

Paper-ID: VGI_198306



Die analytische Lösung der simultanen Doppel- und Mehrfachpunktbestimmung in der Ebene

Gerhard Brandstätter ¹

¹ *Technische Universität Wien, Institut für Landesvermessung und Ingenieurgeodäsie, Gußhausstraße 27-29, A-1040 Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **71** (2), S. 65–71

1983

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Brandstaetter_VGI_198306,  
  Title = {Die analytische Lösung der simultanen Doppel- und  
    Mehrfachpunktbestimmung in der Ebene},  
  Author = {Brandstätter, Gerhard},  
  Journal = {{Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und  
    Photogrammetrie},  
  Pages = {65--71},  
  Number = {2},  
  Year = {1983},  
  Volume = {71}  
}
```



- [6] *Avanzini*, Die Erneuerung der österr. Katastralmappe im Maßstab 1 : 2880 durch Auswertung der Fortführungsmessungen (ÖZfVW. Mitteilungsblatt Nr. 1, 2/1955)
- [7] *Hudecek*, Der Zahlenplan und die Erneuerung der aus der Meßtischaufnahme hervorgegangenen Katastralmappen (ÖZfVW. Mitteilungsblatt Nr. 5/1962)
- [8] *Kloiber*, 80 Jahre Evidenzhaltungsgesetz (ÖZfVW. Nr. 2/1963)
- [9] Festschrift 150 Jahre österr. Grundkataster, BAfEuV. 1967:
a) *Höllrigl*, Kataster und Automation
b) *Ulbrich*, Zeittafel der Österr. Katastralvermessung
- [10] *Lego*, Geschichte des Österr. Grundkatasters (Veröffentlichung des BAfEuV. 1968)
- [11] *Kloiber*, Die Führung des Grenz- und Grundsteuerkatasters (Festschrift 50 Jahre BAfEuV., Veröffentlichung des BAfEuV. 1973)
- [12] *Allmer*, Der stabile Kataster in der Steiermark (Mitteilungen des steiermärkischen Landesarchivs, Folge 26/1976, Graz)
- [13] *Höllinger*, Der Leitungskataster als ein Teil des Mehrzweckkatasters aus der Sicht des Ziviltechnikers (ÖZ Nr. 3/1978)
- [14] *Hrbek*, Die Entstehung der österr. Grundstücksdatenbank und ihr Verhältnis zum LIS (ÖZ Nr. 3/1979)
- [15] *Zimmermann*, Aspekte einer automationsunterstützten Führung der Katastralmappe (ÖZ Nr. 2–3/1982)

Manuskript eingelangt: 31. März 1983

Die analytische Lösung der simultanen Doppel- und Mehrfachpunktbestimmung in der Ebene

Von G. Brandstätter, Wien

Summary

The problem of the non-redundant simultaneous determination of two and more unknown points by means of measured directions at these points to their neighbours and to given control points is solved analytically. This way leads to a system of $2n + 1$ linear equations with $2n$ unknown coordinates and the unknown orientation of the chain. The solution for the latter enables also to discuss the numerical influence of critical configurations.

Einleitung

Das alterwürdige Problem der simultanen Doppelpunktbestimmung durch Richtungsmessung nach zwei, drei oder vier Festpunkten ist unter den Namen Hansen'sche bzw. Marek'sche Aufgabe bekannt. Mit seiner Hilfe können Sichtschwierigkeiten zwischen Neupunkt und Festpunkten, Probleme mit der Festpunktanzahl und mitunter die Gefahr des „kritischen Ortes“ beim ebenen Rückwärtsschnitt elegant umgangen werden. Seine Bedeutung ist natürlich durch die elektronische Entfernungsmessung stark zurückgegangen, es kann aber in manchen Fällen immer noch mit wenig Aufwand Gebrauchskoordinaten der Standpunkte oder zumindest Näherungswerte für eine vermittelnde Ausgleichung liefern.

Das wesentlich jüngere Problem der Mehrfachpunktbestimmung war nur für kurze Zeit eine praktikable Methode zur großräumigen Ermittlung von Standpunktskoordinaten ohne Streckenmessung. Aus der umfassenden Studie „Mathematische und geschichtliche Betrachtungen zum Einschneiden“ (*W. Bock*, 1951) geht nämlich hervor, daß in (*P. Werkmeister*, 1930) dieses Problem erstmals erwähnt und mittels iterativer Näherung gelöst wurde. Die allgemeine geometrische Grundlage wurde erst in (*K. Rinner*, 1939) geklärt, und in (*K. Rinner*, 1943) sind Rechenanweisungen sowie Überlegungen zu kritischen Konfigurationen enthalten, die auf der Lösung über den Collin'schen Hilfspunkt beruhen.

Unter „analytischer Lösung“ sei im folgenden jener direkte Lösungsweg verstanden, der ohne Umweg über geometrische Zwischendeutungen wie etwa in (*K. Walék*, 1935) zu den gesuchten Koordinaten führt und von bereits in (*G. Brandstätter*, 1974) angegebenen Ansätzen ausgeht. Es sei jedoch angemerkt, daß diese Zusammenhänge indirekt auch bei *K. Walék* zu finden sind und in verdeckter Form wahrscheinlich auch in anderen Lösungswegen vorkommen.

1. Der prinzipielle Lösungsweg

Statt wie üblich in den Rechengang zwei gemessene Winkel pro unbekanntem Standpunkt P_j einzuführen, wird von den direkt als Meßgrößen vorliegenden und damit auch unkorrelierten Richtungen $r_j^{(i)}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ausgegangen. Dadurch erhöht sich zwar die Anzahl der Unbekannten in jedem Standpunkt durch das Hinzutreten der Orientierungsbekanntes $o_j = t_j^{(i)} - r_j^{(i)}$ ($t \dots$ Richtungswinkel im Landessystem) von 2 auf 3, erlaubt aber eine höchst durchsichtige und elementare Formulierung des Lösungsweges aufgrund der Beziehung

$$\tan(r_j^{(i)} + o_j) = \frac{\sin r_j^{(i)} + \cos r_j^{(i)} \tan o_j}{\cos r_j^{(i)} - \sin r_j^{(i)} \tan o_j} = \frac{y_j^{(i)} - y_j}{x_j^{(i)} - x_j}$$

Hieraus folgt nämlich für eine beobachtete Richtung mit den Hilfsunbekannten

$$u_j = x_j + y_j \tan o_j, \quad v_j = -y_j + x_j \tan o_j, \quad w_j = \tan o_j \quad (1.1)$$

die Beobachtungsgleichung

$$\begin{aligned} u_j \sin r_j^{(i)} + v_j \cos r_j^{(i)} + (-y_j^{(i)} \sin r_j^{(i)} - x_j^{(i)} \cos r_j^{(i)}) w_j = \\ = -y_j^{(i)} \cos r_j^{(i)} + x_j^{(i)} \sin r_j^{(i)} = l_j^{(i)} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ist $j = 1$, dann führen drei Gln. (1.2) zur Lösung des ebenen Rückwärtsschnittes, für $j = 2$ entstehen 6 Gln. für die Lösung der Probleme von Hansen und Marek, für $j = n > 2$ liefern $3n$ Gln. die Lösungen der simultanen Mehrfachpunktbestimmung. In den beiden letzten Fällen tritt insofern eine Komplikation auf, als zwischen zwei benachbarten Punkten (Fig. 1.1) P_k und P_l zwei Gln. von der Form

$$(x_k + y_k w_k) \sin r_{kl} + (-y_k + x_k w_k) \cos r_{kl} + (-x_l - y_l w_l) \sin r_{lk} + (y_l - x_l w_l) \cos r_{lk} = 0$$

$$(x_l + y_l w_l) \sin r_{lk} + (-y_l + x_l w_l) \cos r_{lk} + (-x_k - y_k w_k) \sin r_{kl} + (y_k - x_k w_k) \cos r_{kl} = 0$$

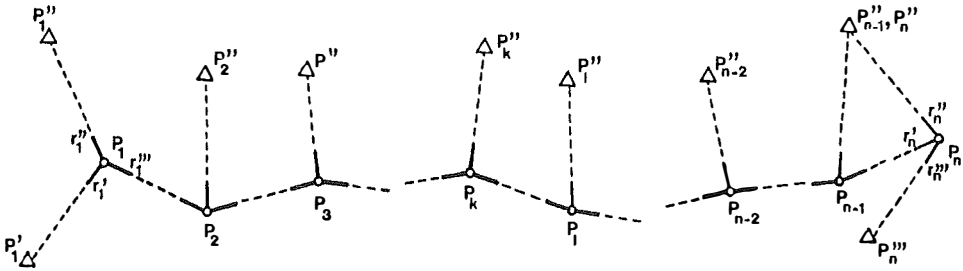


Fig. 1.1

bestehen, welche scheinbar nicht linear sind, weil die unbekannt Orientierungen gekreuzt mit den unbekannt Koordinaten verknüpft sind. Wird jedoch dafür gesorgt, daß mit Hilfe einer fortlaufenden Orientierungsübertragung zufolge

$$o_l = r_{lk} + \pi + o_k - r_{kl}$$

der ganze Verband nur eine gemeinsame Orientierung o bzw. Hilfsunbekannte $w = \tan o$ aufweist, dann reduzieren sich diese Gln. wegen

$$r_{kl} = r_{lk}^{\text{III}}, r_{lk} = r_l^{\text{I}}, \sin r_k^{\text{III}} = -\sin r_l^{\text{I}}, \cos r_k^{\text{III}} = -\cos r_l^{\text{I}}$$

auf die Form

$$-u_k \sin r_l^{\text{I}} - v_k \cos r_l^{\text{I}} + u_l \sin r_l^{\text{I}} - v_l \cos r_l^{\text{I}} = 0, \tag{1.3}$$

von denen nun je eine, also insgesamt $n-1$, in der Art von Bedingungsgleichungen zwischen den Koordinaten benachbarter Neupunkte zu den $n+2$ Gln. (1.2) für Richtungen nach Festpunkten hinzutreten und somit wegen $(n+2) + (n-1) = 2n+1$ die notwendige Anzahl von linearen Gln. für die Lösung des Problems liefern. Die schematische pseudodiagonale Form dieses Systems $Au = I$ ist in Fig. 1.2 wiedergegeben.

Sie erlaubt ein einfaches Eliminationsverfahren, da mit Hilfe der ersten beiden Zeilen und $D_1 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ die Unbekannten u_1, v_1 zufolge

$$u_1 = \frac{1}{D_1} a_{22}(l_1^{\text{I}} - a_{15}w) - a_{12}(l_1^{\text{II}} - a_{25}w), \tag{1.4}$$

$$v_1 = \frac{1}{D_1} -a_{21}(l_1^{\text{I}} - a_{15}w) + a_{11}(l_1^{\text{II}} - a_{25}w)$$

in Funktion von w dargestellt und in der dritten Zeile eingesetzt werden können. Diese enthält dann nur die Unbekannten u_2 und v_2 sowie die in dieser Gleichung neu hinzutretende Unbekannte w mit dem Koeffizienten

$$a_{3, 2n+1} = \frac{1}{D_1} \left\{ a_{1, 2n+1}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - a_{2, 2n+1}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) \right\}$$

und ein von 0 verschiedenes Absolutglied

$$I_2^I = I_1^{III} = \frac{1}{D_1} \left\{ -I_1^I (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) + I_1^{II} (a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31}) \right\}$$

in der Form

$$a_{33} u_2 + a_{34} v_2 + a_{3, 2n+1} w = I_2^I \tag{1.5}$$

Fig. 1.2

Sie kann nun für eine analoge Operation mit den Zeilen drei bis fünf verwendet werden usw., was bis zur Zeile 2n-1 fortzusetzen ist. Dadurch entsteht schließlich das (3,3)-System

$$\begin{aligned} \sin r_n^I u_n + \cos r_n^I v_n + a_{2n-1, 2n+1} w &= I_n^I \\ \sin r_n^{II} u_n + \cos r_n^{II} v_n + a_{2n, 2n+1} w &= I_n^{II} \\ \sin r_n^{III} u_n + \cos r_n^{III} v_n + a_{2n+1, 2n+1} w &= I_n^{III} \end{aligned} \tag{1.6}$$

dessen Auflösung die Orientierungsunbekannte w und wegen (1.1) (ohne Indices) mittels

$$x = \frac{u - vw}{1 + w^2}, \quad y = \frac{-v + uw}{1 + w^2} \quad (1.7)$$

die Koordinaten des letzten Standpunktes liefert. Durch Einsetzen von w , beginnend beim ersten Gleichungspaar analog zum Reduktionsvorgang (1.4) – (1.5), folgen dann mit Hilfe von (1.7) die übrigen Unbekannten.

2. Die Doppelpunktbestimmung

u_1	v_1	u_2	v_2	w	l
$\sin r_1^I$	$\cos r_1^I$			0	0
$\sin r_1^{II}$	$\cos r_1^{II}$			$-y_1^{II} \sin r_1^{II} - x_1^{II} \cos r_1^{II}$	$-y_1^{II} \cos r_1^{II} + x_1^{II} \sin r_1^{II}$
$-\sin r_2^I$	$-\cos r_2^I$	$\sin r_2^I$	$\cos r_2^I$	0	0
		$\sin r_2^{II}$	$\cos r_2^{II}$	$-y_2^{II} \sin r_2^{II} - x_2^{II} \cos r_2^{II}$	$-y_2^{II} \cos r_2^{II} + x_2^{II} \sin r_2^{II}$
		$\sin r_2^{III}$	$\cos r_2^{III}$	$-y_2^{III} \sin r_2^{III} - x_2^{III} \cos r_2^{III}$	$-y_2^{III} \cos r_2^{III} + x_2^{III} \sin r_2^{III}$

Tab. 2.1

Die Koeffizienten für die Doppelpunktbestimmung sind in Tab. 2.1 zusammengestellt, und zwar nach Übertragung der (willkürlichen) Orientierung des Richtungssatzes in P_1 zufolge

$$o_2 = r_1^{III} + o_1 \pm \pi - r_2^I \quad (\text{eventuell } o_1 = 0)$$

auf den Richtungssatz in P_2 und Verkürzung der Festpunktkoordinaten um die Werte des Festpunktes P_1 , weshalb $a_{15} = l_1' = 0$ zu setzen ist. Diese Parallelverschiebung des Koordinatensystems, die an den Koordinaten nicht speziell ersichtlich gemacht wird, erleichtert die Reduktion des Gleichungssystems und erhöht die Stabilität der numerischen Durchrechnung. Mit

$$D_1 = \sin(r_1^I - r_1^{II}), \quad a_{35} = -a_{25} \sin(r_1^I - r_1^{III})/D_1 \quad \text{und} \quad l_3 = l_2 \sin(r_1^I - r_1^{III})/D_1$$

folgt das Schluß-System in Tab. 2.2, dessen Lösung für w zwecks weiterer Diskussion ausführlich wiedergegeben sei:

$$w = \frac{D_w}{D} = \frac{l_3 \sin(r_2^{II} - r_2^{III}) + l_4 \sin(r_2^{II} - r_2^I) + l_5 \sin(r_2^I - r_2^{II})}{a_{35} \sin(r_2^{II} - r_2^{III}) + a_{45} \sin(r_2^{II} - r_2^I) + a_{55} \sin(r_2^I - r_2^{II})} \quad (2.1)$$

Die Angabe der übrigen Resultate kann unterbleiben, da sich deren Berechnung nach Vorliegen der Gesamtorientierung auf einfache lineare (2,2)-Systeme zurückführen läßt.

u_2	v_2	w	l
$\sin r_2^I$	$\cos r_2^I$	$\frac{\sin(r_1^I - r_1^{III})}{\sin(r_1^I - r_1^{II})} (y_1^{II} \sin r_1^I + x_1^{II} \cos r_1^I)$	$\frac{\sin(r_1^I - r_1^{III})}{\sin(r_1^I - r_1^{II})} (-y_1^{II} \cos r_1^I + \sin r_1^I)$
$\sin r_2^{II}$	$\cos r_2^{II}$	$-y_2^{II} \sin r_2^{II} - x_2^{II} \cos r_2^{II}$	$-y_2^{II} \cos r_2^{II} + x_2^{II} \sin r_2^{II}$
$\sin r_2^{III}$	$\cos r_2^{III}$	$-y_2^{III} \sin r_2^{III} - x_2^{III} \cos r_2^{III}$	$-y_2^{III} \cos r_2^{III} + x_2^{III} \sin r_2^{III}$

Tab. 2.2

3. Kritische Konfigurationen

3.1 Zwei Neupunkte

Der Allgemeinfall einer kritischen Konfiguration (der sogenannte gefährliche Ort) liegt vor, wenn die Orientierung (2.1) im Neupunktverband unbestimmt wird, das heißt

$$D_w = D = 0.$$

Das tritt trivialerweise dann auf, wenn

$$r_2^I - r_2^{II} = r_2^{II} - r_2^{III} = r_2^{III} - r_2^I = 0 \text{ oder } \pi,$$

also P_1, P_2, P_2'', P_2''' auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Eine derartige (sinnlose) Anordnung ist praktisch auszuschließen, und die allgemeine Gleichung für den kritischen Ort folgt daher aus den Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} -l_3 \sin(r_2^{II} - r_2^{III}) &= l_4 \sin(r_2^{III} - r_2^I) + l_5 \sin(r_2^I - r_2^{II}) \\ -a_{35} \sin(r_2^{II} - r_2^{III}) &= a_{45} \sin(r_2^{III} - r_2^I) + a_{55} \sin(r_2^I - r_2^{II}), \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

wobei voraussetzungsgemäß der Nullpunkt des Koordinatensystems miteinzubeziehen ist. Die Gleichungen sollen hier nicht weiter untersucht werden, sie bieten aber die rechentechnische Möglichkeit, kritische Konfigurationen anzuzeigen.

Eine weitere kritische Situation liegt vor, wenn $\sin(r_1^I - r_1^{II}) = 0$. Sie kann durch Vertauschen der Reihenfolge der Neupunkte im Berechnungsschema umgangen werden, da die Auflösung des Schluß-Systems auch mit $\sin(r_2^{II} - r_2^{III}) = 0$ möglich ist.

Schließlich kann es vorkommen, daß in (2.1) nur D verschwindet. Es ist dann

$$w = \tan \alpha = \infty, \quad \alpha = \pi/2 \text{ oder } 3\pi/2.$$

Dieser Fall wird a priori vermieden, wenn die Beobachtungen in den beiden Neupunkten mit grob nach Gitter-Nord orientiertem Horizontalkreis erfolgen.

3.2 n Neupunkte

Die unter 3.1 angeführten Folgerungen gelten hier sinngemäß. Natürlich sind nun die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 -l'_n \sin(r''_n - r'''_n) &= l''_n \sin(r'''_n - r'_n) + l'''_n \sin(r'_n - r''_n) \\
 -a_{2n-1, 2n+1} \sin(r''_n - r'''_n) &= a_{2n, 2n+1} \sin(r'''_n - r'_n) + a_{2n+1, 2n+1} \sin(r'_n - r''_n)
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

für den kritischen Ort entsprechend komplizierter, weil l'_n und $a_{2n-1, 2n+1}$ auf Grund des Reduktionsvorganges die Koordinaten aller Festpunkte $P_j^{(i)}$ enthalten.

Das Verschwinden einer Subdeterminante D_j bedeutet, daß P_{j-1} , P_j und P_j'' auf einer gemeinsamen Geraden liegen, wodurch der weitere Reduktionsvorgang unmöglich wird. Es muß daher bei der Erkundung der Neupunkte dafür gesorgt werden, daß die Richtungs-differenzen $r''_j - r'_j$ möglichst nahe dem optimalen Betrag $\pi/2$ liegen, daß also die Meßdisposition etwa der Fig. 1.1 entspricht. Dies ist auch die wichtigste Folgerung der Diskussion kritischer Situationen in (K. Rinner, 1943).

4. Ausblick

Der vorstehend wiedergegebene Lösungsansatz für das ebene n-Punkte-Problem wurde durch die Bearbeitung eines vermessungstechnischen Programmsystems für einen modernen Microcomputer angeregt. Die Überlegungen beschränken sich daher nur auf die in diesem Zusammenhang auftretenden rechentechnischen Notwendigkeiten. Eine sicher nicht uninteressante geometrische Untersuchung der Bedingungen (3.1) bzw. (3.2) soll später folgen.

Literatur

- Bock, W.: Mathematische und geschichtliche Betrachtungen zum Einschneiden, Dissertation T. H. Hannover, 1951;
- Brandstätter, G.: Notiz zur analytischen Berechnung des ebenen Rückwärtsschnittes; Österr. Zeitschr. f. Vermessungsw. u. Photogr., 61. Jg., 1974;
- Rinner, K.: Zum mehrfachen Rückwärtseinschneiden, Allgemeine Vermessungsnachrichten, 51. Jg., 1939;
- Rinner, K.: Zum mehrfachen Rückwärtseinschneiden, Allgemeine Vermessungsnachrichten, 55. Jg., 1943;
- Walek, K.: Einige besondere Punktbestimmungsaufgaben in vektorieller Behandlung. Österr. Zeitschr. f. Vermessungsw., Jg. XXXIII, 1935;
- Werkmeister, P.: Gemeinsames Rückwärtseinschneiden von drei und mehr Punkten ohne überschüssige Messungen. Allgemeine Vermessungsnachrichten, 51. Jg., 1939.

Manuskript eingelangt: 10. März 1983