

Paper-ID: VGI_198411



Rasche und einfache automatische Fehlererkennung bei großen Datenmengen

Wolf-Dieter Schuh ¹

¹ *Abteilung für Mathematische und Datenverarbeitende Geodäsie, Technische Universität Graz, Rechbauerstraße 12, 8010 Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **72** (4), S. 137–147

1984

BibT_EX:

```
@ARTICLE{Schuh_VGI_198411,  
  Title = {Rasche und einfache automatische Fehlererkennung bei gro{\ss}en  
    Datenmengen},  
  Author = {Schuh, Wolf-Dieter},  
  Journal = {{{"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen und  
    Photogrammetrie},  
  Pages = {137--147},  
  Number = {4},  
  Year = {1984},  
  Volume = {72}  
}
```



Rasche und einfache automatische Fehlererkennung bei großen Datenmengen

Von *Wolf-Dieter Schuh*, Graz

Zusammenfassung

In diesem Artikel wird eine Kombination von zwei Verfahren, der Methode der konjugierten Gradienten und der dänischen Fehlersuchmethode, dargestellt. Auf Grund von speziellen Eigenschaften ergänzen sich diese Methoden sehr gut, wodurch eine rasche und einfache Fehlererkennung möglich ist.

Abstract

In this article a combination of two methods is presented. The one is the method of conjugate gradients and the other the Danish error detecting method. Due to its special properties these methods complement each other very well, rendering a quick and simple error detection possible.

1. Einleitung

Durch die Verwendung automatischer Registriergeräte und moderner Rechenautomaten wird heute die Auswertung von Beobachtungsdaten und Berechnung von Netzen meist schon vom Rechner ohne menschliche Überwachung selbständig durchgeführt. Die dabei errechneten Ergebnisse werden oft kritiklos zur Kenntnis genommen, da eine manuelle Fehleranalyse und Fehlerkorrektur meist zu aufwendig und zu mühsam erscheint. Es muß daher versucht werden, die Kontrollen zu automatisieren, wobei diese Kontrollen möglichst rasch die Ergebnisse bestätigen oder verwerfen sollen.

Für die automatische Fehlererkennung wurden verschiedene Wege vorgeschlagen und verwirklicht. Eine Möglichkeit ist durch den Zugang über die Statistik mit diversen Testverfahren gegeben, die heute unter dem Begriff „Data snooping“ zusammengefaßt werden (*Baarda*, 1968). Ein vollkommen anderer Zugang ergibt sich durch die Minimierung der Absolutsumme der Verbesserungen als Minimumskriterium bei der Ausgleichung (*Fuchs*, 1980). Diese beiden Gruppen von Methoden sind enorm speicher- und rechenintensiv, da größere Gleichungssysteme mehrmals aufgestellt und aufgelöst beziehungsweise invertiert werden müssen. *T. Krarup* (1980) weist auf eine andere Möglichkeit hin: die Methode der Gewichtsiteration. Bei diesem Iterationsverfahren werden die Gewichte der Beobachtungen entsprechend den Verbesserungen einer vorangegangenen Ausgleichung verändert und eine neue Ausgleichung durchgeführt. Dieser Schritt wird solange wiederholt, bis er zum Stillstand kommt, was bei entsprechender Gewichtsneuwahl nach wenigen Iterationen erreicht wird. Dabei ergibt sich die Notwendigkeit, das Gleichungssystem erneut aufzustellen oder zu verändern und aufzulösen. In der anschließenden Arbeit wird gezeigt, daß sich die Methode der konjugierten Gradienten auf Grund einiger spezieller Eigenschaften besonders gut für diese Neuberechnung eignet.

2. Vermittelnde Ausgleichung – konjugierte Gradienten

Gegeben sind die Verbesserungsgleichungen mit

$$Ax - l = v, \quad (1)$$

wodurch sich die zu minimierende Funktion mit

$$2 F(x) = v^T v = x^T A^T A x - 2 x^T A^T l + l^T l \quad (2)$$

errechnet. Durch Differentiation nach x ergibt sich das Normalgleichungssystem

$$A^T A x - A^T l = 0. \quad (3)$$

Die Auflösung dieses symmetrischen Gleichungssystems ist gleichbedeutend mit der Suche des Minimums der quadratischen Funktion $F(x)$.

Das Grundprinzip der iterativen Gleichungslösung (Relaxationsrechnung) läßt sich folgend darstellen:

Ausgehend von einem Versuchsvektor $x^{(0)}$ wählt man einen Vektor $p^{(0)}$, in dessen Richtung die Lösung verbessert werden soll. Die Länge dieses Vektors wird so gewählt, daß sich die quadratische Funktion verkleinert. Auf diese Art wird der Unbekanntenvektor solange verbessert, bis man nach einigen Wiederholungen dieser Schritte zum Minimum der Funktion $F(x)$ gelangt. Dies ist dann der Fall, wenn das Gleichungssystem (3) widerspruchlos erfüllt ist.

In den Bildern 1 und 2 wird ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten dargestellt. Die Linien mit konstantem Funktionswert bilden konzentrische Ellipsen, deren Mittelpunkt einerseits den Punkt x mit geringstem Funktionswert $F(x)$ und andererseits auch die Lösung des Gleichungssystems angibt.

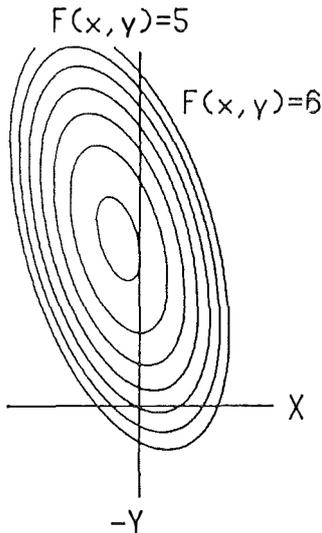


Bild 1: Gleichungssystem

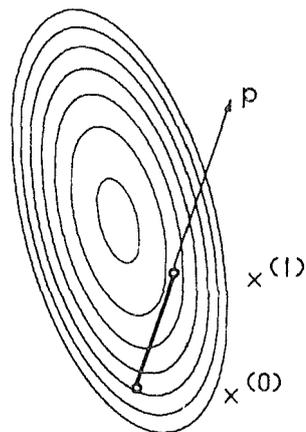


Bild 2: Iterative Lösung

Im Bild 2 ist die Wahl des Näherungspunktes beziehungsweise die Richtungswahl dargestellt.

Die verbesserte Lösung ergibt sich durch die einfache Beziehung

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} + q_i \mathbf{p}^{(i)} \tag{4}$$

wobei q_i die Länge in der Fortschrittsrichtung (Relaxationsrichtung) festlegt. Die verschiedenen Verfahren unterscheiden sich durch die Wahl der Relaxationsrichtungen und durch die Längenwahl dieser Vektoren.

Eine mögliche Lösungsstrategie ist, diese Richtung so zu wählen, daß sie im lokalen Bereich der Näherungslösung in Richtung des größten Abstiegs der quadratischen Funktion $F(\mathbf{x})$ weist.

$$\text{grad } F(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \mathbf{r}^{(i)} = -\mathbf{p}^{(i+1)} \tag{5}$$

Die Richtung des stärksten Abstiegs errechnet sich durch die Residuen $\mathbf{r}^{(i)}$ (Widersprüche), die sich ergeben, wenn man den Näherungsvektor $\mathbf{x}^{(i)}$ in das Gleichungssystem (3) einsetzt. Eine andere Interpretation erreicht man durch die Nichterfüllung der Orthogonalitätsbedingung.

$$\text{grad } F(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^T \mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{r}^{(i)} \tag{6}$$

Der Residuenvektor gibt jene Richtung und Länge an, die sich durch die Nichtorthogonalität des genäherten Verbesserungsvektors zu den Spalten der Koeffizientenmatrix \mathbf{A} ergibt. Diese Methode wird als Gradientenmethode bezeichnet und hat die spezielle Eigenschaft, daß durch diese Wahl der Relaxationsrichtung erreicht wird, daß man sich nur in dem von den Zeilen von \mathbf{A} aufgespannten Unterraum bewegt, da \mathbf{r} immer eine Linearkombination der Spalten von \mathbf{A}^T und damit der Zeilen von \mathbf{A} darstellt. Daraus ergibt sich automatisch eine Auftransformation auf die Näherungskordinaten, wenn die Beobachtungsgleichungen nicht vollen Spaltenrang besitzen (siehe *Fuchs et al*, 1983). Dieses iterative Verfahren beschreibt im m -dimensionalen Raum ($m = \text{Rang}(\mathbf{A})$) einen stückweise geradlinigen, rechtwinkeligen Weg, der im Minimum der quadratischen Funktion endet. Die Niveaulächen der zu minimierenden quadratischen Funktion stellen m -dimensionale konzentrische Ellipsoide dar. Der Mittelpunkt dieser Ellipsoide entspricht der gesuchten Lösung. Dieser Lösungsweg ist im Bild 3 für den zweidimensionalen Fall dargestellt.

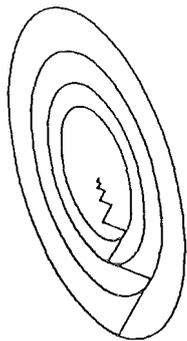


Bild 3: Gradientenmethode

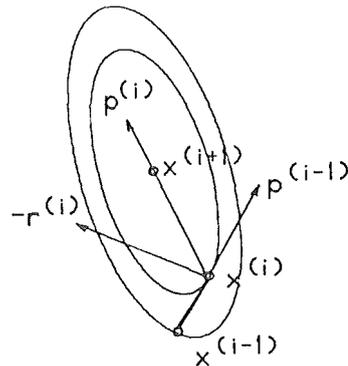


Bild 4: Konjugierte Gradientenmethode

Da die Schnitte der Niveaulächen der Funktion $F(\mathbf{x})$ mit den Ebenen, die durch $\mathbf{p}^{(i-1)}$ und $\mathbf{r}^{(i)}$ aufgespannt werden, immer konzentrische Ellipsen sind, bietet sich eine Verbesserung des Verfahrens an, indem man den Mittelpunkt der Schnittellipsen mit Hilfe der konjugierten Durchmesser berechnet und als neue Näherung für den Unbekanntenvektor nimmt. Dieser Mittelpunkt bildet das Minimum der Funktion $F(\mathbf{x})$ in dieser Ebene. Mit dieser Berechnungsmethode, welche als konjugierte Gradientenmethode bezeichnet wird, erreicht man eine wesentliche Steigerung der Konvergenzgeschwindigkeit.

Die Relaxationsrichtungen bilden dabei ein System von konjugierten Richtungen. Die Residuenvektoren stehen wieder normal zueinander. Damit ergibt sich, daß dieses Verfahren theoretisch nach m Schritten zu einer strengen Lösung führt.

Durch die spezielle Struktur bei geodätischen Netzen wird meist schon vor der m -ten Iteration eine genügend genaue Lösung erreicht, sodaß die Berechnung abgebrochen werden kann. Die Anzahl der Iterationen ist abhängig von der Größe, der Regelmäßigkeit und der Lagerung des Netzes. Eine Eigenschaft dieses Verfahrens ist es, daß sich auch bei mittelgroßen und großen Netzen schon nach wenigen Iterationen (ungefähr 10–20 Iterationen) eine gute lokale Genauigkeit feststellen läßt, wonach für die Zwecke der groben Fehlersuche die Berechnungen abgebrochen werden können.

Diese lokale und globale Konvergenz ist in den Bildern 5 bis 7 veranschaulicht. Es wird ein reines Streckennetz mit 812 Beobachtungen und 225 Punkten, wobei das Netz durch drei Festpunkte gelagert ist, berechnet. Die Näherungskordinaten weisen unregelmäßige Fehler in allen Richtungen auf. Die Abweichungen sind im Bild 6 festgehalten. Die Abweichungen nach 10 Iterationen mit den konjugierten Gradienten werden im Bild 7 aufgezeigt. Die Größenordnung der Fehler ist bereits um eine Zehnerpotenz gesunken. Man erkennt sehr schön verschiedene Schwingungen und Wirbel, sodaß die berechnete Lösung für die Festlegung der Unbekannten noch nicht brauchbar ist. Die Genauigkeit zwischen benachbarten Punkten erreicht schon einen sehr hohen Grad, sodaß die Strecken nur noch Fehler aufweisen, die unter 1% der ursprünglichen Fehler liegen.

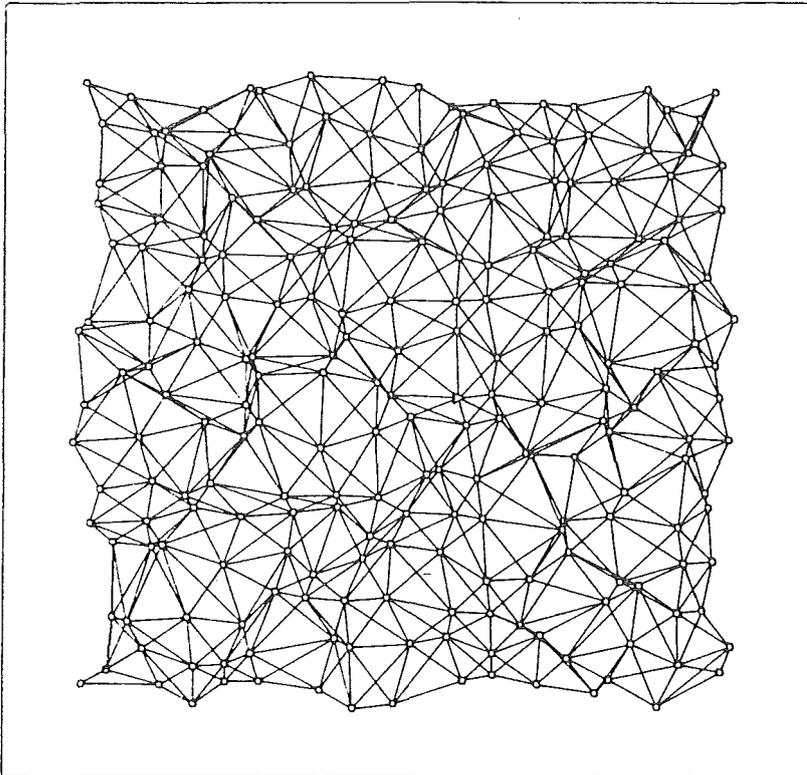


Bild 5: Unregelmäßiges Streckennetz

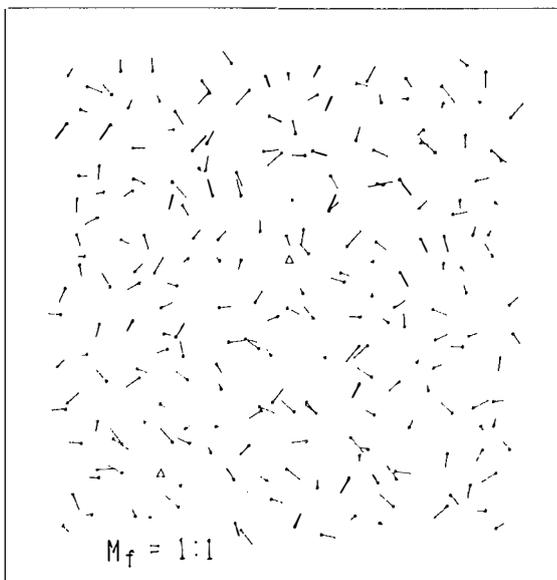


Bild 6: Fehler der Näherungskordinaten

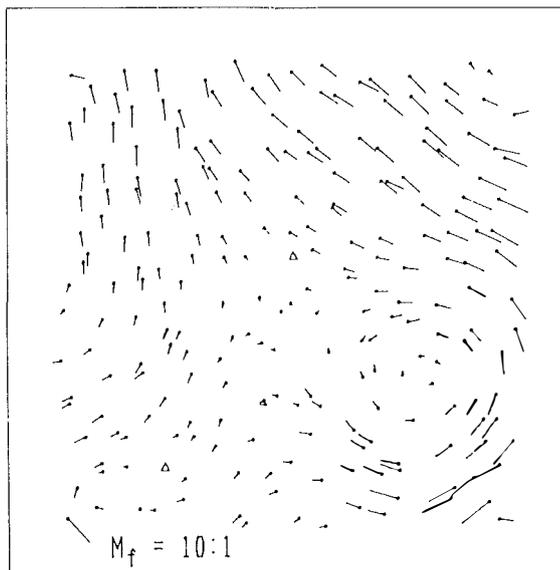


Bild 7: Fehler nach 10 Iterationen

Diese rasche Konvergenz im lokalen Bereich ist auf die Eigenheiten geodätischer Netze zurückzuführen. Da der Netzaufbau hauptsächlich durch Messungen zu den jeweils örtlich benachbarten Punkten durchgeführt wird, ergibt sich für die Normalgleichungen eine spezielle Struktur der Eigenwerte und Eigenvektoren: Ein Großteil der Eigenwerte hat dieselbe Größenordnung (innerhalb einer Zehnerpotenz), und einige wenige Eigenwerte sind beträchtlich kleiner (mehrere Zehnerpotenzen). Betrachtet man die zugehörigen Eigenvektoren, so erkennt man, daß die zu den kleineren Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren Schwingungen mit großer Wellenlänge verursachen. Das bedeutet, daß diese kleinen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren für diese globalen Schwingungen verantwortlich sind und durch die Lagerung und die Ausbreitung des Netzes sehr stark beeinflußt werden. Je größer die Netze sind, umso größer wird der Abstand zwischen dem Großteil der Eigenwerte und den kleineren Eigenwerten.

Durch die unterschiedlichen Eigenwerte bekommen die Niveauellipsoide stark unterschiedliche Achslängen; dadurch wird die zu minimierende Funktion in diesen Richtungen sehr flach, sodaß das Minimum nur schwer ermittelt werden kann. Diese schlechte Konvergenz im globalen Bereich stört überhaupt nicht bei der groben Fehlersuche. Hier kommt es nur auf eine gute lokale Genauigkeit an, die schon nach wenigen Iterationen mit den konjugierten Gradienten gegeben ist. Die vielen, ungefähr gleich großen Eigenwerte verwandeln die Niveauflächen der quadratischen Funktion von Ellipsoiden immer mehr in konzentrische Kugeln, deren Mittelpunkt leicht und schnell zu bestimmen ist.

Die Methode der konjugierten Gradienten bietet ohne Aufstellung der Normalgleichungen eine sehr rasche Möglichkeit, eine gute lokale Genauigkeit zu erlangen.

3. Gewichtsiteration

Die zur Aufdeckung grober Fehler entwickelten Strategien sind sehr aufwendig und benötigen sehr viel Rechenzeit (Wiederholungen, Inversionen). Die dänische Methode nach Ideen von *T. Krarup* bietet eine einfache und effiziente Möglichkeit zur Säuberung der Rohdaten von groben Ausreißern. Bei dieser Methode wird nach dem Gauß'schen Minimumsprinzip ausgeglichen, und anschließend werden die Gewichte der Beobachtungen auf Grund der homogenisierten Verbesserungen neu festgesetzt. Als sehr brauchbar in der Photogrammetrie und bei geodätischen Netzen erwies sich folgender Gewichtsneuanatz:

$$\text{2. und 3. Iteration} \quad P = \exp\left(-\left|\frac{v}{\sigma}\right|^{4 \cdot 4}\right) \cdot 0.05 \quad (7)$$

$$\text{folgende Iterationen} \quad P = \exp\left(-\left|\frac{v}{\sigma}\right|^{3 \cdot 0}\right) \cdot 0.05 \quad (8)$$

In diesen Formeln bedeutet v die homogenisierte Verbesserung (Verbesserungen beim Gewicht Eins), und σ bedeutet den jeweils berechneten Gewichtseinheitsfehler (in diesem Gewichtseinheitsfehler sind auch die falschen Beobachtungen berücksichtigt). Im Bild 8 sind diese beiden Funktionen für die Neugewichtung dargestellt.

Bemerkenswert an diesen Funktionen ist, daß die Funktionswerte ab ungefähr 3.5 beziehungsweise 5 im Sinne der Rechengenauigkeit Null sind. Dies bedeutet, daß die Größe der zu eliminierenden Fehler keinen Einfluß auf das Ergebnis hat. Dieser Ansatz sorgt für eine gute Fehlererkennung und konvergiert nach wenigen Iterationen (je nach der unterschiedlichen Größenordnung der groben Fehler sind zwischen 5 bis 15 Gewichtsiterationen notwendig). Durch eine andere Wahl dieser Gewichtskurven kann die Aggressivität der Elimination verändert werden.

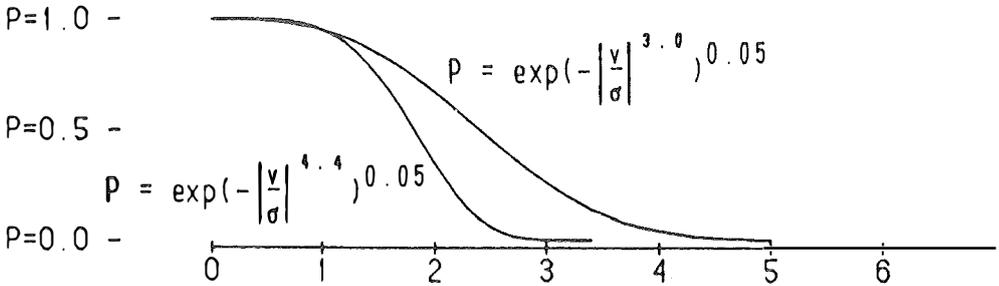


Bild 8: Gewichtskurven

4. Testbeispiel

Als Testbeispiel wurde ein kombiniertes Richtungs- und Streckennetz gewählt. Das Netz besteht aus 6 Punkten und ist im Bild 9 dargestellt. In jedem Punkt wurde ein Richtungs-satz beobachtet (26 Richtungsmessungen), und außerdem wurden zur Versteifung 6 Streckenmessungen durchgeführt. Das Netz wird frei ausgeglichen, wobei kein Maßstabsfaktor angesetzt wird, damit ergeben sich 18 Unbekannte bei 32 Beobachtungen. Die Näherungskordinaten wurden aus einer nur ungefähr erstellten Handskizze abgegriffen und durch zweimalige Ausgleichung verbessert.

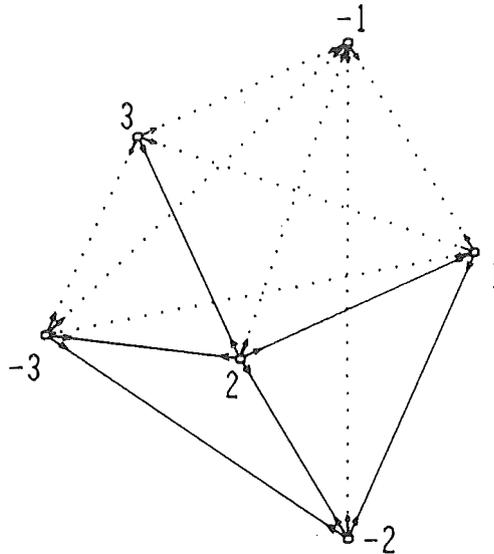


Bild 9: Netzkonfiguration

- Die richtigen Beobachtungen werden durch folgende Maßnahmen verfälscht:
1. In die Streckenbeobachtung von 2 nach -2 wird ein Ziffernsturz eingeführt, sodaß die Strecke anstelle von 438.704 mit 483.704 angegeben ist (Fehler = 4500 x m_S).

2. Bei der Richtungsbeobachtung von 1 nach 3 wird eine Zielpunktverwechslung angenommen, sodaß diese Richtungsbeobachtung von 1 nach -3 zeigt (Fehler = $32000 \times m_R$).
3. Die Streckenbeobachtung von 1 nach 2 wird um $0,08$ m verlängert (Fehler = $8 \times m_S$).
4. Die Richtungsbeobachtung von 1 nach 2 wird um $0^{\circ}013$ verändert (Fehler = $9 \times m_R$).

Bei der Berechnung werden folgende Abbruchkriterien verwendet: Für die konjugierten Gradienten wird bei den ersten sechs Gewichtsiterationen jeweils eine Verkleinerung der Quadratsumme des Residuenvektors um eine Zehnerpotenz gefordert. Ab der 7. Gewichtsiteration wird immer die gleiche Länge des Residuenvektors verlangt. Der Betrag des Residuenvektors muß also um einen Faktor 1000 kleiner sein als seine ursprüngliche Länge war. Die zuvor berechneten Unbekannten werden dabei als neue Näherungskordinaten verwendet. Als Abbruchkriterium für die Gewichtsiteration wird eine Änderung des Gewichtseinheitsfehlers von weniger als 1% des vorangegangenen Wertes angenommen. Es wird bei der Gewichtsiteration darauf Bedacht genommen, daß der berechnete Gewichtseinheitsfehler nicht unter den Wert Eins sinkt. Ist dies der Fall, so wird für die weitere Rechnung der Gewichtseinheitsfehler auf Eins gesetzt. (Führt man diese Beschränkung nicht ein, so kann es geschehen, daß das System nur sehr langsam konvergiert, wobei die Lösung dem gleichen Ergebnis

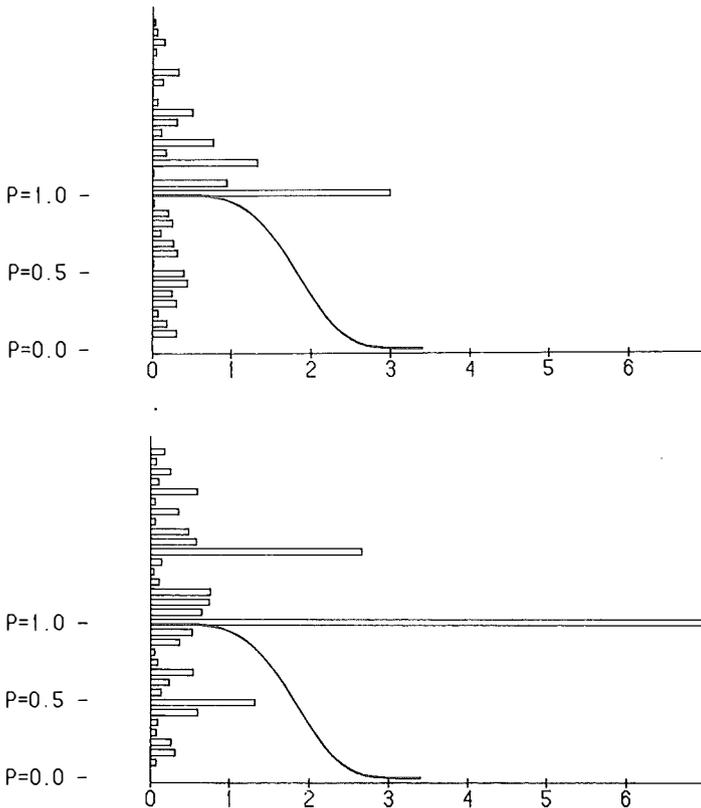


Bild 10 und 11: Verbesserungen nach erster und zweiter Ausgleichung

zustrebt, welches auch durch eine Ausgleichung der Rohdaten nach der 1-Norm entsprechen würde. Dies tritt vor allem bei schlechter Überbestimmung auf.) Der Rechenablauf ist mit Hilfe der Bilder 10 bis 13 dargestellt. Im Bild 10 sind die Verbesserungen nach der ersten Ausgleichung als Balken dargestellt. Man erkennt einen groben Ausreißer. Die Neugewichtung wird anhand der stark gezeichneten Kurve durchgeführt. Das mit dieser Gewichtung berechnete Ergebnis ist im Bild 11 festgehalten. Die sehr grob falsche Richtung und Strecke wird als fehlerhaft erkannt und für die nächste Berechnung mit dem Gewicht Null versehen. Nach zwei weiteren Iterationen ergeben sich die im Bild 12 aufgezeichneten Verbesserungen. Die beiden groben Fehler können hier wegen ihrer Größe nicht mehr sinnvoll dargestellt werden. Bei den anderen Verbesserungen weisen drei Werte auf fehlerhafte Beobachtungen hin. Wenn man mit dem aufgezeigten Verfahren weiteriteriert, so erlangt man das in Bild 13 gezeichnete Ergebnis. Da bei dieser Methode die errechnete Verbesserung von grob falschen Werten genau die Größe ihres Fehlers annimmt (45 m Fehler ergibt eine Verbesserung von 45 m), können mit dieser Darstellung die Verbesserung der falschen Beobachtungen nicht gezeichnet werden. Im Bild 14 findet man daher eine Gegenüberstellung der Verbesserungen einer Ausgleichung ohne die zwei sehr grob falschen Werte (Fehler 1 und 2) mit den Verbesserungen, die sich mit Hilfe der Gewichtsiterationen ergeben. Hier erkennt man im rechten Bildteil sehr schön, welche Beobachtungen als fehlerhaft erkannt werden. Im linken Bildteil ist die zweitgrößte Verbesserung einer Beobachtung zugehörig, die sich als richtig herausstellt.

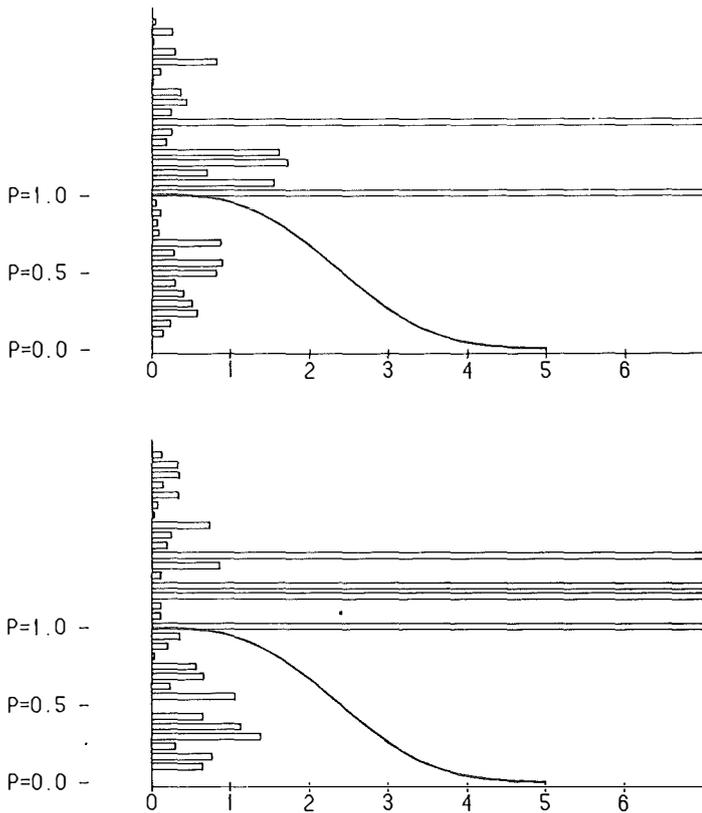


Bild 12 und 13: Verbesserungen nach vierter und letzter Ausgleichung

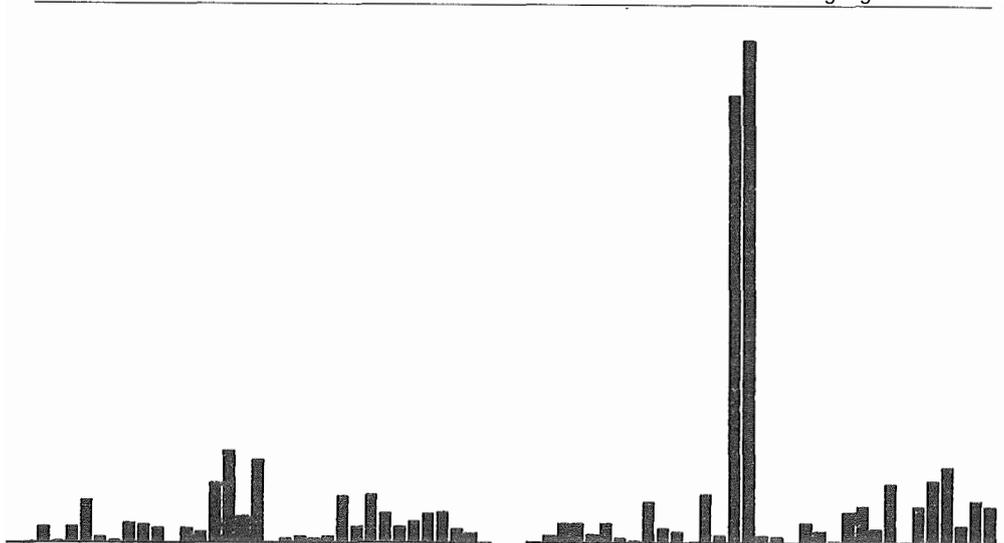


Bild 14: Verbesserungen nach der normalen Ausgleichung und nach der Gewichtsiteration

5. Formelzusammenstellung – Zusammenfassung

Im folgenden werden die Formeln zusammengestellt, die zur direkten Berechnung der ausgeglichenen Unbekannten aus den Verbesserungsgleichungen mit Hilfe der konjugierten Gradientenmethode dienen.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(0)} &= \mathbf{A} \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{l} \\ \mathbf{r}^{(0)} &= \mathbf{A}^T \mathbf{v}^{(0)} \\ \mathbf{p}^{(0)} &= -\mathbf{r}^{(0)} \end{aligned}$$

$i = 0, 1, 2, \dots$

$$\left. \begin{aligned} e_i &= \frac{(\mathbf{r}^{(i)})^T \mathbf{r}^{(i)}}{(\mathbf{r}^{(i-1)})^T \mathbf{r}^{(i-1)}} \\ \mathbf{p}^{(i)} &= -\mathbf{r}^{(i)} + e_i \mathbf{p}^{(i-1)} \end{aligned} \right\} i \geq 1$$

$$q_i = \frac{(\mathbf{r}^{(i)})^T \mathbf{r}^{(i)}}{(\mathbf{A} \mathbf{p}^{(i)})^T \mathbf{A} \mathbf{p}^{(i)}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(i+1)} &= \mathbf{x}^{(i)} + q_i \mathbf{p}^{(i)} \\ \mathbf{v}^{(i+1)} &= \mathbf{v}^{(i)} + q_i \mathbf{A} \mathbf{p}^{(i)} \\ \mathbf{r}^{(i+1)} &= \mathbf{A}^T \mathbf{v}^{(i+1)} \end{aligned}$$

Gewichtsiterationen

$$\text{2. und 3. Iteration} \quad P = \exp\left(-\left|\frac{v}{\sigma}\right|^{4 \cdot 4}\right) \cdot 0.05$$

$$\text{folgende Iterationen} \quad P = \exp\left(-\left|\frac{v}{\sigma}\right|^{3 \cdot 0}\right) \cdot 0.05$$

Die Methode der konjugierten Gradienten bildet eine gute Ergänzung zum Verfahren der Gewichtsiteration. Da bei den konjugierten Gradienten schon nach wenigen Iterationen eine gute lokale Genauigkeit erreicht wird, kann die Berechnung auch bei großen Netzen schon nach wenigen Iterationen unterbrochen werden. Bei den ersten Gewichtsiterationen sind bei großen Fehlern sehr starke Veränderungen bemerkbar. Nach wenigen Gewichtsiterationen ändern sich die Verbesserungen nur mehr wenig, sodaß die aus der vorhergehenden Berechnung erlangten Näherungswerte schon einen sehr guten Startwert beim konjugierten Gradientenverfahren bieten, wodurch sich die Anzahl der Iterationen, die zur Gleichungsauflösung notwendig sind, sehr rasch senkt.

Dieses Verfahren zeichnet sich vor allem durch seine Einfachheit aus. Unabhängig davon, ob ein freischwimmendes Netz oder ein Zwangsnetz berechnet wird, läßt sich die Berechnung rasch durchführen (ohne Aufstellung der Normalgleichungen). Die groben Fehler werden erkannt und die Größe des Fehlers in den Verbesserungen genau aufgezeigt. Dadurch ist eine leichte Fehlererkennung und eventuelle Korrektur von Tippfehlern, Zielpunktverwechslungen oder Ziffernstrüzen möglich. Die Programmierung dieser Kombination von Verfahren ist bis zu einer Größenordnung von 400 Unbekannten bei einem freien Arbeitsspeicher von 30 KByte ohne großen Aufwand an Datenstruktur möglich. Der Platzbedarf steigt linear mit der Anzahl der Unbekannten. Die Berechnungen beschränken sich auf die wiederholte Auswertung von acht Matrizenformeln.

Literatur

- Baarda, W.* (1980): A testing procedure for use in geodetic networks, NGC Vol. 2, No. 5.
Fuchs, H. (1980): Untersuchungen zur Ausgleichung durch Minimierung der Absolutsumme der Verbesserungen, Dissertation TU Graz.
Fuchs, H.; Hofmann-Wellenhof, B.; Schuh, W.-D. (1983): Adjustment and Gross Error Detection of Leveling Networks, in H. Pelzer und W. Niemeier (Herausgeber), *Precise Leveling*, S. 391–409, Dümmler Verlag, Bonn.
Krarup, T.; Juhl, J.; Kubik, K. (1980): Götterdämmerung over least squares adjustment, ISP Congress Hamburg, Comm. III, S. 369–378.
Schwarz, H. R. (1968): Numerik symmetrischer Matrizen. Leitfäden der Mathematik und Mechanik, Teubner, Stuttgart.
Schwarz, H. R. (1970): Die Methode der konjugierten Gradienten in der Ausgleichsrechnung, ZfV. Vol. 95, Nr. 4, S. 130–140.