



Partitionierte Orthogonalisierung und Singulärwertanalyse zur Lösung der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen

J. Forsthuber ¹, J. Schneid ², Heinz Stanek ³

¹ *c/o Ingenieurkonsulent für Vermessungswesen Dipl.-Ing. Hans Polly, Holzplatz 1, A-2620 Neunkirchen*

² *Institut für Angewandte und Numerische Mathematik, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstraße 6-10, A-1040 Wien*

³ *Institut für Landesvermessung und Ingenieurgeodäsie, Abteilung Landesvermessung, Technische Universität Wien, Gußhausstraße 27-29, A-1040 Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **75** (1), S. 1–9

1987

BibT_EX:

```
@ARTICLE{Forsthuber_VGI_198701,  
  Title = {Partitionierte Orthogonalisierung und Singul{\a}rwertanalyse zur L  
    {\o}sung der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen},  
  Author = {Forsthuber, J. and Schneid, J. and Stanek, Heinz},  
  Journal = {{\O}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen und  
    Photogrammetrie},  
  Pages = {1--9},  
  Number = {1},  
  Year = {1987},  
  Volume = {75}  
}
```



Partitionierte Orthogonalisierung und Singulärwertanalyse zur Lösung der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen

Von J. Forsthuber, J. Schneid, H. Stanek, Wien

Zusammenfassung

Ein auf einem Orthogonalisierungsverfahren basierender Algorithmus zur Lösung eines überbestimmten, auch rangdefizienten, linearen Gleichungssystems im Sinne der kleinsten Quadrate wird vorgestellt. Das übliche Aufstellen der Normalgleichungen entfällt dabei. Ein Vergleich zu Lösungsmethoden mittels Normalgleichungen bezüglich des Speicherplatzbedarfs, der Rechengenauigkeit und der Anzahl der Rechenoperationen wird durchgeführt.

Abstract

An algorithm on the basis of orthogonalization for solving linear least square problems of arbitrary rank is introduced. No use of normal equations is made. Methods involving normal equations are compared with the introduced algorithm as for storage, computing errors and operation count.

1. Einleitung

Der Bedeutung des linearen Ausgleichsproblems entsprechend gibt es laufend Bemühungen zur Verbesserung und Erweiterung von Lösungsverfahren. Waren es anfangs die Vermeidung aufwendiger Rechenoperationen und die Einbeziehung durchgreifender Berechnungskontrollen, wurden durch den Einsatz von EDV-Anlagen andere Eigenschaften wie Rechengenauigkeit, Speicherplatz und Rechenzeit bedeutsam.

Für die händische Berechnung erwies sich das Gauß'sche Eliminationsverfahren zur Lösung der Normalgleichungen geeignet, wenn auch das Verfahren von Cholesky verschiedentlich favorisiert wurde. Letzteres fand dann auch in Lösungsprogrammen Aufnahme, da es sich durch höhere numerische Stabilität auszeichnet. Eine weitere Effizienzsteigerung wurde durch Ausnützung der speziellen Form der in der Ausgleichsrechnung auftretenden Gleichungssysteme erreicht. So stellt etwa das Gauß-Jordan-Austauschverfahren (siehe z. B. [2]) einen effektiven Iterationsalgorithmus zur Auflösung auch großer linearer Gleichungssysteme in Verbindung mit der Berechnung der Inversen zur Verfügung. Für schwach besetzte Systeme, wie sie bei der Ausgleichung großer geodätischer Netze auftreten, gibt es ebenfalls eine Reihe von optimierten Algorithmen ([1]).

Die genannten Verfahren wurden schließlich durch die Verwendung der Pseudoinversen auch für die freie Netzausgleichung modifiziert (z. B. [4], [7]). Als Ergebnis wird dabei der (eindeutige) Lösungsvektor mit minimaler euklidischer Länge definiert.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren vorgestellt, das sich durch folgende vorteilhafte Eigenschaften auszeichnet:

- Auflösung von überbestimmten linearen Gleichungssystemen von beliebigem Rang
- Keinerlei Vorkenntnis der Rangdefizienz bzw. deren Struktur vorab erforderlich
- Vermeidung des Aufstellens der Normalgleichungen
- Partitionierungen ermöglichen die effektive Berechnung großer Systeme auch mit kleinen Arbeitsspeichern
- Singulärwertberechnung ist Grundlage zur (numerischen) Rangbestimmung und zu umfassenden Fehleruntersuchungen
- Numerische Stabilität des gesamten Algorithmus

2. Vermittelnde Lagenetzausgleichung

Da ein Ausgleichsproblem angestrebt werden soll, ist eine Überbestimmung von Netzpunkten durch zusätzliche Messungen erforderlich. Jede der n unabhängigen Beobachtungen L_i (zur Bestimmung von m ausgeglichenen Unbekannten x_j) kann nun mit einer Verbesserung v_i behaftet werden ($L_i + v_i$), was seinerseits als Funktion von verbesserten vorläufigen Unbekannten $x_j = x_j^0 + Dx_j$ dargestellt werden kann,

$$L_i + v_i = f_i(x_1, \dots, x_m), \quad i = 1 \dots n. \quad (2.1)$$

Linearisiert man in erster Näherung die rechte Seite von (2.1), so gelangt man zu einem linearen System von Verbesserungsgleichungen

$$v = Az - l, \quad (2.2)$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $l \in \mathbb{R}^n$, $(A)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $l_i = f_i(x_1^0, \dots, x_m^0) - L_i$ und $z_i = Dx_i$.

Die Verbesserungen werden noch, entsprechend der Genauigkeit der Beobachtungen und aus Homogenisierungsgründen, gewichtet, sodaß sich als Minimierungsforderung im Sinne der kleinsten Quadrate

$$v^T P v = (Az - l)^T P (Az - l) \rightarrow \text{Minimum} \quad (2.3)$$

ergibt; die Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt Diagonalgestalt mit strikt positiven Elementen

$$p_i = m_0^2 / m_i^2, \quad i = 1 \dots n \quad (\text{siehe [3]}).$$

Eine notwendige Minimierungsbedingung ist durch die Normalgleichungen

$$A^T P A z = A^T P l \quad (2.4)$$

gegeben. Im Falle deren Regularität wird üblicherweise einer der im vorigen Abschnitt erwähnten Algorithmen zur Bestimmung der (eindeutigen) Lösung herangezogen; keine eindeutige Lösung ist im Falle der Singularität von $A^T P A$ gegeben. Diese tritt bei freien Netzen auf, in denen bekanntlich das geodätische Datum nicht hinreichend durch Festpunkte bestimmt ist. Die Mehrdeutigkeit der Lösung wird dabei durch die Forderung nach kürzester euklidischer Länge beseitigt. Die Lösung selbst kann dann mit Hilfe eines um Bedingungsgleichungen erweiterten Normalgleichungssystems gewonnen werden (siehe z. B. [6]).

Die Aufgabe (2.3) ist äquivalent mit

$$\|P^{\frac{1}{2}} Az - P^{\frac{1}{2}} l\| \rightarrow \text{Minimum}, \quad (2.5)$$

wobei $\|\cdot\|$ im weiteren stets die euklidische (Vektor-)Norm bezeichnen möge; ebenso soll der Einfachheit halber B für $P^{\frac{1}{2}} A$ und c für $P^{\frac{1}{2}} l$ stehen.

3. Das lineare Ausgleichsproblem

Das lineare Ausgleichsproblem

$$\|Bz - c\| \rightarrow \text{Minimum}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad c \in \mathbb{R}^n, \quad (3.1)$$

ist bekanntlich immer lösbar. Im folgenden sei stets von einem überbestimmten ($n > m$) Problem (3.1) die Rede. Die Lösung z^* von (3.1) ist genau dann eindeutig, wenn $\text{Rang}(B) = m$; gilt $\text{Rang}(B) < m$, so gibt es unendlich viele Lösungen, aus denen man traditionellerweise durch die zusätzliche Forderung

$$\|z\| \rightarrow \text{Minimum} \quad (3.2)$$

eine eindeutige, nämlich die euklidisch kürzeste Lösung z^* , auszeichnet.

Die Abbildung $c \rightarrow z^*$ ist linear und wird mit $B^+ \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (Pseudoinverse von B) bezeichnet.

4. Algorithmen zur Lösung des linearen Ausgleichsproblems

4.1 Die Normalgleichungen

Ist $\text{Rang}(B) = m$, dann hat (3.1) eine eindeutige Lösung z^* , die den sogenannten Normalgleichungen,

$$B^T B z = B^T c \quad (4.1)$$

entspricht, für B^+ gilt demnach

$$B^+ = (B^T B)^{-1} B^T.$$

$B^T B$ ist symmetrisch und positiv definit, es liegt also nahe, (4.1) mit Hilfe des Cholesky-Verfahrens zu lösen. Abgesehen von der a priori zu erfolgenden Rangbestimmung von B können sich zwei erhebliche Schwierigkeiten bei diesem Vorgehen einstellen.

Bereits bei der numerischen Berechnung von $B^T B$ und $B^T c$ (die überdies einen noch gar nicht zum Lösungsalgorithmus gehörigen Aufwand von $m^2 n/2$ Multiplikationen plus Additionen erfordert) entstehen Fehler in der Größenordnung $\|B^T B\| \cdot \text{eps}$ (eps ist die Genauigkeit der Maschinenarithmetik und ist gewöhnlich durch $0.5 \cdot (\text{Zahlenbasis})^{\uparrow} (1 - \text{Mantissenlänge})$ definiert), auch die vorhandenen Einlesefehler der Matrix werden i. a. zu Verfälschungen der Größenordnung $\|B^T B\| \cdot \text{eps}$ führen. Da nun für die Kondition $K(B^T B)$ der Normalgleichungen bekanntlich $K(B^T B) = K(B) \cdot K(B)$ gilt, wird die Lösung, unabhängig von den Rundungsfehlern während der Gleichungsauflösung, bereits davor mit einem Fehler der Größenordnung $K(B)^2 \cdot \text{eps}$ behaftet sein. (Die Konditionszahl eines Problems ist ein Maß der Empfindlichkeit des Ergebnisses in Abhängigkeit von Änderungen in den Daten des Problems; eine obere Schranke für den relativen Fehler des Ergebnisses z^* läßt sich also durch $K^2(B) \cdot \text{eps}$ angeben.) Weiters kann eine dem Problem (3.1) gar nicht eigene Störungsempfindlichkeit durch eine gewisse Konstellation der rechten Seite c in Bezug auf B eingeschleppt werden; die Normalgleichungen sind in diesem Fall als numerisch instabil zu bezeichnen.

Die zweite Gefahr liegt natürlich in der Möglichkeit, daß die berechnete Matrix $B^T B$ nicht mehr positiv definit ist, sodaß die Auflösung mit Hilfe des Cholesky-Algorithmus nicht mehr möglich ist. Schon bei mäßig schlecht konditionierten Problemen kann dies der Fall sein.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß das Lösen von (4.1) selbst im Fall $\text{Rang}(B) = m$ nur unter speziellen, harmlosen Konstellationen zu vertreten ist.

Liegt ein rangdefizientes Problem vor, so ist $B^T B$ singular. Wohl kann man auch in diesem Fall zu einem erweiterten System von Normalgleichungen gelangen (siehe z. B. [4], [7]), dies setzt aber die Kenntnis der Rangdefizienz $m - \text{Rang}(B)$ und deren Struktur voraus. Da dies i. a. a priori nicht der Fall ist, genauso wenig wie die Kenntnis etwaiger numerischer Rangdefizienz, liegt es schließlich nahe, nach Algorithmen zur Lösung von (3.1) bzw. von (3.1) und (3.2) zu suchen, die all die erwähnten Schwierigkeiten, Gefahren und Vorkenntnisse des Problems vermeiden.

All dies leistet die sogenannte QR-Zerlegung der Matrix B . Sie bewirkt die Reduktion von B auf Dreiecksgestalt mit Hilfe orthogonaler Matrizen und ist somit Basis für einen numerisch stabilen Algorithmus zur Lösung von (3.1). Durch eine partitionierte Abarbeitung der Matrix B wird dem oft gemachten Vorwurf des intensiven Speicherplatzbedarfs von Orthogonalisierungsverfahren entgegengetreten. Im Anschluß erfolgt eine Singulärwertbestimmung der triangulierten Matrix, somit eine eindeutige Entscheidung über den (numerischen) Rang und folglich die Berechnung der Lösung gemäß (3.1) bzw. (3.1) und (3.2).

4.2 QR-Zerlegung und Singulärwertbestimmung

Bekanntlich gibt es zu jeder Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (im weiteren gelte wieder $n > m$) eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$, sodaß

$$B = Q \cdot \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

gilt. R kann durchaus Nullen in der Diagonale aufweisen, also singular sein.

Die Matrix B wird dazu von links mit geeigneten orthogonalen Matrizen, sogenannten Householdermatrizen, multipliziert, bis schließlich nach m Schritten eine obere Dreiecksmatrix R entsteht. Die Elimination (der Elemente unterhalb der Hauptdiagonale) erfolgt spaltenweise von links nach rechts, im k -ten Schritt wird also durch Multiplikation mit der Householdermatrix H_k die k -te Spalte unterhalb der Hauptdiagonale der bestehenden Konfiguration zu Null (siehe etwa [5]). Man hat also nach m Schritten

$$H_m H_{m-1} \dots H_2 H_1 B = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Setzt man $Q = H_1 H_2 \dots H_{m-1} H_m$, so gilt (4.2) und Q ist als Produkt orthogonaler Matrizen selbst orthogonal. Die Anwendung von (4.2) zur Lösung von (3.1) liegt nun auf der Hand: die euklidische Norm von $Bz - c$ zu minimieren ist äquivalent mit der Aufgabe, die euklidische Norm von $Q^T Bz - Q^T c$ zu minimieren, da Q^T als orthogonale Abbildung eine Drehung darstellt, also längeninvariant ist. Setzt man $g_1 \in \mathbb{R}^m$ für die ersten m Komponenten und $g_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$ für die restlichen Komponenten von $Q^T c$, so gilt

$$\|Bz - c\|^2 = \|Rz - g_1\|^2 + \|g_2\|^2, \quad (4.4)$$

man hat also das Problem (3.1) durch die Anwendung eines numerisch stabilen Algorithmus (nämlich der Multiplikation mit orthogonalen Matrizen, die die bestmögliche Kondition 1 besitzen) in das Problem

$$\|Rz - g_1\| \rightarrow \text{Minimum} \quad (4.5)$$

übergeführt. Entscheidend für das weitere Vorgehen zur Lösung von (4.5) ist natürlich der Rang bzw. numerische Rang von R (der ident ist mit dem von B).

Dazu bedient man sich der sogenannten Singulärwertzerlegung (Singular Value Decomposition) von R . Diese besagt, daß es zu jeder Matrix $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $\text{Rang}(G) = r$, $r \leq \min(n, m)$ zwei orthogonale Matrizen $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, sodaß

$$V^T G W = \begin{pmatrix} \underbrace{D}_{r} & \underbrace{0}_{m-r} \\ \underbrace{0}_{r} & \underbrace{0}_{m-r} \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix}$$

wobei $D = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ und $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$. Man setzt $\sigma_i = 0$, $i = r+1, \dots, m$ und nennt $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ die Singulärwerte von G . Die Anzahl der nicht verschwindenden Singulärwerte gibt also den Rang von G wieder. In unserem Fall gibt es also zwei orthogonale Matrizen $V, W \in \mathbb{R}^{m \times m}$, sodaß

$$V^T R W = \begin{pmatrix} \underbrace{D}_{r} & \underbrace{0}_{m-r} \\ \underbrace{0}_{r} & \underbrace{0}_{m-r} \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix} \quad (4.6)$$

gilt, mit den Singulärwerten $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 = \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_m$.

Auch die Gewinnung der Singulärwertzerlegung einer Matrix stellt einen numerisch stabilen Algorithmus dar, da sie durch orthogonale (Links- und Rechts-)Transformationen erhalten wird. Die Kenntnis der Singulärwertzerlegung (4.6) von R führt nun zur endgültigen Lösung von (4.5).

Partitioniert man

$$W = \left[\underbrace{W_1}_{r} \mid \underbrace{W_2}_{m-r} \right] \text{ und } V = \left[\underbrace{V_1}_{r} \mid \underbrace{V_2}_{m-r} \right],$$

so gilt

$$\|Rz - g_1\|^2 = \|DW_1^T z - V_1^T g_1\|^2 + \|V_2^T g_1\|^2. \tag{4.7}$$

Offenbar wird (4.7) genau für $W_1^T z = D^{-1} V_1^T g_1$ minimal.

Der Wert von $W_2^T z$ ist noch beliebig. Durch $W_2^T z = 0$ wird

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1^T z \\ W_2^T z \end{bmatrix} \right\| = \|W^T z\|$$

und somit $\|z\|$ minimal. Die allgemeine Lösung von (4.5) und somit von (3.1) und (3.2) ist also gegeben durch

$$z^* = W_1 D^{-1} V_1 g_1.$$

Das Residuum $\|Bz^* - c\|$ schließlich ergibt sich durch

$$\|Bz^* - c\| = (\|V_2^T g_1\|^2 + \|g_2\|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Der so beschriebene Lösungsweg ist die Grundlage des im folgenden Abschnitt beschriebenen, adaptierten Algorithmus zur Lösung von (3.1) bzw. (3.1) und (3.2); klarerweise könnte sie auch direkt aus der Singulärwertzerlegung von B gewonnen werden. Warum dies nicht geschieht, wie auch die Frage nach der numerischen Rangbestimmung, wird im folgenden erörtert.

5. Ein adaptierter QR/SVD-Algorithmus

Da es im Falle stark überbestimmter Systeme ($n \gg m$) nicht mehr möglich sein kann, die Matrix B als ganze einzulesen, wurde die sogenannte sequentielle Householdertransformation gewählt. (Minimalanforderung an den zur Verfügung stehenden Speicherplatz muß natürlich die Speicherfähigkeit von $\sim m \cdot m$ Daten sein, da jede Lösungsmethode, ob Normalgleichungen, QR-Zerlegung oder SVD, auf eine Matrix der Dimension m führt.) Diese gestattet ein Abarbeiten der Matrix B in beliebig dimensionierbaren Zeilenblöcken. Zu diesem Zweck partitioniert man die Matrix B und den Vektor c:

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_q \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n_1 \\ \} n_2 \\ \\ \} n_q \end{matrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_q \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n_1 \\ \} n_2 \\ \\ \} n_q \end{matrix}, \quad \sum_{i=1}^q n_i = n, \quad 1 \leq q \leq n.$$

Der Algorithmus konstruiert nun (mit Hilfe der im vorigen Abschnitt erwähnten Householdermatrizen) eine Folge von oberen Dreiecksmatrizen $[R_i \mid d_i]$, sodaß die beiden Ausgleichsprobleme

$$\|R_i z - d_i\| \rightarrow \text{Minimum und } \left\| \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_i \end{bmatrix} z - \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \end{bmatrix} \right\| \rightarrow \text{Minimum}$$

für jedes $i = 1(1)q$ äquivalent sind, d. h., dieselbe Lösung und dasselbe Residuum besitzen. Dabei kann die jeweils neu berechnete Matrix $[R_i \mid d_i]$ den Speicherplatz der vorigen, erweiterten Matrix

$$\left[\begin{array}{c|c} R_{i-1} & d_{i-1} \\ \hline B_i & c_i \end{array} \right] \tag{5.1}$$

einnehmen. Hat man also nach $i - 1$ Schritten die $(\hat{n}_{i-1} \cdot (m + 1))$ - Dreiecksmatrix $[R_{i-1} | d_{i-1}]$ erreicht, so bildet man die $(\hat{n}_{i-1} + n_i) \cdot (m + 1)$ - Matrix (5.1) und reduziert mittels Householdermatrix Q_i auf Dreiecksgestalt:

$$Q_i \begin{bmatrix} R_{i-1} & | & d_{i-1} \\ \hline B_i & | & c_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_i & | & d_i \\ \hline 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \hat{n}_i \\ \hat{n}_{i-1} + n_i - \hat{n}_i \end{matrix},$$

wobei $\hat{n}_i = \min(m + 1, \hat{n}_{i-1} + n_i)$. Das Ergebnis des letzten Schrittes läßt sich darstellen als

$$[R_q | d_q] = \begin{bmatrix} R & | & d \\ \hline 0 & | & e \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ 1 \end{matrix}.$$

Man beachte, daß $[R_q | d_q]$ obere Dreiecksgestalt besitzen muß, da $n \geq m$ ist.

Man kann nun zeigen, daß dieses q -stufige Verfahren einer einzigen orthogonalen Transformation mit Hilfe einer orthogonalen Matrix Q^T entspricht,

$$Q^T [B | c] = \begin{bmatrix} R & | & d \\ \hline 0 & | & e \\ \hline 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ 1 \\ n-m-1 \end{matrix}.$$

Das lineare Ausgleichsproblem

$$\left\| \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} z - \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} \right\|^2 = \|Rz - d\|^2 + e^2 \rightarrow \text{Minimum} \quad (5.2)$$

ist also äquivalent mit dem Problem (3.1).

Nach erfolgter Singulärwertzerlegung von R , $R = VDW^T$, wobei $V, D, W \in \mathbb{R}^{m \times m}$, V, W orthogonal, $D = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, kann der numerische Rang r garantiert werden, falls

$$\sqrt{m} \cdot \text{eps} \cdot \sigma_1 < \sigma_r \quad \text{aber} \quad \sqrt{m} \cdot \text{eps} \cdot \sigma_1 \geq \sigma_{r+1}.$$

a) $r = m$

Die Lösung z^* ist eindeutig und ergibt sich aus dem Gleichungssystem $Rz = d$, bzw. mit Hilfe der erfolgten SVD als

$$z^* = WD^{-1}V^T d.$$

Für das Residuum gilt $\|Bz^* - c\| = |e|$, das skalierte Residuum ist demnach $|e| / \sqrt{n-m}$. Auch die Matrix $(B^T B)^{-1}$ läßt sich mit Hilfe der Singulärwertzerlegung von R darstellen,

$$(B^T B)^{-1} = WD^{-2}W^T,$$

da ja $B^T B = R^T R$ gilt.

b) $r < m$

Entsprechend Abschnitt 4.2 setzt man $\bar{D} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, teilt

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & | & W_2 \\ \hline \underbrace{\quad}_r & \underbrace{\quad}_{m-r} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad V = \begin{bmatrix} V_1 & | & V_2 \\ \hline \underbrace{\quad}_r & \underbrace{\quad}_{m-r} \end{bmatrix}.$$

Die Lösung z^* im Sinne (3.1) und (3.2) ergibt sich als

$$z^* = W_1 \bar{D}^{-1} V_1^T d.$$

Für das Residuum gilt $\|Bz^* - c\| = (\|V_2^T d\|^2 + e^2)^{\frac{1}{2}}$. Das skalierte Residuum ist demnach $\|Bz^* - c\| / \sqrt{n - r}$. Auch die Matrix $B^+(B^+)^T$ läßt sich einfach darstellen als $B^+(B^+)^T = W_1 \bar{D}^{-2} W_1^T$.

Der Grund, warum die Möglichkeit, die Singulärwertzerlegung von B (und nicht der triangulierten Matrix R) zur Konstruktion der Lösung zu verwenden, nicht gewählt wurde, liegt im vermehrten Rechenaufwand.

Es ist in völlig analoger Weise wie bei der sequentiellen Triangularisierung von B möglich, die Singulärwertzerlegung der partitionierten Matrix B sequentiell zu berechnen. Der Aufwand bestünde also aus q SVD-Berechnungen. Bezeichnet man nun den Aufwand, der zur Triangularisierung einer Matrix (durch eine Linksmultiplikation mit einer orthogonalen Matrix) nötig ist, symbolisch mit α , so ist der Aufwand zur Singulärwertzerlegung derselben Matrix zumindest doppelt so hoch, also 2α , da ja von links und rechts orthogonal multipliziert werden muß (abgesehen vom Aufwand zur eigentlichen Bestimmung der singulären Werte, die in der Regel iterativ ist). Nimmt man weiters der Einfachheit halber an, daß sämtliche Blöcke B_i ungefähr gleich dimensioniert sind, so ergibt sich beim adaptierten QR/SVD-Algorithmus ein Gesamtaufwand von $(q + 2)\alpha$, während dieser bei äquivalenter SVD-Berechnung $2q\alpha$, also etwa doppelt so hoch ist.

Der Aufwand von Rechenoperationen zur Triangularisierung von B mit Hilfe sequentieller Householdertransformationen beträgt asymptotisch

$$(m^2n - \frac{m^3}{3}) \cdot (1 + \frac{q}{n}) \text{ (Additionen plus Multiplikationen).}$$

(Man sieht, daß mit Verkleinerung der Blockgrößen der Aufwand steigt.)

Die Singulärwertzerlegung der oberen Dreiecksmatrix R schließlich benötigt zirka

$$6m^3 \text{ (Additionen plus Multiplikationen).}$$

(Dieser Wert beinhaltet weitestgehend gesicherte Erfahrungswerte bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit der Iteration zur Singulärwertbestimmung.)

Für die übliche Anwendungspraxis – der Abarbeitung in quadratischen Blöcken – also $n \sim qm$ – erhält man somit größenordnungsmäßig

$$(m^2n + 6m^3) \text{ (Additionen und Multiplikationen)}$$

als Gesamtrechenaufwand.

Im Vergleich zu gängigen Lösungsverfahren von (3.1) bzw. (3.1) und (3.2) durch das Erstellen der Normalgleichungen ergibt sich in jedem Fall beim QR/SVD-Algorithmus ein geringerer Rechenaufwand ab einer Größenordnung von ungefähr 100 Unbekannten (weitestgehend unabhängig von üblichen Relationen zwischen n und m!). Dieser Wert sinkt bei rangdefizienten Gleichungssystemen deutlich ab.

6. Testresultate

Zu einem Vergleichstest mit dem adaptierten QR/SVD-Algorithmus wurde eine Reihe von gängigen Ausgleichsprogrammen herangezogen. Neben einer beträchtlichen Anzahl von Lagenetzen aus Untersuchungen des Instituts für Landesvermessung der TU Wien wurde u. a. auch das freie Streckennetz Sattenhausen (siehe [3]) gerechnet und in sämtlichen Ergebnissen verglichen. Die Lösung stimmt in allen berechneten Werten überein. Die durch den QR/SVD-Algorithmus für dieses Beispiel aufgedeckte Rangdefizienz von 3 ist aufgrund der Art des Netzes sofort einsichtig (Abb. 1).

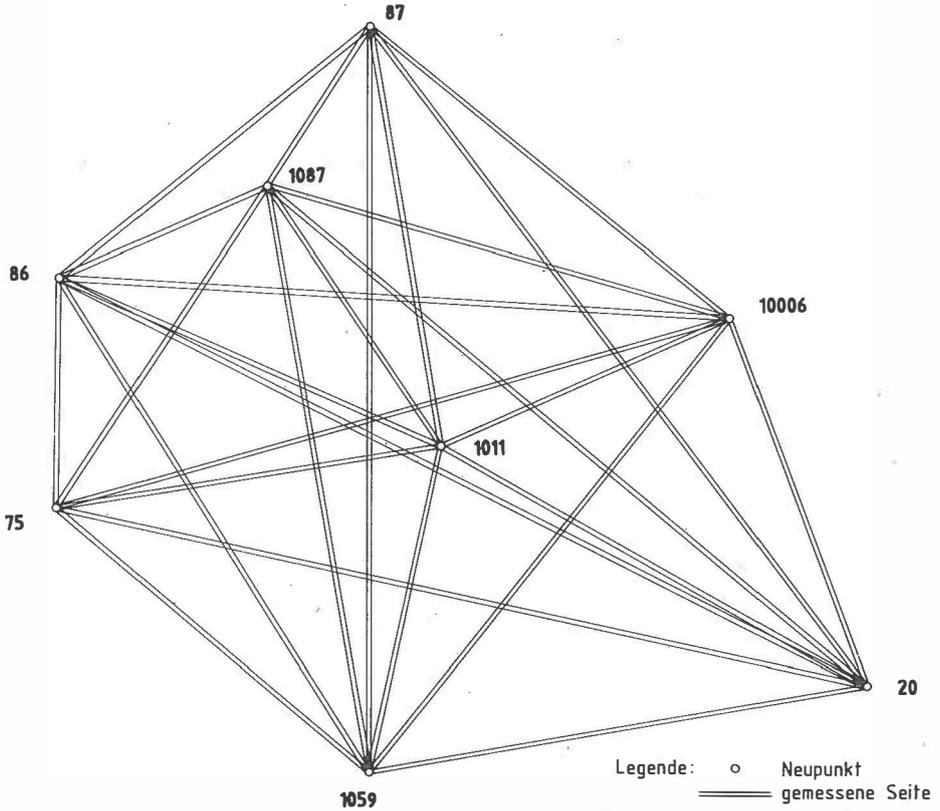


Abb. 1

Das folgende simulierte Beispiel soll den Vorteil einer (numerischen) Rangbestimmung demonstrieren:

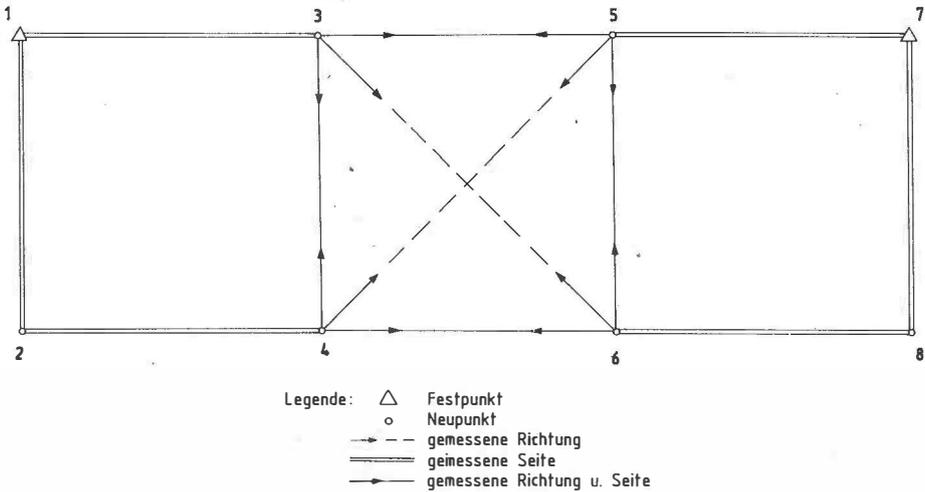


Abb. 2

Das Lagenetz ist in den beiden Festpunkten 1 und 7 gelagert. Trotz der verhältnismäßig großen Überbestimmung ist keine eindeutige Lösung aufgrund eines Konfigurationsdefekts möglich. Bei Berechnung mit Programmen, die die Lösung über Normalgleichungen bestimmen; war es teilweise durch geeignete Wahl der Näherungskordinaten und der Beobachtungen möglich; Ergebnisse zu erhalten. Auch die danach berechenbaren Fehler der Punktkordinaten fielen im Hinblick auf die Unlösbarkeit des Problems zu optimistisch aus. Eine Systematik in Abhängigkeit zu den modifizierten Näherungskordinaten und Beobachtungen war nicht geschlossen feststellbar.

Demgegenüber ist die Aufdeckung der numerischen Rangdefizienz 2 durch ein Programm unter Verwendung des QR/SVD-Algorithmus als korrekte Aussage anzusehen. In der Praxis ist die Entstehung dieses Netztyps etwa durch Verlust der Visuren in einem wiederholt beobachteten Deformationsnetz denkbar. Da heute Messungen via Datenerfassungsgerät direkt in den Rechner gebracht werden können, ist für die automatische Auswertung das korrekte Aufdecken solcher Problemsituationen eine unumgängliche Forderung.

Literatur

- [1] *D. Ehlert*: Speicherplatz sparende EDV-Programme zur Auflösung von Gleichungssystemen mit symmetrischen Koeffizientenmatrizen; DGK Reihe B, Heft 222/1977
- [2] *A. Elmiger*: Vermittelnde Netzausgleichung in Lage und Höhe oder dreidimensional (Algol Programm NETZ 3D); ETH Zürich, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie 1972
- [3] *W. Höpcke*: Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung; Walter de Gruyter, Berlin — New York 1980
- [4] *W. Höpcke, J. Krüger*: Zur Berechnung der Pseudoinversen; Zeitschrift für Vermessungswesen 10/1981, 543—553
- [5] *C. L. Lawson, R. J. Hanson*: Solving Least Square Problems; Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974
- [6] *K. Rinner, K. Killian, P. Meissl*: Beiträge zur Theorie der geodätischen Netze im Raum; DGK Reihe A, Heft 61/1969
- [7] *B. Ruff*: Berechnung der Pseudoinversen mit modifiziertem Gauß-Jordan-Austauschverfahren unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften der Normalgleichungen; Zeitschrift für Vermessungswesen 6/1983, 216—220

Manuskript eingelangt im Juli 1986