

Paper-ID: VGI\_198312



## Zur trigonometrischen Höhenmessung in steilem Gelände

Gottfried Gerstbach <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Technische Universität Wien, Institut für Theoretische Geodäsie und Geophysik, Gußhausstraße 27-29, A-1040 Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **71** (3), S. 122–128

1983

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Gerstbach_VGI_198312,  
Title = {Zur trigonometrischen Höhenmessung in steilem Gelände},  
Author = {Gerstbach, Gottfried},  
Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift f{{\u}r Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {122--128},  
Number = {3},  
Year = {1983},  
Volume = {71}  
}
```



## Zur trigonometrischen Höhenmessung in steilem Gelände

Von G. Gerstbach, Wien

### Zusammenfassung

Bei der Messung großer Höhenunterschiede ist eine klare Trennung zwischen Meereshöhen und ellipsoidischen Höhen notwendig, die sich oft auch lokal um mehrere Dezimeter unterscheiden. Durch einen parabolischen Ansatz für die Lotabweichung auf steilen Hängen läßt sich die Genauigkeit bzw. Wirtschaftlichkeit in beiden Fällen wesentlich steigern.

Aus Erfahrungswerten der Meß- und Refraktionsfehler wird die optimale Visurlänge für gegenseitige Zenitdistanzmessungen ermittelt. Sie beträgt etwa 500 m, wobei möglichst in der Falllinie des Hanges zu arbeiten ist.

### Abstract

The determination of great height differences calls for an exact distinction between heights above sea-level and ellipsoidal heights, which often differ locally for several dm. A parabolic approach for the deviation of the vertical on steep slopes substantially increases the accuracy and the efficiency.

The optimal length of line is determined from empirical values of the measuring- and refraction errors. It is approximately 500 m and the measurements should be performed in the line of dip.

### 1. Einleitung

Seit der Entwicklung handlicher Nahbereichs-Entfernungsmesser hat die trigonometrische Bestimmung von Höhen stark an Bedeutung gewonnen. Gleichzeitig wurde der Mangel an einem eindeutig definierten Gebrauchshöhensystem spürbar, vor allem bei Vermessungen im Gebirge.

Die zügige Beobachtung oder die Interpolation von Lotabweichungen stellt heute kein Problem mehr dar [2], [5]; auch lokale Gravimetermessungen sind hierfür nutzbar [4]. Daher ist die konsequente Berechnung ellipsoidischer Höhen möglich geworden, etwa im österreichischen Bundesvermessungsdienst [10]. Andererseits sollte aber durch die trigonometrische Übertragung der Talhöhen in die Gipfflur der geometrisch-physikalische Charakter von Nivellementhöhen nicht verlorengehen.

Mit diesem Problem hat sich u. a. Brunner [3] beschäftigt und gezeigt, daß das trigonometrische Nivellement mit kürzeren Schrägstrecken und gegenseitigen Zenitdistanzen Höhen vom Typus des geometrischen Nivellements liefert, letzterem aber im Gebirge überlegen ist. Im folgenden wird diese Untersuchung aktualisiert, vor allem aber durch ein Lotabweichungsmodell und einen empirisch erhärteten Refraktionsansatz einer weitgehenden Optimierung unterzogen.

Bei kreisähnlicher Lichtbahn (Refraktionskoeffizienten  $k_{ij} \approx k_{ji}$ ,  $R \approx 6379$  km) ist der Höhenunterschied einer Teilstrecke  $s_{ij}$

$$\Delta H_{ij} = s_{ij} \frac{\cos z_{ij} - \cos z_{ji}}{2} - (s_{ij} \sin z_{ij})^2 \cdot \frac{k_{ij} - k_{ji}}{4R} + E_{ij} \quad (1)$$

$$E_{ij} = \sin z_{ij} \left( \int_1^j \varepsilon ds - s_{ij} \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_j}{2} \right) \quad (1a)$$

Der letzte Term berücksichtigt, daß die Lotabweichungskomponente  $\epsilon$  entlang der Visur nicht linear verlaufen muß. Im Flachland bzw. für kurze Strecken kann  $E_{ij}$  vernachlässigt werden, in den Alpen jedoch 10 cm auf 3 km erreichen. Bei kurzen Strecken nimmt dieser systematische Fehler etwa mit  $s^3$  zu (siehe Formel 6). Ab Visurlängen von 1–2 km wächst er langsamer, um schließlich wegen wechselnder Krümmung der Lotabweichungskurve einem Grenzwert von höchstens 50 cm zuzustreben.

Unterteilt man nach [3] den Gesamthöhenunterschied  $H$  in  $n$  gleiche Schrägstrecken, wird sein mittlerer Fehler und die Zenitdistanz

$$M_H = \pm \sqrt{n} \cdot m_{\Delta H}, \quad \cos z = \frac{H}{ns} = \text{const.} \quad (2)$$

Bei Zwangszentrierung (v. a. in Höhe) folgt aus (1) und (2)

$$M_H^2 = \frac{1}{n} \left[ \frac{n^2 s^2 - H^2}{2} m_z^2 + \frac{H^2}{s^2} m_s^2 + \left( \frac{n^2 s^2 - H^2}{4R \cdot n} \right)^2 m_{\Delta k}^2 + \left( \frac{n^2 s^2 - H^2}{n} \right)^3 m_E^2 \right] \quad (3)$$

Die Meßstrecken  $s$  können dabei alternierend um konstante Winkel aus der Fallinie ausweichen. Eventuelle kleine Fehler bei der Zentrierung der Streckenmessung auf die Zenitdistanzmessung seien im Streckenfehler  $m_s$  inkludiert. Der Höhenanschluß an die zwei Vermarkungen kann ausreichend genau ( $< 1$  mm) erfolgen. Aufgrund der tabellierten Einzelfehler läßt sich die Meßanordnung bestimmen, bei der  $M_H$  minimal wird – siehe Kapitel 4.

Einzelfehler	$m_z$	$m_s$	$m_{\Delta k}$	$m_E$ (für 1km)
nach [3]	$\pm 5^{cc}$	$\pm 10$ mm	$\pm 0.5$	$\pm 8$ mm systemat.
vorlieg. Arbeit	$\pm 5^{cc}$	$\pm 5$ mm $\pm 5$ ppm	$\pm 0.5 \cdot e^{-s/1200}$	$\pm 2$ mm quasizuf.

Tabelle 1 Fehlereinflüsse beim trigonometrischen Nivellement

Die beiden letzten Terme in (3) beschreiben den Einfluß der Refraktionsdifferenz und des Lotabweichungsverlaufes. Ihnen sind die nächsten Abschnitte gewidmet.

### 2. Einfluß der Refraktion

Der Refraktionskoeffizient beträgt im Mittel  $k = 0,13$ , schwankt aber im einzelnen um etwa  $\pm 0,3$  und läßt sich aus meteorologischen Daten nur schwierig erfassen. Für praktische Arbeiten – vor allem bei bodennahen Visuren – ist es am verlässlichsten, ihn durch gleichzeitig-gegenseitige Zenitdistanzmessungen zu eliminieren.

Gemäß Formel (1) wird die Höhendifferenz dann nur vom Refraktionsunterschied  $\Delta k$  beider Standpunkte beeinflusst. Da er örtlich und zeitlich variiert, soll  $\Delta k$  im folgenden als zufälliger Fehler gelten. Sein mittlerer Betrag wird aus neueren Refraktionsuntersuchungen im Gebiet der Hohen Wand (niederösterreich. Kalkalpen) abgeleitet, wo im Zuge einer Diplomarbeit des Institutes für Theoretische Geodäsie ein vertikales Dreieck vollständig ausgemessen und später zu einem vertikalen Viereck ergänzt wurde [8], [9]. Die 6 Strecken (ca.  $\pm 0,3$  km) liegen zwischen 400 m und 2300 m, die mittlere Visurteilung beträgt  $16^\circ$  (maximal  $29^\circ$ ) und der Bodenabstand 3–10% der Strecken.

Abb. 1 zeigt die quadratischen Mittelwerte der  $\Delta k$  aller längeren Meßtage und zweier 24-Stunden-Messungen. Zu Gruppen zusammengefaßt, lassen sie einen exponentiellen Verlauf erkennen:

$$m_{\Delta k} = \pm 0.50 \cdot e^{-s/1200} \quad (4)$$

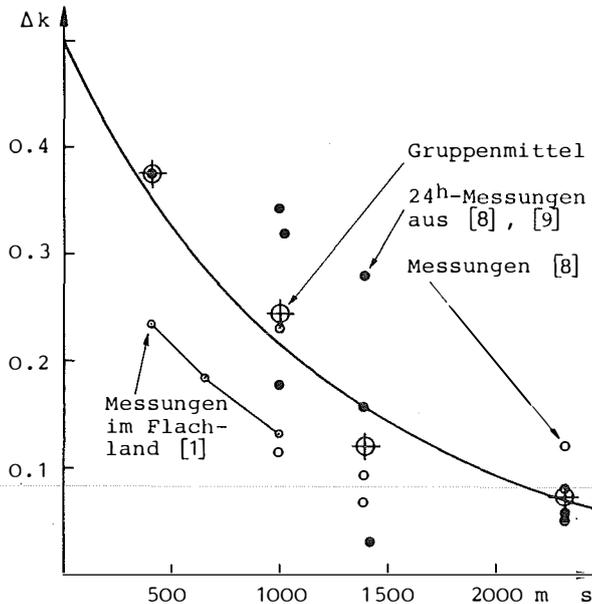


Abb. 1: Refraktionsdifferenz  $\Delta k$  in Funktion der Visurlänge (Hohe Wand, NÖ)

Ein Wert von  $\Delta k_0 = 0,5$  für kurze Visuren ist nach *Brocks* [1] plausibel. In Abb. 1 wurden ferner einige Vergleichswerte aus dem Flachland (*Bahnert, Drok*) mit  $m_{\Delta k} = \sqrt{2} m_k$  eingetragen.

### 3. Lotabweichung an steilen Hängen

Der Lotabweichungsterm in (1) rührt daher, daß die Wirkung der topografischen Massen im Gebirge sehr unregelmäßig ist und die lokale „Lotstörung“ am Hang  $\pm 20''$  erreichen kann. Mißt man den Höhenunterschied Berg–Tal im ganzen, erhält man ihn daher systematisch (um etwa  $10^{-4}$ ) zu groß. Mögliche Auswege sind:

- enge Unterteilung der Meßstrecke („trigonometrisches Nivellement“), um eine Annäherung an nivellierte Höhen zu erreichen;
- Messung eines Lotabweichungsprofils am Hang („Astron. Nivellement“);
- Berechnung des Lotabweichungsterms aus topografischen Massen.

Weil a) oder b) den Meßaufwand erhöht, wird im folgenden eine einfache Methode für c) entwickelt.

Langwellige Lotabweichungsanteile (ca.  $\pm 10''$  pro 100 km) können wegen der Differenzbildung in (1a) außer Betracht bleiben. Die Gebirgskämme werden daher durch einzelne dreiseitig-unendliche Prismen angenähert, die sich entlang ihrer Basis – in der Talmitte – berühren. Die Seitentäler der Alpen haben Abstände von 5–10 km und Hangneigungen von etwa 50%. In Abbildung 2 wurden daher Prismen der Dimension  $2B = 8$  km,  $H = 2$  km angenommen und ihre Lotstörungen nach adaptierten Formeln von *Mader* (1951) berechnet.

Mit Bezug auf *Helmert* wird immer wieder behauptet, daß die maximale Lotstörung im unteren Drittel eines Hanges auftritt. Das stimmt zwar für einen einzelnen prismatischen Gebirgszug, nicht aber für ein echtes Tal. Hier liegt  $\epsilon_{\max}$  nur knapp unterhalb der Hangmitte, wodurch sich die Lotstörungskurve durch eine einfache Parabel approximieren läßt (Abb. 2). Die Übereinstimmung wird bei eingeebnetem Talboden noch besser.

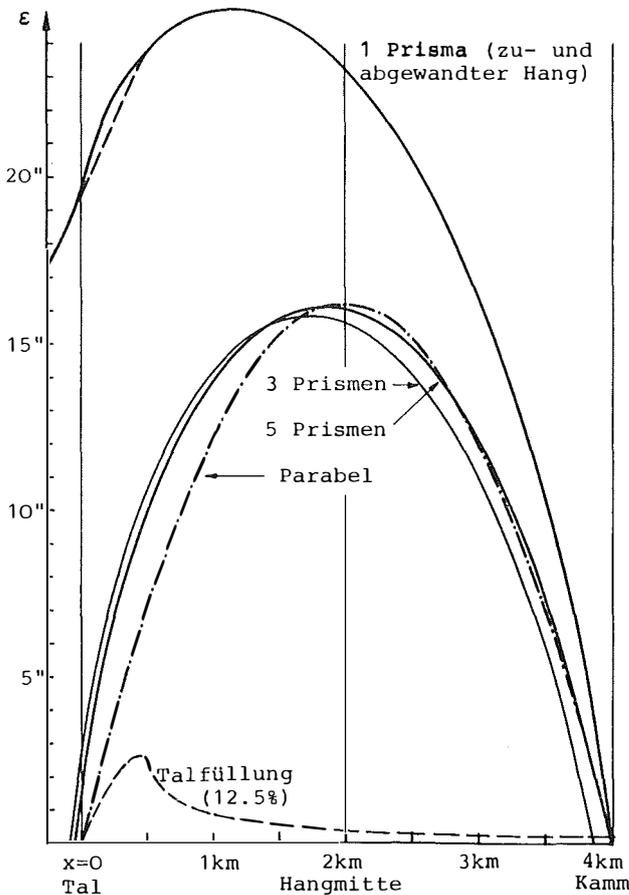


Abb.2: Lotstörung an einem Hang H=2km, B=4km

Die maximale Lotstörung ist genähert proportional zu H, was durch die „Hangformel“ [6] S. 117 erklärt und durch einige Modellrechnungen für  $H < B$  bestätigt wird. Wegen des Ähnlichkeitssatzes gilt somit für beliebige symmetrische Prismen der Dichte  $\rho = 2,67 \text{ g/cm}^3$

$$|\epsilon| \doteq 32.4'' \cdot H_{\text{km}} \left[ \frac{x}{B} - \left(\frac{x}{B}\right)^2 \right], \quad x < B \quad (5)$$

wobei x der Horizontalabstand von der Talmitte ist. Der Lotabweichungsterm in (1) wird daher nach einigen Umformungen

$$E_{i,j} = \int_1^j \epsilon \, dx - \frac{\epsilon_i + \epsilon_j}{2} (x_j - x_i) \doteq \frac{5.4''}{g''} H_{\text{km}} \frac{(x_j - x_i)^3}{B^2} = \frac{5.4''}{g''} H_{\text{km}} \frac{(s_{ij} \sin z_{ij})^3}{B^2 \cos^3 \beta} \quad (6)$$

und besitzt wie  $\epsilon$  das gegenteilige Vorzeichen von  $\Delta H_{ij}$ ;  $\beta$  ist der Winkel, um den die Visur aus der Richtung der Falllinie ausweicht. Auf einem glatten Hang hat (5) eine Genauigkeit von  $\pm 1-2''$  und (6) eine von etwa  $\pm 5\%$ . Wird der Höhenunterschied H mit einer einzigen Visur gemessen, beträgt die Reduktion für  $H = 2 \text{ km}$ ,  $B = 4 \text{ km}$  demnach  $-21 \pm 1 \text{ cm}$ .

In der Natur sind freilich größere Fehler zu erwarten, weil die Bergflanken unregelmäßig und verschieden sind. Bei der Ermittlung von B und H sollte man daher in der Karte einige km ausgreifen. Durch Vergleich von (5) mit gemessenen Lotabweichungen ergab sich aus verschiedenen Projekten:

Gebiet	Lit.	Punkte	$H_{km}$	$B_{km}$	$\bar{s}_{ij}$	$m_{\varepsilon}$	$m_E(\bar{s}_{ij})$	$m_E(1km)$
a) Gotthard-Profil	[7]	8 (25)	0.5-1.6	2-4	1 km	$\pm 2''$	+3mm	+3.0mm
b) Testnetz Innsbr.	[4]	4 (6)	1.9	7	2-4	4	28	1.5
c) Rauristal	[10]	7 (10)	1.3	3-4	1.9	3	17	2.1
d) Hohe Wand	[9]	4	0.4	1.4	1.3	1.1	4	1.8
e) Umgebung Wien	Verf.	44	0.1-0.4		5.0	1.1	19	~0.5

**Tabelle 2** Fehler der parabolischen Lotstörungsformel (5)

Bei a), b) und d) handelt es sich um Talprofile, während e) ein flächenhaftes Gebiet darstellt. Die ersten drei Projekte enthalten auch Lotabweichungen, die durch genauere Gelände-Modelle interpoliert wurden [bei b) und c) vom Verfasser]. In Tabelle 2 bedeutet  $\bar{s}_{ij}$  den mittleren Punktabstand und  $m_{\varepsilon}$  die Standardabweichung der Lotstörung (5) vom wahren Wert. Die anderen Größen beschreiben den Lotstörungsterm (1a). Beim Gotthard-Projekt wurden die Geländeformen seitlich des Profils in (5) vernachlässigt, so daß der Wert für  $m_{\varepsilon}$  den Durchschnitt von  $\pm 2$  mm deutlich übertrifft. Das Wiener Testnetz e) liegt im Flach- und Hügelland und wurde exakt topografisch reduziert — somit dürfte  $m_{\varepsilon} = \pm 0,5$  mm der unterste Grenzwert bei feiner Geländedarstellung sein. Er wird hauptsächlich durch Dichteanomalien im Untergrund verursacht [2], [6].

Durch die Lotstörungsformel (5) reduziert sich der systematische Fehler  $E_{1,n} \approx 8 ns^3$  [3] auf einen quasizufälligen Fehler von  $\pm 2 ns^3$  (jeweils in mm bzw. km). Der letzte Koeffizient in (3) könnte also noch durch n dividiert werden, was jedoch aus Gründen der Vorsicht unterlassen sei.

#### 4. Optimale Visurlänge beim trigonometrischen Nivellement

Durch die vorliegenden Erkenntnisse verringern sich 3 von 4 Fehlerquellen der Tabelle 1. Daher steigt die zulässige Visurlänge, und das ganze Verfahren gewinnt an Wirtschaftlichkeit. Im folgenden soll für verschieden geneigte Hänge die jeweils optimale Meßanordnung gesucht werden — zunächst in Hinblick auf die erreichbare Genauigkeit.

Da die Fehlergleichung (3) unterschiedliche Funktionen enthält, werden die Fehlerminima iterativ ermittelt (HP-41-Programm). Ausgangswert ist der Gesamthöhenunterschied H, während die Meßanordnung gemäß (2) durch die n Schrägstrecken s definiert ist. Weil das Gelände manche Möglichkeiten ausschließt, wird n variiert und der jeweilige Optimalwert  $s_0$  ermittelt: Er ist in Abb. 3 als Funktion von H und n dargestellt. Der zugehörige Höhenfehler  $M_H$  (untere Kurvenschar in Abb. 4) scheint nur wenig von n abzuhängen und ist unempfindlich gegen kleine Änderungen von  $s_0$ . Das gilt jedoch nur für extrem steile Hänge, die eine Vermessung kaum zulassen. Der Genauigkeitsvergleich von Brunner [3] ist deshalb nicht ganz korrekt.

Tatsächlich wird ja durch die Länge der Falllinie ein Mindestwert für  $s_0$  vorgegeben, wodurch der obere Teil von Abb. 3 ( $z < 70^\circ$ ) meistens irrelevant ist. Die aufsteigende Kurvenschar in Abb. 4 zeigt, wie sehr sich dadurch die Fehlercharakteristik ändert, und spricht für enge Unterteilung eines trigonometrischen Nivellements. Dabei sind aber noch Unterschiede im Aufwand zu berücksichtigen.

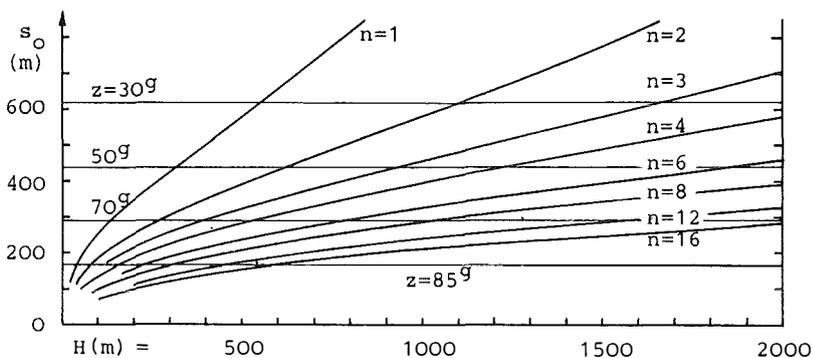


Abb.3: optimale Visurlänge  $s_0$  in Abhängigkeit von Gesamthöhenunterschied und Unterteilungszahl

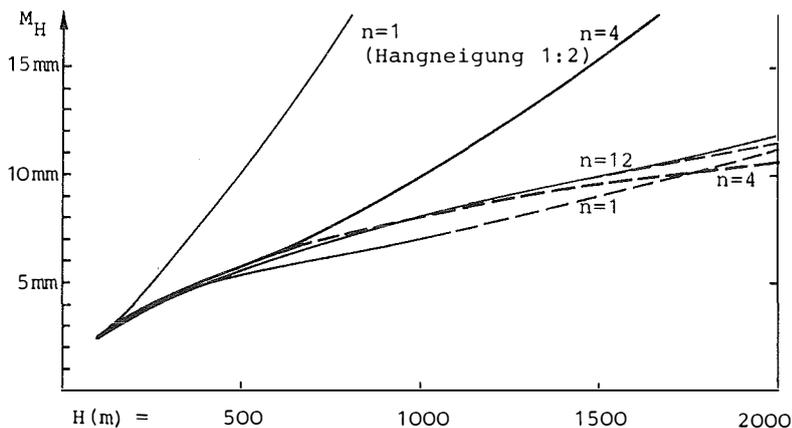


Abb.4: Fehlercharakteristik des trigonometrischen Nivellements bei Visurlängen  $s_0$  aus Abb.3 (ohne Berücksichtigung des Geländes) bzw. auf einem Hang mit der Neigung 1:2 (Seitentäler der Alpen)

H (m)	n = 1		n = 2		n = 4		n = 8	
	$s_0$ (m)	$M_H$ (mm)	$s_0$	$M_H$	$s_0$	$M_H$	$s_0$	$M_H$
2000	4472	<u>+128.79</u>	2236	<u>+37.42</u>	1118	<u>+21.73</u>	559	<u>±17.61</u>
1400	3130	45.58	1565	18.96	783	14.18	391	12.68
900	2012	15.63	1006	10.71	503	8.84	260	9.62
500	1118	6.87	559	5.54	285	5.76	199	7.13
250	559	3.17	295	3.29	209	4.00	145	4.98
100	274	1.68	198	2.00	139	2.46	94	3.11

Tabelle 3 Genauigkeiten bei gleichem Meßaufwand (Hangneigung 1 : 2)

Im folgenden wird eine durchschnittliche Hangneigung von 1 : 2 ( $z \geq 70,5^{\circ}$ ) angenommen, wie sie die Seitentäler der Zentralalpen besitzen. Der Wirtschaftlichkeitsvergleich in Tabelle 3 setzt denselben Meßaufwand bei jeder Art der Unterteilung voraus (weniger Teilstrecken  $\rightarrow$  mehr Sätze pro Punkt) und nimmt  $n_0 = 4$  als Bezug. Der Einfluß von  $m_s^2$  (3) wird daher mit  $n/n_0$  multipliziert; jener von  $m_s^2$  und  $m_{\Delta k}^2$  aber nur mit  $\sqrt{n/n_0}$ , um systematischen Fehleranteilen Rechnung zu tragen. Der Zeitaufwand für Wege (fast konstant) und Instrumentenaufstellungen bleibt außer Betracht.

Aus der Tabelle ist zu erkennen, daß die günstigsten Visurlängen kaum mehr mit Abbildung 3 zusammenhängen, sondern alle zwischen 300 und 600 m liegen. Innerhalb dieses Rahmens, der auch für andere Hangneigungen gilt, liefert das trigonometrische Nivellement die erstaunlich hohe Genauigkeit von  $10^{-5}$ . Von sehr steilen Hängen ab ca. 1 : 1,5 abgesehen, sollte die Messung in der Falllinie erfolgen.

Eine gerade Unterteilungszahl vermindert systematische Fehlereinflüsse; ungerades  $n$  kann jedoch nützlich sein, wenn die Verbindungslinie der beiden Punkte weit von der Falllinie abweicht. Die in den Alpen häufigen Talschultern erleichtern die Unterteilung eines Profils, doch sollte bei stark unterschiedlichen Neigungen jeder Hauptteil getrennt optimiert werden.

## 5. Schlußbemerkungen

Durch trigonometrische Verfahren ist die Übertragung von Nivellementhöhen in die Gipfelflur mit Genauigkeiten von 1–2 cm möglich, wenn die Einflüsse der Lotabweichung gemäß Formel (6) eliminiert werden. Die Messung von Schrägstrecken und gegenseitigen Zenitdistanzen erfolgt dabei in Hangprofilen mit Visurlängen von etwa 500 m. Die Methode ist dem geometrischen Nivellement im Gebirge weit überlegen.

Um ellipsoidische Höhendifferenzen zu erhalten, kann die Lotstörungsformel (5) verwendet werden, wenn an 1–2 Punkten astronomisch bestimmte Lotabweichungen vorliegen. Das Gebirge wird dabei durch parallele Prismen angenähert. An jedem Meßpunkt liefert (5) den lokalen Anteil der Lotabweichung, der zum regionalen Anteil vektoriell addiert wird. Die so ermittelten Werte haben Genauigkeiten um  $\pm 3''$ ; eine verfeinerte Methode ist in Vorbereitung.

### Literatur

[1] *Bahnert, G.*: Möglichkeiten und Grenzen der trigonometrischen Höhenmessung, Teil II, Arb. Verm. u. Kartenw. DDR, Bd. 25, Leipzig 1970.

[2] *Bretterbauer, K., Erker, E., Gerstbach, G., Sünkel, H. et al.*: Astro-geodätische Arbeiten und Geoidberechnungen. ÖKIE Bd. III, Das Geoid in Österreich, Graz 1983.

[3] *Brunner, F. K.*: Trigonometrisches Nivellement — Geometrisches Nivellement. ÖZfVuPh 62/2, S. 49–60, Wien 1974.

[4] *Embacher, W.*: Ein Versuch zur Bestimmung des gestörten Schwerevektors aus lokalen Gravimetermessungen. ZfV. 105/6, S. 245–256, Stuttgart 1980.

[5] *Gerstbach, G.*: Astro-geodätische Messungen hoher Genauigkeit mit kleinen Instrumenten. Geowiss. Mitt. 11, S. 101–116, Wien 1976.

[6] *Gerstbach, G.*: Untersuchung der Tiefenstruktur des Wiener Beckens aus Lotstörungen. Tiefbau der Alpen, Heft 11, S. 113–118, ZA f. Met. u. Geodyn., Wien 1980/83.

[7] *Gleinsvik, P.*: Studien über die Ermittlung der Geoidform und die Bestimmung von Meereshöhen aus Höhenwinkeln. Mitt. geod. Inst. ETH, Nr. 7, Zürich 1960.

[8] *Rosenthaler, J.*: Refraktionsuntersuchungen in einem vertikalen Dreieck. Diplomarbeit am Inst. f. Theoret. Geod., TU Wien 1982.

[9] *Wunderlich, T.*: Die voraussetzungsfreie Bestimmung von Refraktionswinkeln. Dissert., Techn.-Naturw. Fakultät, TU Wien 1983.

[10] *Zeger, J.*: Untersuchungen über die trigonometrische Höhenmessung und die Horizontierung von schräg gemessenen Strecken. Sonderheft 32 der ÖZfVuPh, Wien 1978.

Manuskript eingelangt im Oktober 1983.