Paper-ID: VGI_198105

# Explizite Formen der Klotoidengleichung

Karl Hubeny [1]

[1] *Technische Universität Graz, Rechbauerstraße 12, A-8010 Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **69** (3–4), S. 89–91

1981

BibTEX:

```
@ARTICLE{Hubeny_VGI_198105,
Title = {Explizite Formen der Klotoidengleichung},
Author = {Hubeny, Karl},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen und
   Photogrammetrie},
Pages = {89--91},
Number = {3--4},
Year = {1981},
Volume = {69}
}
```

# Explizite Formen der Klotoidengleichung

Von *Karl Hubeny*, Graz

Zur Darstellung der Klotoide im rechtwinkligen Koordinatensystem benützt man bekanntlich Parameterformen, zumeist in der Form $x = x(A, L)$, $y = y(A, L)$, wobei der Parameter in Form der Bogenlänge L vorliegt. Gelegentlich kann aber auch eine Darstellung in expliziter Form, also als $y = y(A, x)$ oder $x = x(A, y)$ nützlich sein, deren Herleitung über den in der Literatur angedeuteten Umfang hinaus nachstehend mitgeteilt werden soll.

Wir gehen dazu von der Gleichung für die Abszisse

$$x = L\left[1 - \frac{1}{5.2!2^2}\left(\frac{L}{A}\right)^4 + \frac{1}{9.4!2^4}\left(\frac{L}{A}\right)^8 + \ldots\right] \tag{1}$$

aus, die wir vereinfacht und erweitert mit

$$x = a_1 L + a_5 L^5 + a_9 L^9 + a_{13} L^{13} + \ldots \tag{1a}$$

anschreiben. Dazu bilden wir die Umkehrung

$$L = b_1 x + b_5 x^5 + b_9 x^9 + b_{13} x^{13} + \ldots \quad , \tag{2}$$

worin sich die Koeffizienten $b_i$ aus denen von (1a) mit

$$b_1 = 1, \; b_5 = -a_5, \; b_9 = -a_9 + 5a_5^2, \; b_{13} = -a_{13} + 14a_5a_9 - 35a_5^3 \tag{3}$$

ergeben. Nach Bildung der Potenzen $L^3$, $L^7$ usw. von (2) tragen wir diese in die Gleichung für die Ordinate, nämlich

$$y = \frac{1}{3.1!2^1A^2}L^3 - \frac{1}{7.3!2^3A^6}L^7 + \ldots \tag{4}$$

ein, woraus die Form $y = y(A, x)$ der Klotoidengleichung mit

$$\begin{aligned} y = x\Big[\, & 0{,}1666\;66667\left(\frac{x^2}{A^2}\right) + 0{,}0095\;238095\left(\frac{x^2}{A^2}\right)^3 \\ & + 0{,}0012\;331650\left(\frac{x^2}{A^2}\right)^5 \\ & + 0{,}0002\;052996\left(\frac{x^2}{A^2}\right)^7 \\ & + 0{,}0000\;387463\left(\frac{x^2}{A^2}\right)^9 + \ldots\Big] \end{aligned} \tag{5}$$

erhalten wird.

Über den Anwendungsbereich einer Potenzreihe entscheidet deren Konvergenz. Für den Ausdruck (5) hängt diese, wie man sieht, vom Betrag des Verhältnisses x/A ab; Versuchsrechnungen zeigen, daß sich die Summe der auf das letzte Glied der obigen Formel folgenden, also vernachlässigten weiteren Glieder für $x/A \rightarrow 1$ deren Betrag von 0,01 m nähert, wobei eine gewisse Abhängigkeit vom Parameter besteht. Der Fehlbetrag von etwa 0,01 m wird z. B. für $A = 100$ bei $x/A = 1,14$, für $A = 300$ bei $x/A = 1,08$ und für $A = 600$ bei $x/A = 1,04$ erreicht. Etwas anders ausgedrückt: Die obige Potenzreihe ist bis zu einem Tangentenwinkel $\tau$ von etwa $40^g$ brauchbar.

Für einen gegebenen Parameter ist (5) eine nach Potenzen von x fortschreitende, innerhalb eines bestimmten Bereiches konvergierende Potenzreihe. Sie kann daher nach x aufgelöst, d. h. umgekehrt werden, wodurch man die Klotoidengleichung in der Form $x = x\,(A, y)$ mit

$$x = A \left[ 1{,}8171\,205930 \left(\frac{y}{A}\right)^{1/3} - 0{,}3773\,631145 \left(\frac{y}{A}\right)^{5/3} - 0{,}0625\,231909 \left(\frac{y}{A}\right)^{9/3} - 0{,}0214\,252895 \left(\frac{y}{A}\right)^{13/3} - 0{,}0117\,197342 \left(\frac{y}{A}\right)^{17/3} - \ldots \right] \quad (6)$$

erhält. Die Berechnung dieses Ausdruckes mit Bruchzahlen als Exponenten bereitet auch mit einfacheren Rechnern keine Schwierigkeiten; auch hier hängt die Konvergenz vom Betrag des Verhältnisses der Veränderlichen zum vorgegebenen Parameter, nämlich von $y/A$ ab. Dazu zwei Zahlenbeispiele:

1. Für $A = 250$, $L = 320$ ist $x = 299{,}182$
   $y = 83{,}281$ ($y/A = 0{,}33$)
   $\tau = 52{,}1519^g$.
   Aus (6) erhält man $x = 299{,}183$.
2. Für $A = 250$, $L = 350$ ist $x = 317{,}848$
   $y = 106{,}726$ ($y/A = 0{,}43$)
   $\tau = 62{,}3887^g$.
   Die Formel (6) ergibt $x = 317{,}851$.

Man kann also abschätzen, daß bei $y/A \rightarrow 0{,}5$ ein Fehlbetrag von etwa 0,01 m entstehen wird. Das Kriterium für die Brauchbarkeit von (5), nämlich der Wert $x/A$, kann demnach bei (6) wesentlich überschritten werden.

Aus der Potenzreihe (6) ergeben sich in weiterer Folge Formeln zur Berechnung des Sehnen- und Tangentenwinkels in der Form $\sigma = \sigma\,(y, A)$, $\tau = \tau\,(y, A)$. Denkt man sich den Klammerausdruck von (6) mit dem davorstehenden Faktor A multipliziert und daraus y herausgehoben, so entsteht die Form

$$x = y \left[ 1{,}8171\,205930 \left(\frac{y}{A}\right)^{-2/3} - 0{,}3773\,631145 \left(\frac{y}{A}\right)^{2/3} - \ldots\ldots\ldots\ldots \right]; \quad (7)$$

nun ist aber $x = y \cot\sigma$, d. h. der Klammerausdruck von (7) ist $\cot\sigma$, und es ist daher

$$\cot\sigma = 1{,}8171\,205930 \left(\frac{y}{A}\right)^{-2/3} - 0{,}3773\,631145 \left(\frac{y}{A}\right)^{2/3} - 0{,}0625\,231909 \left(\frac{y}{A}\right)^{6/3} - 0.0214\,252895 \left(\frac{y}{A}\right)^{10/3} - 0{,}0117\,197342 \left(\frac{y}{A}\right)^{14/3} \quad (8)$$

Aus der Ableitung von (6) nach y ergibt sich weiter: $dx/dy = \cot\tau$, woraus folgt:

$$\cot\tau = 0{,}6057\,06864 \left(\frac{y}{A}\right)^{-2/3} - 0{,}6289\,38524 \left(\frac{y}{A}\right)^{2/3} - 0{,}1875\,69573 \left(\frac{y}{A}\right)^{6/3} - 0{,}0928\,42921 \left(\frac{y}{A}\right)^{10/3} - 0{,}0664\,11827 \left(\frac{y}{A}\right)^{14/3} \quad (9)$$

Aus den obigen Formeln ergibt sich ein Fehlbetrag in $\tau$ und $\sigma$ von etwa $0{,}001^g$ bei $\tau = 50^g$, $\sigma = 25^g$; von $0{,}01^g$ bei $\tau = 65^g$, $\sigma = 30^g$. Für die vorstehenden Werte erhält man aus (6) die Abszisse auf etwa 0,005 bzw. 0,0005 m.

Innerhalb ihres Konvergenzbereiches gestatten die mitgeteilten Formeln die direkte Lösung einer Reihe von Aufgaben, die mit den üblichen Formeln nur schwer lösbar sind, z. B. die Angabe des Anfangspunktes einer Klotoide A auf der Grundtangente, die einen Punkt mit der Ordinate y durchlaufen soll oder die Bestimmung einer Klotoide, die durch zwei Punkte, $P_1$ und $P_2$, verläuft, wobei die beiden Punkte durch ihre Ordinaten $y_1$ und $y_2$ und die Abszissendifferenz $x_2$–$x_1$ gegeben sind usw.

## Über die Ergebnisse im österreichischen Anteil von DÖDOC

Von *K. Rinner*, Graz

### 1. Einführung in DÖDOC

Die Positionsbestimmung mit Doppler-Daten hat weltweit Eingang in die Landesvermessung gefunden. Sie wird in geodätischen Entwicklungsländern verwendet, um neue Kontrollpunktsysteme zu schaffen, und in Ländern mit geodätischer Tradition, um bestehende zu überprüfen und zu verbessern.