

Paper-ID: VGI_198311



Maximaltoleranzen und Widerspruchsaufteilung für geschlossene ebene Polygonzüge

Gerhard Brandstätter ¹

¹ *Technische Universität Wien, Institut für Landesvermessung und Ingenieurgeodäsie, Gußhausstraße 27-29, A-1040 Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **71** (3), S. 113–121

1983

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Brandstaetter_VGI_198311,  
Title = {Maximaltoleranzen und Widerspruchsaufteilung f{"u}r geschlossene  
ebene Polygonz{"u}ge},  
Author = {Brandst{"a"}tter, Gerhard},  
Journal = {"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {113--121},  
Number = {3},  
Year = {1983},  
Volume = {71}  
}
```



Maximaltoleranzen und Widerspruchsaufteilung für geschlossene ebene Polygonzüge

Von G. Brandstätter, Wien

Einleitung

Geschlossene Polygonzüge waren und sind in der Vermessungstechnik nicht gern gesehen, obwohl ihre Anwendung manchmal — speziell in schwierigem Gelände — durchaus günstig wäre. Diese reservierte Haltung dürfte im wesentlichen auf folgenden Umständen beruhen:

1. Es gibt keine offiziell festgelegten Maximaltoleranzen für die Abschlußwidersprüche.
2. Einfache praxisnahe Vorschriften für die sachgerechte Aufteilung der Abschlußwidersprüche liegen nicht vor.
3. Eine interne Maßstabskontrolle des verwendeten Längenmeßmittels ist nicht möglich.

Während der systematische Einfluß des letzten Punktes nur durch gesonderte Maßnahmen zu vermeiden ist, aber bei Anwendung moderner Distanzer keine sonderliche Mühe bedeutet, sollen für die beiden anderen Punkte im folgenden entsprechende Ansätze vorgeschlagen und begründet werden.

Abstract

Three types of closed traverses may be distinguished: the traverse with closure in position only, the traverse with closure in position and angle and the traverse with observed directions at every point and closure in position. Their consistency mostly is proved by comparison of the misclosures with statistic tolerances. These tolerances are derived here using the geometric reference to regular closed polygons. Finally procedures of rigorous adjustment by suitable distribution of the coordinate-misclosures are described.

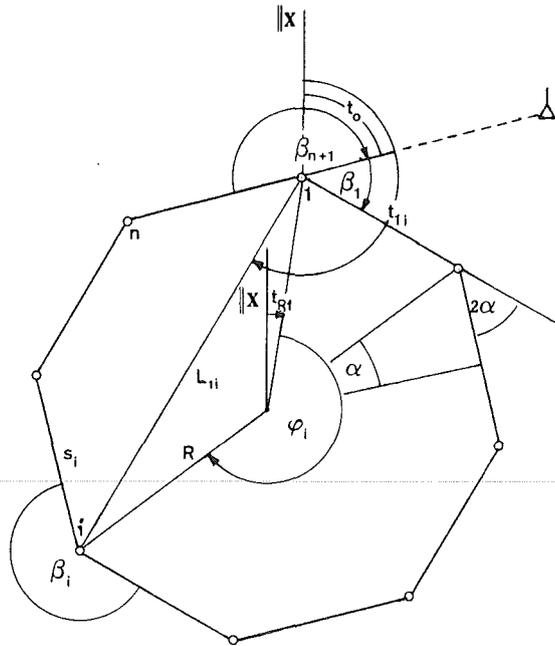
1. Das geometrische Bezugsmodell und seine Eigenschaften

Bekanntlich weist das Bezugsmodell des offenen (schwach durchgebogenen) Polygonzuges gleich lange Seiten und — abgesehen vom An- und Abschlußwinkel — gestreckte Brechungswinkel auf. Es ist daher naheliegend, für den geschlossenen Polygonzug das regelmäßige Vieleck als Bezugsmodell zu verwenden. Die hierzu notwendigen elementaren Formeln sind in Fig. 1.1 zusammengestellt.

Aus diesen geht u. a. hervor, daß wegen $\sum \sin t_i = \sum \cos t_i = 0$ neben $\sum \Delta x = \sum \Delta y = \sum \bar{x} = \sum \bar{y} = 0$ auch

$$\sum \bar{y} \bar{x} = \sum \Delta y \Delta x = \sum (x_{n+1} - x)(y_{n+1} - y) = 0 \quad (1.1)$$

zu setzen ist (Summation für $i = 1$ bis n).



$$\alpha = \pi/n \qquad s = 2R \sin \alpha$$

$$\varphi_i = 2(i-1)\alpha \qquad \bar{y}_i = (-s/2 \sin \alpha) \cos(t_i - \alpha) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Schwerpunkts-} \\ \text{koordinaten} \end{array} \right\}$$

$$t_i = t_0 + \beta_1 + \varphi_i = t_1 + \varphi_i \qquad \bar{x}_i = (s/2 \sin \alpha) \sin(t_i - \alpha)$$

$$t_{Ri} = t_i - \pi/2 - \alpha \qquad L_{1i} = 2R \sin(\varphi_i/2) = (s/\sin \alpha) \sin(\varphi_i/2) \dots \text{Diagonale}$$

$$t_{1i} = t_1 + \varphi_i/2 - \alpha \dots \text{Richtung der Diagonale}$$

Fig. 1.1

Änderungen \$d\beta_i\$ und \$ds_i\$ in den Meßwerten \$\beta_i\$ (Brechungswinkel) und \$s_i\$ erzeugen bekanntlich im Endpunkt \$n+1\$ (\$n+1 \ge 1\$) einen mit

$$\begin{aligned} \delta y_{n+1} &= \sum ds_i \sin t_i + \sum d\beta_i (x_{n+1} - x_i) \\ \delta x_{n+1} &= \sum ds_i \cos t_i - \sum d\beta_i (y_{n+1} - y_i) \end{aligned} \qquad (1.2)$$

zu beschreibenden Effekt (z. B. E. Gotthardt, 1971, S. 9) oder mit Hilfe der Diagonalen \$L_{ii}\$ und deren Richtungen

$$\begin{aligned} \delta y_{n+1} &= \sum ds_i \sin t_i - 2R \sum d\beta_i \sin(\varphi_i/2) \cos t_{1i} \\ \delta x_{n+1} &= \sum ds_i \cos t_i + 2R \sum d\beta_i \sin(\varphi_i/2) \sin t_{1i} \end{aligned} \qquad (1.3)$$

Für den einfacheren Fall der direkt beobachteten Richtungen gelten natürlich die Differentialbeziehungen

$$\begin{aligned} \delta y_{n+1} &= \sum ds_i \sin t_i + s \sum dt_i \cos t_i \\ \delta x_{n+1} &= \sum ds_i \cos t_i - s \sum dt_i \sin t_i \end{aligned} \qquad (1.4)$$

2. Standardabweichungen im Endpunkt und Grenztoleranzen

2.1 Allgemeine Bemerkungen

Vorerst sei angemerkt, daß im weiteren anstelle des klassischen Begriffes „mittlerer Fehler“ die Bezeichnung Standardabweichung (d. i. die Quadratwurzel der Varianz) und anstelle des Begriffes „Fehlergrenze“ die Bezeichnung Grenztoleranz zur Anwendung kommt. Dies entspricht der derzeitigen Tendenz, die Sprachgebräuche der Meßtechniker untereinander und mit jenen der Statistiker in Einklang zu bringen, wobei der geodätische Meßtechniker vor allem auf den altgewohnten Begriff „Fehler“ wird verzichten müssen, was aber angesichts der vorwiegend negativen Sinnbelegung dieses Wortes nicht schwerfallen sollte.

Bei der Herleitung von Grenztoleranzen ist zu berücksichtigen, daß prinzipiell drei verschiedene Typen von Polygonzügen in der Praxis auftreten können, und zwar

1. der nur lagemäßig abgeschlossene Polygonzug,
2. der übliche voll abgeschlossene Polygonzug,
3. der Polygonzug mit laufender Zwischenorientierung, d. h. mit direkt oder quasidirekt beobachteten Richtungen.

Dementsprechend sind auch drei Grenzwerttypen zu unterscheiden. Außerdem ist die Darstellung der resultierenden Standardabweichungen im Endpunkt ebenso wie beim gestreckten Modell auf ein internes Koordinatensystem zu beziehen, um so ihre Transformationsvarianz und damit Allgemeingültigkeit zu erreichen. Dieses Bezugssystem ist mit Hilfe des Schwerpunktes der Punktgruppe und des Endpunktes zu definieren, wodurch Standardabweichungen bzw. Widersprüche (Soll—Ist) in radialer und tangentialer Richtung entstehen (Fig. 2.1),

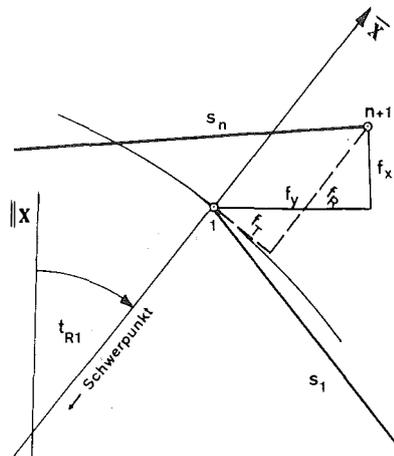


Fig. 2.1

die sich aus den willkürlichen Werten f_y und f_x mit Hilfe der Drehung

$$\begin{pmatrix} f_T \\ f_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t_{R1} & -\sin t_{R1} \\ \sin t_{R1} & \cos t_{R1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_y \\ f_x \end{pmatrix}$$

ergeben. Sie werden direkt erhalten, wenn das Koordinatensystem a priori diesem internen System entspricht, in welchem damit gem. Fig. 1.1

$$t_{Ri} = \varphi_i, \quad t_i = \pi/2 + \alpha, \quad t_i = \pi/2 + \alpha + \varphi_i \text{ und } t_{ii} = (\pi + \varphi_i)/2$$

zu setzen ist.

Die Festlegung der Grenztoleranzen erfolgt natürlich anhand der aus den Varianzen der Meßgrößen (σ_1^2 für Winkel oder Richtungen, σ_2^2 für Strecken) berechneten Standardabweichungen σ_R, σ_T des Endpunktes, indem diese mit einem durch die vorgegebene Realisierungswahrscheinlichkeit festgelegten Faktor > 1 multipliziert werden. Die üblicherweise angenommene Wahrscheinlichkeit 99,7% liefert den bekannten Faktor 3, und die berechneten Widersprüche müssen daher den Forderungen $|f_R| \leq \hat{f}_R = 3 \sigma_R$ und $|f_T| \leq \hat{f}_T = 3 \sigma_T$ genügen.

2.2 Polygonzug mit Lageabschluß

Die direkte Anwendung der Gln. (1.3) ergibt

$$\begin{aligned} \sigma_T^2 &= \sigma_2^2 \sum \sin^2(\alpha + \varphi_i) + \sigma_1^2 4R^2 \sum \sin^4(\varphi_i/2) \\ \sigma_R^2 &= \sigma_2^2 \sum \cos^2(\alpha + \varphi_i) + \sigma_1^2 4R^2 \sum \sin^2(\varphi_i/2) \cos^2(\varphi_i/2) \end{aligned}$$

die Summationen über die Winkelfunktionen ergeben die Werte

$$\begin{aligned} \sum \sin^2(\alpha + \varphi_i) &= \sum \cos^2(\alpha + \varphi_i) = n/2 \\ \sum \sin^2(\varphi_i/2) \cos^2(\varphi_i/2) &= n/8 \\ \sum \sin^4(\varphi_i/2) &= 3n/8 \end{aligned}$$

und wegen $R = s/2\sin\alpha$ folgen die Varianzen

$$\begin{aligned} \sigma_T^2 &= (s^2/\sin^2(\pi/n)) \cdot 3n/8 \cdot \sigma_1^2 + n/2 \cdot \sigma_2^2 \dots \text{Tangentialvarianz} \\ \sigma_R^2 &= (s^2/\sin^2(\pi/n)) \cdot n/8 \cdot \sigma_1^2 + n/2 \cdot \sigma_2^2 \dots \text{Radialvarianz} \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

mit dem interessanten Detail, daß sich die Varianz der Winkelmessung dreimal stärker in Tangential- als in Radialrichtung auswirkt, während die Varianz der Streckenmessung in beiden Komponenten gleichmäßig enthalten ist.

2.3 Voll abgeschlossener Polygonzug

Die typische Behandlung der Meßergebnisse ist hier, daß zuerst der Winkelwiderspruch

$$f_\beta = -(\pm n\pi + \sum_1^{n+1} \beta_j)$$

berechnet, jeder einzelne Winkel mit $v = f_\beta/(n+1)$ verbessert und erst nach Durchrechnung mit den verbesserten Werten die Einhaltung der Koordinatentoleranz überprüft wird. Es ist also vorerst jedes $d\beta_i$ in (1.2) durch

$$d\beta_i^! = d\beta_i + v = d\beta_i + \frac{1}{n+1} \sum_1^{n+1} d\beta_j$$

zu ersetzen und mit den so adaptierten Gln. wie in 2.2 zu verfahren. Diese Vorgangsweise nach (O. Eggerth, 1908, S. 458) führt zur bekannten Quertoleranz für gestreckte Polygonzüge, die in Österreich aufgrund der Vermessungsverordnung rechtsverbindlich ist.

Die Winkelanteile in (1.3) lauten nunmehr

$$\delta y'_{n+1} = 2R \sum^n (d\beta_i - v) \sin^2(\varphi_i/2) = 2R \left\{ \sum^n d\beta_i \sin^2(\varphi_i/2) - \frac{n}{2(n+1)} \sum^{n+1} d\beta_i \right\}$$

$$\delta x'_{n+1} = 2R \sum^n (d\beta_i - v) \sin(\varphi_i/2) \cos(\varphi_i/2) = 2R \sum^n d\beta_i \sin(\varphi_i/2) \cos(\varphi_i/2)$$

mit dem Zwischenergebnis, daß die Winkelverbesserungen den Radialwiderspruch nicht beeinflussen und daher für σ_R^2 der in 2.2 ermittelte Ausdruck zu übernehmen ist. Die Tangentialkomponente wird wegen

$$\Sigma \left\{ \sin^2(\varphi_i/2) - \frac{n}{2(n+1)} \right\}^2 + \frac{n^2}{4(n+1)^2} = 3\frac{n}{8} - \frac{n^2}{4(n+1)}$$

zu

$$\sigma_T^2 = \frac{s^2}{\sin^2(\pi/n)} \left(3\frac{n}{8} - \frac{n^2}{4(n+1)} \right) \sigma_1^2 + \frac{n}{2} \sigma_2^2 \tag{2.3.1}$$

und zeigt einen Genauigkeitszuwachs von ca. $n/4$ sowie den interessanten Effekt, daß nur durch redundante Winkelmessung $\sigma_R \approx \sigma_T$ erreicht werden kann. Neben diesem Vorteil ist die Beobachtung des Winkels β_{n+1} auch zwecks Kontrolle des Anfangswinkels β_1 eigentlich unerläßlich, da eine grobe Fehlmessung im Anfangspunkt eine nicht erkennbare Verdrehung der gesamten Punktgruppe verursacht.

2.4 Polygonzug mit laufender Orientierung

Hier wird unterstellt, daß alle Richtungen direkt (mittels Kreisel, astronomischer Azimutbestimmung oder magnetisch) oder quasidirekt (Orientierung mittels weit entfernter Außenziele) beobachtet sind, so daß die Standardabweichung σ_1 auf die Richtungen zu beziehen ist. Die Berechnung der Standardabweichungen im Endpunkt mit Hilfe der Gln. (1. 4) ist dann besonders einfach und ergibt

$$\sigma_T^2 = \sigma_2^2 \sum \sin^2(\alpha + \varphi_i) + \sigma_1^2 s^2 \sum \cos^2(\alpha + \varphi_i) = s^2 \frac{n}{2} \sigma_1^2 + \frac{n}{2} \sigma_2^2$$

$$\sigma_R^2 = \sigma_2^2 \sum \cos^2(\alpha + \varphi_i) + \sigma_1^2 s^2 \sum \sin^2(\alpha + \varphi_i) = s^2 \frac{n}{2} \sigma_1^2 + \frac{n}{2} \sigma_2^2 \tag{2.4.1}$$

Hinsichtlich des Einflusses der Meßunsicherheiten auf den Polygonzugsabschluß herrscht volle Symmetrie.

2.5 Zusammenstellung

Eine Zusammenstellung praxishereicher Formeln muß berücksichtigen, daß σ_1 im Winkelmaß (Milligon) einzuführen ist, daß die Toleranzangabe in cm erfolgen soll und daß gewöhnlich für $s = [s]/n$ (in m-Dimension) gesetzt wird. Damit lauten die Grenztoleranzen entsprechend den in 2.1 vorgegebenen Definitionen:

$$1. \quad \hat{f}_T = 3 \sqrt{\frac{3[s]^2 \cdot 10^{-4}}{8n \sin^2(\pi/n)} \frac{1}{40,5} \sigma_1^2 + \frac{n}{2} \sigma_2^2}$$

$$\hat{f}_R = 3 \sqrt{\frac{[s]^2 \cdot 10^{-4}}{8n \sin^2(\pi/n)} \frac{1}{40,5} \sigma_1^2 + \frac{n}{2} \sigma_2^2}$$

$$2. \quad \hat{f}_T = 3 \sqrt{\left(\frac{3}{8n} - \frac{1}{4(n+1)}\right) \frac{[s]^2 \cdot 10^{-4}}{\sin^2(\pi/n)} \frac{1}{40,5} \sigma_1^2 + \frac{n}{2} \sigma_2^2}$$

$$\hat{f}_R \text{ wie } \hat{f}_R \text{ in 1.}$$

$$3. \quad \hat{f}_T = \hat{f}_R = 3 \sqrt{\frac{[s]^2 \cdot 10^{-4}}{2n} \frac{1}{40,5} \sigma_1^2 + \frac{n}{2} \sigma_2^2}$$

Für σ_2 wäre i. a. ein spezielles Bildungsgesetz einzuführen, elektrooptische Distanzer weisen aber in den für Polygonzüge typischen Meßbereichen durchwegs konstante Varianzen auf. Lt. § 7 Verm. V. könnte $\sigma_1 = 0,6 \text{ mgon}$ und $\sigma_2 = 7 \text{ mm}$ lauten. Dabei ist aber zu bedenken, daß diese Werte auch die Auswirkung von Netzspannungen enthalten, so daß für den hierdurch nicht beeinflussten geschlossenen Zug kleinere Werte gelten werden. Diese sind für betriebsinterne Selbstkontrolle unter Berücksichtigung von Zentrierunsicherheiten aus den bekannten Varianzen der verwendeten Meßmittel abzuleiten, im Hoheitsbereich (Kataster) wären globale Werte zu verordnen.

3. Aufteilung der Koordinatenwidersprüche

3.1 Allgemeines

Die Aufteilungsvorschriften für die Abschlußwidersprüche gestreckter Polygonzüge ergeben sich aus der strengen Ausgleichung des Bezugsmodelles, wobei allerdings der eigentlich kubische Verlauf der Querverbesserung linear approximiert wird, was zur üblichen seitenproportionalen Aufteilung führt. Die oft verwendete Aufteilung proportional zu den Koordinatenunterschieden läßt sich übrigens nicht begründen, wenn man davon absieht, daß sie für gestreckte Züge ebenfalls seitenproportional wird. Auch die Aufteilung in geschlossenen Zügen ist von der strengen bedingten Ausgleichung her zu begründen, wofür die bereits zitierte eingehende Untersuchung (E. Gotthardt, 1971) als Grundlage diene.

Die gemeinsame Verarbeitung der hybriden Meßgrößen Winkel (oder Richtung) und Strecke setzt die Festlegung einer entsprechenden Gewichtsrelation voraus. Zu diesem Zwecke werde die idealisierte Annahme getroffen, daß die beiden Standardabweichungen σ_1 und σ_2 im Endpunkt einer betrachteten Polygonseite gleich große Effekte hervorrufen, also $s|\sigma_1| = |\sigma_2|$, damit $p_1/p_2 = \sigma_2^2/(s^2\sigma_1^2)$ und schließlich $p_1 = 1$, $p_2 = 1/s^2$.

Die Ausgleichung liefert anhand der Korrelaten k die Verbesserungen

$$v_{1j} = a_{1j}k_y + b_{1j}k_x, \quad v_{2j} = s_j^2(a_{2j}k_y + b_{2j}k_x) \quad (3.1.1)$$

aus welchen mit Hilfe der Differentialformen in den Gln. (1.2) oder (1.3) die Verbesserungen der einzelnen Koordinatenunterschiede

$$dy_j = a_{1j}v_{1j} + a_{2j}v_{2j}, \quad dx_j = b_{1j}v_{1j} + b_{2j}v_{2j} \quad (3.1.2)$$

und durch Summierung die eigentlichen Koordinatenänderungen

$$\delta y_i = \sum_{j=1}^{i-1} dy_j \quad \text{und} \quad \delta x_i = \sum_{j=1}^{i-1} dx_j \quad (3.1.3)$$

folgen. Die Interpretation dieser Gln. ergibt, eventuell unter Einführung vertretbarer Vernachlässigungen, Aufteilungsrezepte für jeden der drei zu behandelnden Meßfälle. Die Besprechung der nachfolgenden, weitgehend bekannten Grundlagen kann kurz gehalten werden.

3.2 Lageabschluß

Bedingungsgln. gem. Gl. (1.2):

$$\begin{aligned} \sum v_{1i}(x_1-x_i) + \sum v_{2i} \sin t_i &= f_y \\ -\sum v_{1i}(y_1-y_i) + \sum v_{2i} \cos t_i &= f_x \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} [\Delta y^2 + (x_1-x)^2]k_y + [\Delta y \Delta x - (y_1-y)(x_1-x)]k_x &= f_y \\ [\Delta y \Delta x - (y_1-y)(x_1-x)]k_y + [\Delta x^2 + (y_1-y)^2]k_x &= f_x \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Verbesserungen der Meßgrößen:

$$v_{1j} = (x_1-x_j)k_y - (y_1-y_j)k_x, \quad v_{2j} = s_j(\Delta y_j k_y + \Delta x_j k_x),$$

Verbesserungen der Koordinatendifferenzen

$$\begin{aligned} dy_j &= k_y \{ (x_1-x_j)^2 + \Delta y_j^2 \} + k_x \{ -(y_1-y_j)(x_1-x_j) + \Delta y_j \Delta x_j \} \\ dx_j &= k_y \{ -(y_1-y_j)(x_1-x_j) + \Delta y_j \Delta x_j \} + k_x \{ (y_1-y_j)^2 + \Delta x_j^2 \} \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Alle Gln. gelten natürlich für jede beliebige Zugsform, wenn man berücksichtigt, daß der Anfangspunkt 1 mit dem Endpunkt identisch ist. Die Vereinfachung für geschlossene Polygonzüge ergibt sich aus der Tatsache, daß für das Bezugsmodell aufgrund der Eigenschaften (1.1) die Seitenglieder in (3.2.2) verschwinden und die Korrelaten einfach

$$k_y = f_y / [\Delta y^2 + (x_1-x)^2], \quad k_x = f_x / [\Delta x^2 + (y_1-y)^2]$$

lauten. Wollte man unter dieser Voraussetzung den in der Praxis verbreiteten Aufteilungsrezepten nahekommen, wären in (3.2.3) die Glieder mit den gemischten Produkten zu vernachlässigen, was von der Größenordnung her eigentlich nicht gestattet ist. Diese „Gebrauchsformeln“ lauten dann

$$dy_j = \{ \Delta y_j^2 + (x_1-x_j)^2 \} k_y \quad \text{und} \quad dx_j = \{ \Delta x_j^2 + (y_1-y)^2 \} k_x$$

und zeigen, daß zumindest eine Fehleraufteilung proportional zu den Quadraten der auftretenden Koordinatendifferenzen vorzunehmen wäre.

3.3 Vollabschluß

Die Voraufteilung des Winkelwiderspruchs führt nach (O. Eggerth, 1928, S. 657) zu den „reduzierten“ Bedingungsgln.

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{n+1} v'_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^n v_{2i} \sin t_i &= f_y \\ \sum_{i=1}^{n+1} v'_i \bar{y}_i + \sum_{i=1}^n v_{2i} \cos t_i &= f_x \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

wenn v'_i die nach der Voraufteilung verbleibende restliche Winkelverbesserung bezeichnet.

Normalgleichungen (die verschwindende Winkelbedingungsgl. ist weggelassen):

$$\begin{aligned} [\bar{x}^2 + \Delta y^2] k_y - [\bar{y}\bar{x} - \Delta y \Delta x] k_x &= \bar{f}_y \\ [\bar{y}\bar{x} - \Delta y \Delta x] k_y + [\bar{y}^2 + \Delta x^2] k_x &= \bar{f}_x \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Verbesserung der Meßgrößen:

$$v'_{1j} = -\bar{x}_j k_y + \bar{y}_j k_x, \quad v_{2j} = s_j (\Delta y_j k_y + \Delta x_j k_x),$$

Verbesserung der Koordinatendifferenzen:

$$\begin{aligned} dy_j &= (\bar{x}_j^2 + \Delta y_j^2) k_y + (-\bar{y}_j \bar{x}_j + \Delta y_j \Delta x_j) k_x \\ dx_j &= (-\bar{y}_j \bar{x}_j + \Delta y_j \Delta x_j) k_y + (\bar{y}_j^2 + \Delta x_j^2) k_x \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Mit Seitengliedern nahe oder gleich Null erhält man die Korrelaten aus

$$k_y = \bar{f}_y / [\bar{x}^2 + \Delta y^2] \quad \text{und} \quad k_x = \bar{f}_x / [\bar{y}^2 + \Delta x^2],$$

wobei zu bemerken ist, daß die beiden Nenner im regelmäßigen Vieleck gleich groß sind ($N = (n/2)s^2(1+1/4\sin^2\alpha)$).

Die wie zuvor vereinfachten Verbesserungen der Koordinatenunterschiede lauten hier

$$dy_j = (\Delta y_j^2 + \bar{x}_j^2) k_y \quad \text{und} \quad dx_j = (\Delta x_j^2 + \bar{y}_j^2) k_x$$

und führen zu analogen Aussagen.

3.4 Laufende Zwischenorientierung.

Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \sum v_{1i} \Delta x_i + \sum v_{2i} \sin t_i &= f_y \\ -\sum v_{1i} \Delta y_i + \sum v_{2i} \cos t_i &= f_x, \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} [\Delta y^2 + \Delta x^2] k_y + [\Delta y \Delta x - \Delta y \Delta x] k_x &= [s^2] k_y = f_y \\ [\Delta y \Delta x - \Delta y \Delta x] k_y + [\Delta y^2 + \Delta x^2] k_x &= [s^2] k_x = f_x \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Verbesserungen der Meßwerte:

$$v_{1j} = \Delta x_j k_y - \Delta y_j k_x, \quad v_{2j} = s_j (\Delta y_j k_y + \Delta x_j k_x),$$

Verbesserungen der Koordinatendifferenzen:

$$\begin{aligned}
 dy_j &= (\Delta y_j^2 + \Delta x_j^2) k_y + (\Delta y_j \Delta x_j - \Delta y_j \Delta x_j) k_x = s_j^2 k_y \\
 dx_j &= (\Delta y_j \Delta x_j - \Delta y_j \Delta x_j) k_y + (\Delta y_j^2 + \Delta x_j^2) k_x = s_j^2 k_x
 \end{aligned}
 \tag{3.4.3}$$

Die Aufteilung der Widersprüche erfolgt hier nach der einfachen Vorschrift

$$dy_j = \frac{s_j^2}{[s^2]} f_y \quad \text{und} \quad dx_j = \frac{s_j^2}{[s^2]} f_x$$

proportional s^2 und entspricht im Rahmen der gegebenen Voraussetzungen einer strengen Ausgleichung.

4. Ausblick

Obwohl moderne Mini- oder Microcomputer und sogar Taschenrechner genügend Kapazität für die strenge Ausgleichung von Polygonzügen aufweisen, werden im allgemeinen immer noch die Abschlußwidersprüche nach traditionellen Näherungsverfahren aufgeteilt. Es wäre sicher vernünftiger, die strengen Methoden als allgemein verbindliche einzuführen, da hier einerseits keine Diskussion über das jeweils anzuwendende Verfahren nötig ist und andererseits jede Art von Zug – gestreckt, durchgebogen, geschlossen – nach dem gleichen Algorithmus behandelt werden kann. Lediglich die Gewichtung wäre zu diskutieren, weil der hier eingeführte Gewichtsansatz nicht immer zutreffend sein muß. Daß der Rechenaufwand nicht hoch ist, zeigen die Formeln (3.2.3), (3.3.3) und (3.4.3). Wie weit die oft nur gefühlsmäßig verwendeten Aufteilungsrezepte von der strengen Behandlung entfernt sind, ist den entsprechenden Vereinfachungen zu entnehmen.

Die unerläßliche Angabe von Maximaltoleranzen sowohl für die Selbstkontrolle als auch für den offiziellen Nachweis der Messungsqualität ist, wie hier gezeigt, für schematische Zugformen leicht zu erbringen und wird in den meisten Fällen auch genügen. Bei komplizierten Zugformen hängen die Toleranzen stärker von der geometrischen Form ab, so daß sie für die gegebene Meßdisposition speziell zu ermitteln sind. In solchen Fällen müßten nur die Varianzen σ_1^2 und σ_2^2 normiert sein, während die einzuhaltenden Grenztoleranzen aus sinngemäßer Anwendung der Gln. (1.2) und (1.4) folgen.

Literatur

Eggert, O.: in Handbuch der Vermessungskunde (Jordan) Band II, 7. Auflage, 1908. J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart.

Eggert, O.: Die Ausgleichung von Polygonzügen nach der Methode der kleinsten Quadrate. Zeitschrift für Vermessungswesen 57, 1928.

Gotthardt, E.: Grundsätzliches zur Fehlertheorie und zur Ausgleichung von Polygonzügen und Polygonnetzen. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1971.