaldaten	Helmert-Transformation	det. Prädiktion				gew. Hel-Tra			Ordnung des Polynoms (3)	stoch. Prädiktion +)
			Formel (2), p=2, n=0	Formel (2), p=2, n=200	kub. Spline, Träger=1000	Formel (2), p=1.5, n=250 Punktzahl 10 Ordnung des Polynoms (0)	Formel (3), p=4	Formel (4), h=4000	kub. Spline, Träger=1000		
Varianz d. Klaffungen	12.0	10.7	9.3	9.2	9.3	9.1	9.3	9.3	9.5	10.3	9.2
maximale Klaffungen	27.3	25.9	25.6	25.8	25.3	25.4	25.4	25.0	26.7	27.3	25.0
0 < K1 < 5	19	22	31	30	32	31	29	29	31	25	34
5 < K1 < 10	33	37	42	42	43	44	45	38	39	36	38
10 < K1 < 15	26	25	19	20	17	17	18	26	21	25	20
15 < K1 < 20	15	12	5	5	5	5	5	4	5	11	5
20 < K1 < 25	5	2	3	2	2	2	3	3	2	2	3
25 < K1 < 30	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabelle 2: Beste Gruppenergebnisse mit dem Datensatz 2
Dimension der Klaffungen cm, Klassentreffer %

+) Kovarianzfunktionen

$$C_{xx}^S = 0.001 \cdot JO(0.0045s) f(s, 2000) \quad \text{Trend: 1}$$

$$C_{yy}^S = 0.004 \cdot JO(0.0025s) f(s, 2000) \quad \text{Trend: 1}$$

$$C_{xy}^S = 0.$$

$$\sigma_n = \pm 0.055$$

$f(s, 2000)$... 2-dim. finite Kovarianzfunktion (Träger=2000)

$JO(.)$... Bessel-Funktion erster Art nullter Ordnung

	Originaldaten	Helmert-Transformation	det. Prädiktion				gew. Hel-Tra			Ordnung des Polynoms (3)	stoch. Prädiktion +)
			Formel (2), p=2, n=0	Formel (2), p=2, n=100	kub. Späine, Träger=i000	Formel (2), p=2, n=100 Punktzahl 10 Ordnung des Polynoms (0)	Formel (3), p=4	Formel (4), h=i2000	kub. Späine, Träger=2000		
Varianz d. Klaffungen	10.5	6.2	2.0	2.0	2.1	2.0	2.0	2.4	2.3	3.5	2.1
maximale Klaffungen	22.5	15.8	8.7	8.7	8.4	8.7	8.7	10.9	8.7	10.7	8.7
0 < Kl < 2	5	13	77	78	73	77	77	65	63	31	71
2 < Kl < 4	13	22	18	17	23	18	18	28	31	46	23
4 < Kl < 6	10	22	4	4	3	3	3	5	4	16	4
6 < Kl < 8	24	24	1	1	1	1	1	1	1	5	2
8 < Kl < 10	12	11	1	1		1	1	1	1	1	1
10 < Kl < 12	8	5								1	
12 < Kl < 14	6	2									
14 < Kl < 16	9	1									
16 < Kl < 18	3										
18 < Kl	8										

Tabelle 3: Beste Gruppenergebnisse mit dem Datensatz 3
Dimension der Klaffungen cm, Klassentreffer ‡

+) Kovarianzfunktionen

$$C_{xx}^S = 0.0008 f(s,2000) \quad \text{Trend: 2}$$

$$C_{yy}^S = 0.0008 f(s,2000) \quad \text{Trend: 2}$$

$$C_{xy}^S = -0.0003 f(s,2000)$$

$$\sigma_n = \pm 0.01$$

f(s,2000) ... 2-dim. finite Kovarianzfunktion (Träger=2000)

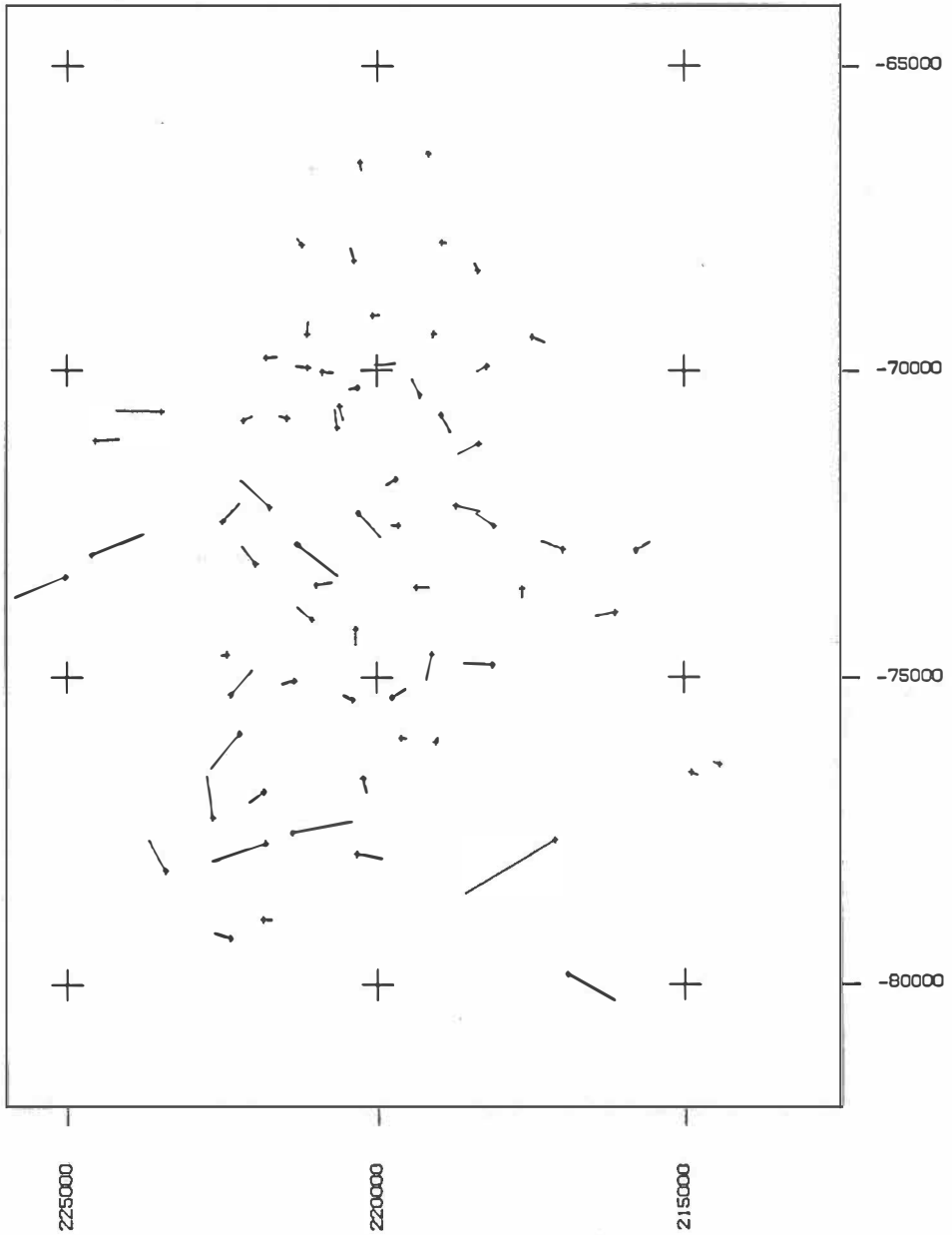


Fig. 6: Restklaffungen des Datensatzes 1
Berechnung: Formel (2) $p=2$, $n=0$
Maßstab der Klaffungen $\text{---} = 10 \text{ cm}$

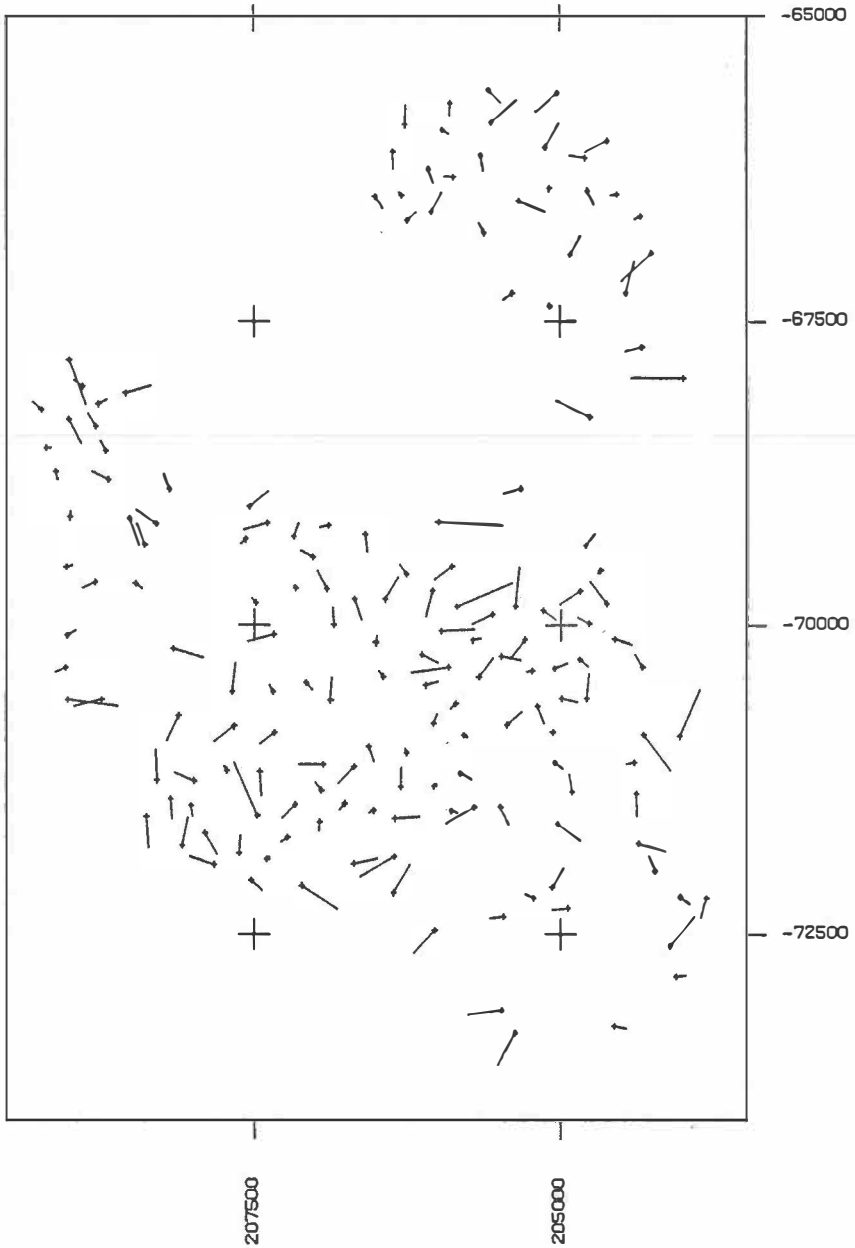


Fig. 7: Restklaffungen des Datensatzes 2
Berechnung: stochastische Prädiktion
Maßstab der Klaffungen $\text{---} = 25 \text{ cm}$

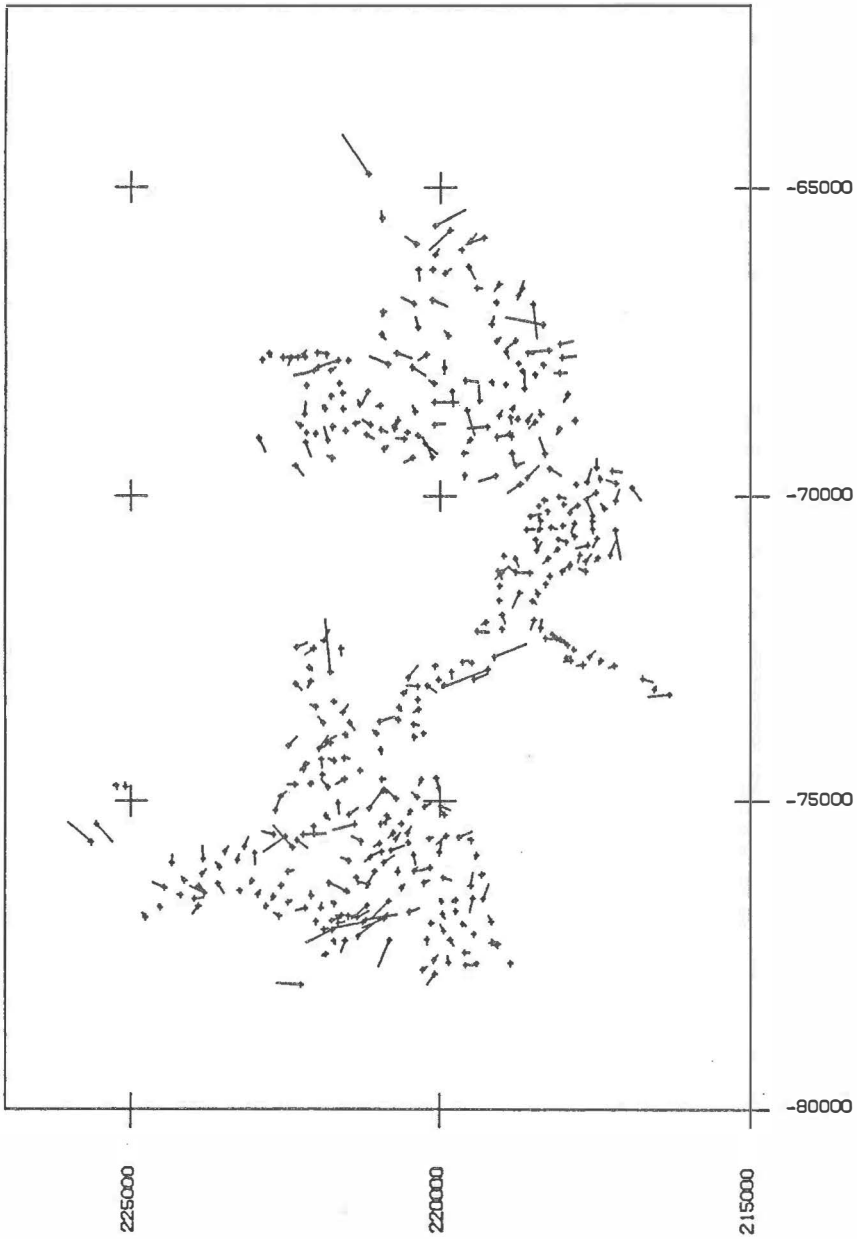


Fig. 8: Restklaffungen des Datensatzes 3
Berechnung: Formel (2) $p=2, n=0$
Maßstab der Klaffungen $\text{---} = 10 \text{ cm}$

3.3 Berechnungen

Die Berechnungen teilen sich in vier Gruppen:

3.3.1 Deterministische Prädiktion

Bei dieser Methode werden verschiedene Gewichtsansätze miteinander verglichen.

$$p_{ij} = (s_{ij}^2 + n^2)^{-p} \quad p = 0.5, 1, 1.5, 2, \dots \quad (9)$$

Zur Veranschaulichung des prinzipiellen Verhaltens dieser Prädiktionmethode werden zwei einfache Testberechnungen durchgeführt. Die Fig. 4.1 zeigt das Verhalten dieses Ansatzes ($n = 0, p = 0.5, 1, 2$) bei der Interpolation einer Geraden mit der Steigung 1 (geg. Punkte 0, 5, 8, 12, 14). Fig. 5.1 veranschaulicht das Verhalten des Ansatzes bei der Interpolation einer horizontalen Geraden (geg. Punkte 0, 5, 8, 14) mit einem außerhalb der Gerade liegenden Punkt (12). Man erkennt an diesen beiden einfachen Beispielen sehr gut das Verhalten der Approximationsfunktion. Für niedere Potenzen p zeigt sich zwischen den Stützpunkten ein sehr starker Trend zum Mittelwert. Im Extremfall von sehr kleinem p (ab ca. 0.5) zeigt H. Sünkel (1980b) Seite 78–85, daß die Funktion in eine horizontale, dem Mittelwert entsprechende Gerade mit einzelnen Spitzen bei den Stützpunkten entartet. Für den anderen Extremfall von sehr großem p (ab ca. 2) nähert sich die Funktion einer Treppenfunktion und entartet für den Fall $p = \infty$ (siehe H. Sünkel (1980b) Seite 82–84). Führt man einen Glättungsfaktor n ein, so wird der Trend der Interpolationsfläche auch für die Stützpunkte zum Mittelwert hin sehr verstärkt (Fig. 5.2), was bei Gebieten mit einem großen systematischen Anteil zu einer Glättung der Systematik führt (Fig. 4.2).

Um nur den Einfluß der benachbarten Punkte bei der Berechnung berücksichtigen zu müssen (Rechenarbeit, Fehlerauswirkung), ist ein Gewichtsansatz mit endlichem Träger anzustreben. Eine Funktion mit endlichem Träger, kurz endliche oder finite Funktion, weist nur innerhalb eines bestimmten Gebietes (Trägers) einen Funktionswert ungleich Null auf. Ein solcher Ansatz wäre zum Beispiel mit beliebigen Spline-Funktionen durchführbar (siehe auch D. Shepard (1964)). Stellvertretend werden Berechnungen mit einem kubischen Spline durchgeführt, wobei unterschiedliche Träger verwendet werden. Da die kubische Spline-Funktion im Ursprung ($s_{ij} = 0$) nicht gegen unendlich strebt, sondern eine flache Kurve mit horizontaler Tangente ist, leistet dieser Ansatz keine Reproduktion der identen Punkte. Wird der Träger zu klein gewählt, ist es bei diesem Ansatz möglich, daß in schwach besetzten Gebieten keine Transformation berechnet werden kann, da alle identen Punkte außerhalb des Trägers liegen und damit das Gewicht Null bekommen. Außerdem verursacht ein zu klein gewählter Träger Unstetigkeiten bei der Transformation.

Eine Kombination der beiden zuvor besprochenen Methoden wird von H. Sünkel (1980a) in seinem Programmsystem GSPP verwendet. Für die Interpolation wird nur ein bestimmter Ausschnitt der gesamten Datenmenge (z. B. 10–20 benachbarte Punkte) verwendet. Nach Berücksichtigung der Systematik (Polynome 0. bis 2. Ordnung) wird mit Hilfe des gewichteten Mittels der Zuschlag interpoliert.

3.3.2 Gewichtete Transformation

Bei dieser Methode werden drei Gruppen von Gewichtsansätzen auf ihre Leistungsfähigkeit untersucht:

$$p_{ij} = \frac{1}{s_{ij}^p} \quad p = 1, 2, 4, 6, \dots \quad (10)$$

$$p_{ij} = \frac{1}{1 - 2^{-\left(\frac{s_{ij}}{h}\right)^2}} \quad (11)$$

$$p_{ij} = S3(s_{ij}, t) \quad (12)$$

S3 (. . .) . . . kubischer Spline
t . . . Träger

Prinzipiell behält das zur deterministischen Prädiktion Gezeigte seine Bedeutung, wobei durch die zugelassene Maßstabs- und Verdrehungsfreiheit die Klarheit verloren geht. Aufgrund der größeren Anzahl der benötigten identen Punkte ist bei finiten Gewichtsfunktionen der Träger entsprechend groß zu wählen.

3.3.3 Polynommethode

Die Berechnungen unterscheiden sich nur durch die Wahl der Ordnung der Polynome, wobei die Ordnungen 0 bis 4 berechnet werden.

3.3.4 Stochastische Prädiktionsmethode

Für diese Prädiktion werden unterschiedliche isotrope, analytische Kovarianzfunktionen verwendet. Mit Hilfe des zufälligen Anteils (Noise) kann die Reproduzierbarkeit beliebig gesteuert werden. Bei allen Berechnungen werden finite Kovarianzfunktionen (F. Sanso und W. D. Schuh (1987)) verwendet, um den Rechenaufwand gering zu halten. Vor der Berechnung erfolgt eine Trendabsplattung mit Hilfe von Polynomen niedriger Ordnung.

3.4 Ergebnisse

Alle Testberechnungen wurden auf einer VAX 725 des Instituts für Theoretische Geodäsie der TU Graz durchgeführt. Da die Fülle der Ergebnisse hier nicht wiedergegeben werden kann, ist von jeder Gruppe jeweils nur das beste Ergebnis (kleinste Varianz) aufgeführt. Die Ergebnisse sind nach den einzelnen Testfeldern zusammengefaßt. Es werden ausgewiesen:

Varianz der Klaffungen: Wurzel der Summe der quadratischen Restklaffungen dividiert durch die Anzahl der Punkte.

max. Klaffung: Klaffung mit dem größten Absolutwert.

min < kl < max: Prozentsatz der Realisationen in einer bestimmten Klasse, welche durch die minimale (min) und maximale (max) Klaffung festgelegt ist.

3.5 Rechenaufwand

Der Rechenaufwand der beiden ersten Methoden ist abhängig von der Anzahl der identen Punkte und tritt für jeden zu transformierenden Punkt erneut auf. Allerdings beschränkt sich die Berechnung auf die sehr einfache Gewichtsberechnung und die arithmetischen Mittelbildungen (deterministische Prädiktion: 2 Mittelbildungen; gewichtete Helmert-Transformation: 5 Mittelbildungen). Bei der Polynommethode sind zweimal (x und y) die Aufstellung der Polynome in den identen Punkten und die Auflösung einer kleinen Matrix (2. Ord.: 6x 6, 3. Ord.: 10 x 10) zur Berechnung der Koeffizienten a_{ij} durchzuführen. Eine Punkttransformation ergibt sich durch die Auswertung des Polynoms an einer bestimmten Stelle, wobei aus numerischen Gründen eine Skalierung der Koordinaten notwendig ist. Die stochastische Prädiktionsmethode erscheint auf den ersten Blick enorm rechenintensiv, da vorweg ein Gleichungssystem

gelöst werden muß, welches die Dimension der identen Punkte mal zwei aufweist. Nach der Lösung dieses Systems ist nur die Kovarianzfunktion auszuwerten und ein Skalarprodukt zweier Vektoren zu berechnen. Der Aufwand für die Trendberechnung tritt in den Hintergrund, da nur Polynome niedriger Ordnung (erster bis maximal zweiter Ordnung) verwendet werden.

Mit Hilfe von endlichen Gewichts- und Kovarianzfunktionen, bzw. dem Arbeiten in einem kleinen Gebiet, kann bei allen Methoden der Rechenaufwand wesentlich verringert werden.

4. Schlußfolgerungen

Die im Kapitel 3.4 dargestellten Tabellen 1 bis 3 zeigen vor allem bei den Testfeldern 1 und 3 eine wesentliche Verbesserung der Genauigkeit bei allen Berechnungsmethoden (siehe auch Fig. 1–3 und 6–8). Die Polynommethode weist zwar den geringsten Rechenaufwand auf, schneidet jedoch immer am schlechtesten ab und ist daher nicht zu empfehlen. Die gewichtete Helmert-Transformation erweist sich in allen Fällen der deterministischen Prädiktion gleichwertig oder unterlegen, wodurch der erhöhte Rechenaufwand bei jedem zu interpolierenden Punkt nicht gerechtfertigt ist. Vergleicht man die deterministische mit der stochastischen Prädiktionsmethode, so zeigen sich die Methoden als nahezu gleichwertig. Die erste Methode hat vor allem bei geringer Anzahl von zu transformierenden Punkten enorme Vorteile im Rechenaufwand, die bei großer Anzahl (siehe Beschreibung des Datensatzes 3) bei der stochastischen Prädiktionsmethode auf Grund des Einsatzes von finiten Kovarianzfunktionen und der einfachen Interpolation nur mehr wenig ins Gewicht fallen. Vorteil der stochastischen Prädiktionsmethode ist die anschauliche Möglichkeit der Steuerung des zufälligen Fehleranteils durch die Wahl von σ_n^2 (Formel 8) (siehe auch Kap. 2). Durch eine Glättung der Approximationsfläche erreicht man etwas bessere Ergebnisse in den schwach besetzten Gebieten und Randzonen, die Anzahl von großen Restklaffungen nimmt ab (siehe Tab. 1, Prozentverteilung in der 3. und 4. Spalte). Da eine kleine Umschichtung von der ersten zur zweiten Genauigkeitsklasse eintritt, verringert sich dadurch die Varianz der Restklaffungen kaum. Bedingt durch die einfache Handhabung und den einfacheren Lösungsalgorithmus ist die deterministische Prädiktion allen anderen Methoden vorzuziehen. Wie die Ergebnisse zeigen, ist die deterministische Prädiktion gegenüber der Wahl der Potenz, des Glättungsfaktors und der Ausschnittsbildung relativ unsensibel.

Literatur

- Bjerhammer, A.* (1973): *Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses*. Elsevier Publishing Company, Amsterdam.
- KAO-Graz* (1986): Verschiebung von "Grenzkataster-Punkten" auf Grund von Änderungen im Festpunktfeld. Beilage 1 zu Protokoll GZ K 1208/86-222.
- Lachapelle, G.; A. Mainville* (1982): Least-Square Prediction of Horizontal Coordinate Distortions in Canada. *Bulletin Geodesique*, No.3, p. 242-257.
- Lenzmann, L.* (1987): Zur klaffungsfreien Punkteingliederung. *BDVI-Forum* 1/1987, Seite 36-42.
- Moritz, H.* (1980): *Advanced Physical Geodesy*. Wichmann, Karlsruhe.
- Sanso, F.; W. D. Schuh* (1987): *Finite Covariance Functions*. Submitted paper to *Bulletin Geodesique*.
- Shepard, D.* (1964): A two-dimensional Interpolation Function for Irregularly Spaced Data. *Proceedings of the 1964 A National Conference*.
- Sünkel, H.* (1980a): A General Surface Presentation Module Designed for Geodesy. Report No.292; Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio.
- Sünkel, H.* (1980b): Cardinal Interpolation. Report No.312; Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio.

Manuskript eingelangt im August 1987.