



Höhenkorrelation, Kovarianzfunktion und Prädiktion von Schwereanomalien in lokal begrenzten Gebieten Österreichs

Hans Sünkel ¹, Richard Malits ²

¹ *Technische Universität Graz, Institut für Theoretische Geodäsie, Steyrergasse 17, A-8010 Graz*

² *Schubertgasse 13, A-7400 Oberwart*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **69** (1), S. 17–31

1981

BibT_EX:

```
@ARTICLE{Suenkel_VGI_198102,  
Title = {H{"o}henkorrelation, Kovarianzfunktion und Pr{"a}diktion von  
Schwereanomalien in lokal begrenzten Gebieten {"O}sterreichs},  
Author = {S{"u}nkel, Hans and Malits, Richard},  
Journal = {"O}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {17--31},  
Number = {1},  
Year = {1981},  
Volume = {69}  
}
```



Literatur

- [1] *Bretterbauer, K.*: Eine Statistik der Dreieckswidersprüche im österreichischen Netz 1. Ordnung. ÖZfV, 55. Jg., Heft 2, 1967.
- [2] *Litschauer, J.*: Die zweite Ausgleichung des österreichischen Dreiecksnetzes 1. Ordnung. Veröffentlichung des BAfEV, Wien 1973.
- [3] *Erker, E., Litschauer, J., Losert, W.*: Die astronomisch-geodätischen Arbeiten Österreichs für ED 77. Veröffentlichung des BAfEV, Wien 1979.
- [4] *Pope, A.*: The Statistics of Residuals and The Detection of Outliers. NOAA Technical Report NOS 65 NGS 1, Rockville, 1976.
- [5] RETrig Publ. No. 13: The European Datum 1979. Report on the Symposium of the IAG Subcommission for the New Adjustment of the European Triangulation held in Madrid from 7 to 12 May, 1979.
- [6] *Litschauer, J.*: Das österreichische Dreiecksnetz 1. Ordnung in ED 77. ÖZfVuPh, 67. Jg., Heft 2, 1979.
- [7] *Erker, E.*: Der österreichische Anteil am ED 79. Veröffentlichung des BAfEV, Wien 1980.
- [8] *Schive, J.*: Berechnung des mittleren Fehlers der ausgeglichenen Werte. ZfV 323–329, 1931.
- [9] *Kreyszig, E.*: Statistische Methoden und ihre Anwendungen. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1973.
- [10] *Höpcke, W.*: Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung. W. de Gruyter, Berlin, New York 1980.

Höhenkorrelation, Kovarianzfunktion und Prädiktion von Schwereanomalien in lokal begrenzten Gebieten Österreichs

Von *Hans Sünkel*, Graz, und *R. Malits*, Oberwart

Zusammenfassung

Für vier Datensätze unterschiedlicher Struktur in lokal begrenzten Gebieten Österreichs wird das Korrelationsverhalten zwischen Freiluftanomalie und Höhe sowie das statistische Verhalten, ausgedrückt durch empirische Kovarianzfunktionen und deren wesentliche Parameter, untersucht.

Die beste lineare Schätzung von Bouguer-Anomalien und Freiluftanomalien wird als Kollokationsproblem nach kleinsten Quadraten mit Parametern dargestellt. Anhand eines der vier Datensätze wird gezeigt, daß für hinreichend kleine Gebiete mit homogener Datenverteilung und homogener geologischer Struktur eine Schätzung von Punktanomalien mit dem einfachen Modell linearer Korrelation mit einer Genauigkeit von etwa ± 6 mgal möglich ist.

Summary

Four sets of free-air anomalies of varying structure, restricted to local regions in Austria, are investigated as far as its correlation with the topographic height is concerned; empirical covariance functions and its essential parameters are estimated.

The best linear estimation of Bouguer-anomalies and free-air anomalies is formulated as a problem of least-squares collocation with parameters. It is shown that, with the simple assumption of linear correlation, point anomalies can be estimated with an error of about ± 6 mgal, provided a homogeneous data distribution is available in a sufficiently small region with homogeneous geological structure.

1. Einleitung

Die kürzlich in Angriff genommene Geoidbestimmung in Österreich bereitet in (zumindest) zweifacher Hinsicht Schwierigkeiten:

- a) die extremen topographischen Verhältnisse im Großteil unseres Bundesgebietes bedingen die Anwendung wesentlich verfeinerter Methoden der physikalischen Geodäsie, und
- b) die damit verbunden erforderliche Datendichte (Lotabweichungen, Schwereanomalien etc.) ist zur Zeit noch nicht gegeben.

Gerade deshalb kann auf keine Datengruppe mit Information über das Schwerefeld verzichtet werden. Von besonderer Wichtigkeit erscheint uns in diesem Zusammenhang die Datengruppe Schwereanomalien zu sein, welche in einer Kombinationslösung zur Interpolation der Lotabweichungen eingesetzt werden kann. Eine derartige gravimetrische Interpolation ist aber nur dann sinnvoll, wenn eine möglichst homogene flächenhafte Verteilung von Schwereanomalien vorliegt. Flächenhafte Schweremessungen sind jedoch in unserem Bundesgebiet im wahrsten Sinne des Wortes „dünn gesät“. Es drängt sich daher die Frage auf, wie gut das tatsächliche Feld der Schwereanomalien durch die vorhandenen Schweredaten repräsentiert wird und welcher Informationsgewinn für das Störpotential bei Berücksichtigung von Schweredaten zu erwarten ist. Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit dem ersten Teil der Frage.

Unsere Untersuchungen führten wir für vier Gebiete mit einigermaßen flächenhafter Bedeckung mit Schweredaten durch:

1. Gebiet der Hohen Tauern (Daten des Instituts für Geophysik der TU Clausthal),
2. Gebiet der Karawanken (Daten des Instituts für Meteorologie und Geodynamik der TU Wien),
3. Nordöstliches Alpenvorland (Basisnetz der ÖMV),
4. Umgebung von Graz (Daten des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen).

Die Datenverteilungen sind in Fig. 1.1 dargestellt.

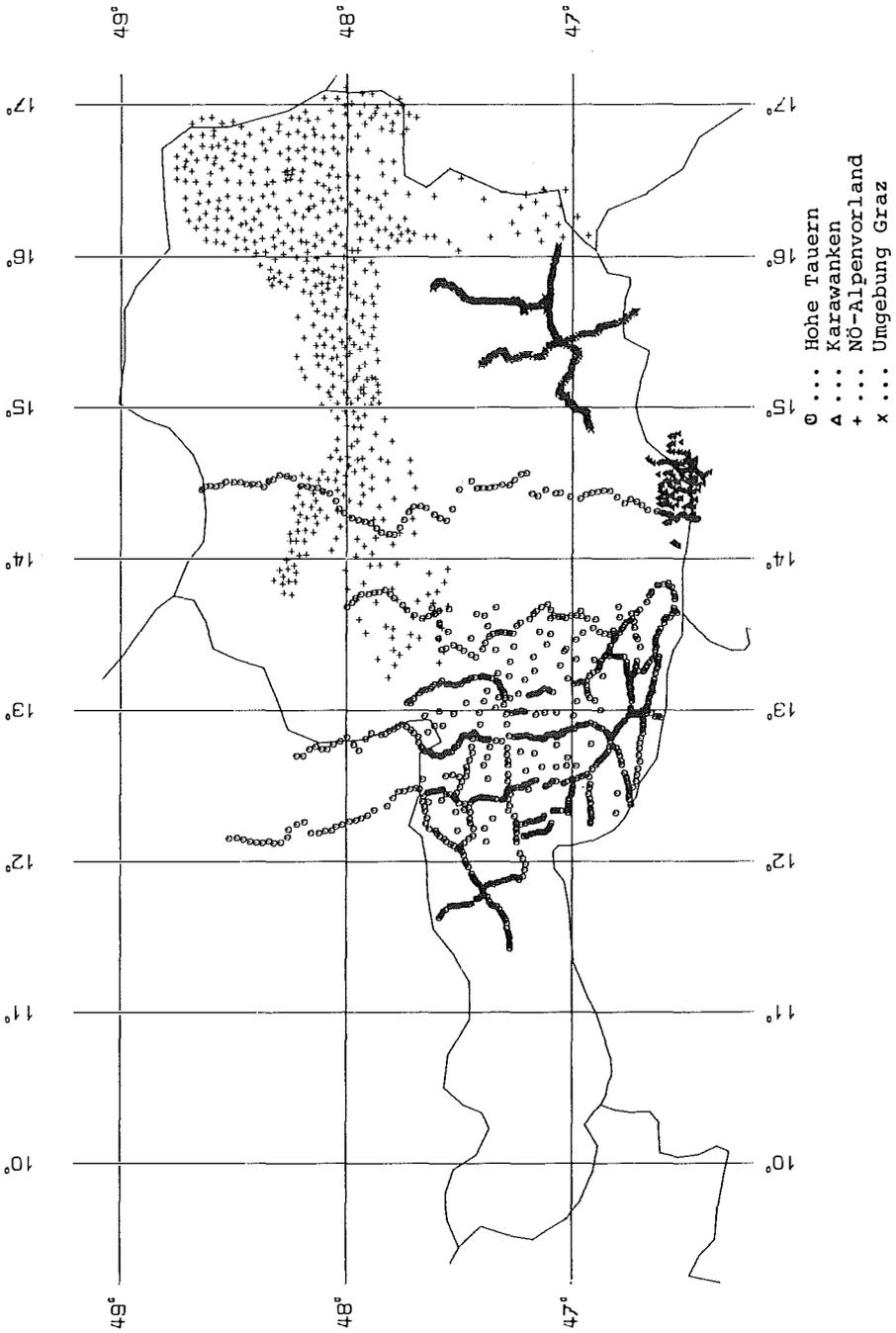


Fig. 1.1 Verteilung der untersuchten Schwermetalle

2. Korrelation Freiluftanomalie – Höhe

Bestünde ein exakter funktioneller Zusammenhang zwischen Freiluftanomalie Δg und Höhe h , wäre die Vorhersage einer Freiluftanomalie an einem vorgegebenen Punkt lediglich Sache einfacher Algebra. Die Unregelmäßigkeiten der Topographie und der Gesteinsdichten, verbunden mit dem Gesetz der Massenanziehung, sorgen für zum Teil erhebliche Störungen dieses funktionellen Zusammenhanges. Dennoch besteht oft eine ausgeprägte lineare Beziehung zwischen Freiluftanomalie und Höhe, deren Ursache vor allem in der Nichtberücksichtigung topographischer Unregelmäßigkeiten liegt. (Im Gegensatz zu den Freiluftanomalien tragen die Bougueranomalien der Topographie Rechnung, weshalb diese auch lokal keine Korrelation mit der Höhe aufweisen.) Im folgenden soll untersucht werden, ob die vorhandenen Datengruppen signifikant mit der Höhe korreliert sind.

Ist eine lineare Korrelation der Freiluftanomalien Δg mit der Höhe h gegeben, so läßt sich Δg aufspalten in einen konstanten, höhenabhängigen und höhenunabhängigen Anteil,

$$\Delta g = a + bh + s \quad (2.1)$$

mit Δg ... Freiluftanomalie,

h ... Höhe,

s ... Abweichung der Freiluftanomalie vom linearen Modell (Signal),

a, b ... Modellparameter.

Bilden wir den Mittelwert von (2.1),

$$M(\Delta g) = a + bM(h) + M(s) ,$$

so erhalten wir mit

$$M(s) = 0 , \quad M(\Delta g) = \Delta \bar{g} , \quad M(h) = \bar{h}$$

die einfache Beziehung

$$\Delta \bar{g} = a + b\bar{h} . \quad (2.2)$$

Wäre s identisch null, so bestünde eine exakte lineare Beziehung zwischen Δg und h ; dies ist natürlich nicht der Fall, weshalb s den Charakter von Verbesserungen hat.

Als „reduzierte Schwereanomalie“ Δg_r , bezeichnen wir die Differenz zwischen gemessener Schwereanomalie und mittlerer Schwereanomalie des betreffenden Gebietes,

$$\Delta g_r := \Delta g - \Delta \bar{g} . \quad (2.3a)$$

Führen wir analog dazu eine „reduzierte Höhe“ Δh als Differenz zwischen der zum Schwerewert gehörenden Höhe und der mittleren Höhe des betreffenden Gebietes ein,

$$\Delta h := h - \bar{h} , \quad (2.3b)$$

so kann Δg_r durch

$$\Delta g_r = s + b\Delta h \quad (2.4)$$

ausgedrückt werden. Man beachte, daß der Mittelwert aller dieser drei Größen verschwindet:

$$\begin{aligned}
 M(\Delta g_x) &= M(\Delta g - \Delta \bar{g}) = \Delta \bar{g} - \Delta \bar{g} = 0, \\
 M(\Delta h) &= M(h - \bar{h}) = \bar{h} - \bar{h} = 0, \\
 M(s) &= M(\Delta g_x - b\Delta h) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Wäre eine exakte lineare funktionelle Beziehung zwischen Freiluftanomalie und Höhe gegeben, so würde s verschwinden und daher Proportionalität zwischen Δg_x und Δh bestehen mit dem Proportionalitätsfaktor b ($b = \Delta g_x / \Delta h$). Diese exakte funktionelle Beziehung ist aus bereits erläuterten Gründen nicht vorhanden; mit anderen Worten, s verschwindet nicht identisch, sondern nur im Mittel. Wohl aber besteht die Möglichkeit, daß Proportionalität im statistischen Sinne besteht, ausgedrückt durch die zugehörigen Kovarianzfunktionen. Ist dies der Fall,

$$\text{cov}(\Delta g_x, \Delta h) = b \text{cov}(\Delta h, \Delta h), \tag{2.6}$$

so ist s,

$$s = \Delta g_x - b\Delta h, \tag{2.7}$$

zur Höhe Δh statistisch orthogonal (Heiskanen/Moritz, 1967, S. 283, 284). Aus (2.7) oder (2.1) ist unmittelbar ersichtlich, daß s den Charakter einer Bouguer-Anomalie hat. Es ist allgemein bekannt, daß Bouguer-Anomalien lokal mit der Höhe unkorreliert sind (isostatische Anomalien sind sogar regional mit der Höhe unkorreliert). Wir können daher mit gutem Grund voraussetzen, daß für lokal beschränkte Bereiche Gleichung (2.6) hinreichend genau gilt. Dies wiederum hat zur Folge, daß der Term $a + bh$ in Gleichung (2.1) als mit s unkorreliertes Trendmodell AX behandelt werden kann,

$$\Delta g = AX + s. \tag{2.8}$$

X steht für den Parametervektor, $x^T = (a, b)$, und die Matrix A ist in der 1. Spalte mit Einern besetzt, die 2. Spalte enthält die Höhen der Datenpunkte. Sind die Meßgrößen Δg mit Fehlern behaftet, so muß (2.8) erweitert werden zu

$$\Delta g = AX + s + n. \tag{2.8}'$$

Gleichung (2.8)' stellt das Modell der Prädiktion nach kleinsten Quadraten mit Parametern dar (Moritz, 1980, S. 111).

Wir interessieren uns zunächst für die beste Schätzung \hat{X} der im Vektor X zusammengefaßten Parameter a und b. Bezeichnen wir die zu s und n gehörigen Kovarianzmatrizen mit C_{ss} und C_{nn} ,

$$\begin{aligned}
 C_{ss} &= \text{cov}(s, s), \\
 C_{nn} &= \text{cov}(n, n),
 \end{aligned}$$

und setzen wir Unkorreliertheit von s mit n voraus,

$$C_{sn} = \text{cov}(s, n) = 0,$$

so läßt sich die beste Schätzung der Parameter a und b durch

$$\hat{X} = (A^T \bar{C}^{-1} A)^{-1} A^T \bar{C}^{-1} \Delta g \tag{2.9a}$$

mit $\bar{C} = \text{cov}(s + n, s + n) = C_{ss} + C_{nn}$ ausdrücken (Moritz, 1980, S. 116). Die Fehlerkovarianzmatrix des geschätzten Parametervektors ist gegeben durch

$$E_{XX} = (A^T \bar{C}^{-1} A)^{-1}. \tag{2.9b}$$

In (2.9a) und (2.9b) haben wir stillschweigend angenommen, daß die Autokovarianzfunktion des Signals s bekannt ist. Nach Gleichung (2.7) kann s und damit dessen Kovarianzfunktion aber erst bestimmt werden, wenn der Parameter b bekannt ist; dieser hängt aber über (2.9a) wiederum von der Kovarianzfunktion des Signals s ab – ein Teufelskreis? Dem Anschein nach ja, jedoch mit Ausweg. Die Lösung heißt „iterative Näherung“ und wird ermöglicht durch den mäßigen Einfluß von C_{ss} auf die Lösung \hat{X} :

Wir nehmen im 0. Schritt eine Kovarianzfunktion für s an, oder, noch einfacher, wir setzen sie als identisch null an. Damit reduziert sich \bar{C} auf

$$\bar{C} = C_{nn}$$

und die Lösung (2.9a, b) entartet in eine einfache Ausgleichungslösung nach kleinsten Quadraten,

$$\hat{X}_0 = (A^T P A)^{-1} A^T P \Delta g, \quad (2.10)$$

$$E_{X_0 X_0} = (A^T P A)^{-1}, \quad (2.11)$$

mit der Gewichtsmatrix P , die als inverse a priori Fehlerkovarianzmatrix C_{nn}^{-1} praktisch immer auf Diagonalfom beschränkt wird. Die Ausgleichlösung \hat{X}_0 ist wegen der Ignorierung von C_{ss} eine Näherung der Kollokations-(Prädiktions)lösung (2.8). \hat{X}_0 kann nach (2.7) zur Berechnung des vorläufigen Signals s_0 , der vom Einfluß der Höhe befreiten reduzierten Anomalie, verwendet werden. Dieser (vorläufige) Signalvektor s_0 erlaubt die Berechnung einer zugehörigen (vorläufigen) Kovarianzfunktion $C_{s_0 s_0}$, welche im nächsten Schritt in die Kollokationslösung (2.9) eingeht. Mit der besseren Schätzung des Parametervektors \hat{X} , werden wiederum bessere Werte für s geschätzt, daraus eine bessere Kovarianzfunktion abgeleitet usw. Wegen des mäßigen Einflusses von C_{ss} auf die Lösung konvergiert diese Iteration sehr rasch (meistens genügen zwei Schleifen). Als Endergebnis erhalten wir lineare Schätzungen der Parameter a und b , welche auf der Grundlage der vorhandenen Daten optimal im Sinne der Quadratnorm

sind.

$$s^T C_{ss}^{-1} s + n^T C_{nn}^{-1} n$$

Welche physikalische Bedeutung besitzen die Parameter a und b ? Wir haben mit (2.6) angenommen, daß s zu Δh orthogonal im statistischen Sinne ist; dann folgt, daß b der für das betreffende Gebiet charakteristische Vertikalgradient der Schwereanomalien ist; die Operation (2.7) stellt daher eine Art Bouguer-Reduktion der reduzierten Schwereanomalie Δg , auf das mittlere Niveau $h = \bar{h}$ dar mit dem Bouguer-Gradienten b . Der theoretische Bouguer-Gradient

$$b = 2\pi G\rho$$

erreicht mit der Dichte $\rho = 2,67 \text{ gcm}^{-3}$ einen Wert von $b = 0,112 \text{ mgal/Meter}$. Der tatsächliche Gradient wird entsprechend den topographischen und Dichteverhältnissen mehr oder weniger von diesem Wert abweichen. Über (2.1) können wir auch den Parameter a deuten: mit $M\{s\} = 0$ ist

$$a = M\{\Delta g - bh\}, \quad (2.12)$$

also gleich der Mittelwert der mit b um den Einfluß der Bouguerplatte der Höhe h reduzierten Freiluftanomalien; ein wenig locker ausgedrückt, ist a der Mittelwert der Bouguer-Anomalien des betreffenden Gebietes und ist damit ein Maß für dessen lokale isostatische Kompensation. In der folgenden Tabelle sind wesentliche Charakteristiken der vier untersuchten Datengruppen und Ergebnisse zusammengestellt.

Datencharakteristik	Hohe Tauern	Karawanken	Nordöstl. Alpenvorl.	Umgebung Graz
Anzahl Δg	899	198	536	432
Gebietsgröße : $\Delta\varphi^\circ$	2.1	0.2	2.0	0.9
	$\Delta\lambda^\circ$	3.1	0.7	4.0
Höhenbereich, m	260-2500	390-1650	120-1000	250-1400
mittlere Höhe, m	854	673	330	544
$M(\Delta g)$, mgal	-21.5	24.4	9.3	38.7
$var(\Delta g_r)$, mgal ²	1467	760	549	586
<u>Korrelationsparameter</u>				
$a \pm m_a$, mgal	-74.2±2.2	-50.1±1.6	13.8±2.2	-3.5±1.5
$b \pm m_b$, mgal/m	.062±.002	.111±.002	-.014±.006	.078±.002

Tab. 2.1 Korrelation Freiluftanomalie – Höhe (Daten und Ergebnisse)

(Die Ergebnisse beziehen sich auf die Iterationsstufe 0.) Besonders bemerkenswert erscheinen uns zwei Ergebnisse zu sein: Für das sehr kleine Gebiet der Karawanken ergibt sich ein Bouguer-Gradient, der mit dem theoretischen völlig übereinstimmt. Die Datendichte ist mit ca. 1 Punkt/km² sehr hoch, ebenso das Verhältnis Höhenbereich/Gebietsgröße; daher ist bei halbwegs einheitlichen Dichteverhältnissen eine hohe Schätzgenauigkeit zu erwarten, was durch Ergebnisse bestätigt wird. Krasses Gegenstück dazu ist die Datengruppe der ÖMV im nordöstlichen Alpenvorland: Die Datendichte von etwa 1 Punkt/120 km², das schwache Verhältnis Höhenbereich/Gebietsgröße und die bekannten geologischen Inhomogenitäten lassen keine sinnvolle Schätzung von b erwarten; für eine einheitliche Behandlung (Mittelwert a, b) ist das Gebiet bereits erheblich zu groß: Detailuntersuchungen zeigten, daß zwar lokal ein recht einheitliches Verhalten des Gradienten gegeben ist, das aber bereits relativ stark variierende Verhalten des lokalen Mittelwertes der Bouguer-Anomalien verfälscht das Resultat völlig. (Mit anderen Worten, die Beziehung [2.6] ist nicht mehr gültig.) Die Figuren 2.2a–d zeigen für die vier untersuchten Gebiete das Korrelationsverhalten zwischen Freiluftanomalie und Höhe sowie die dazugehörige Regressionsgerade.

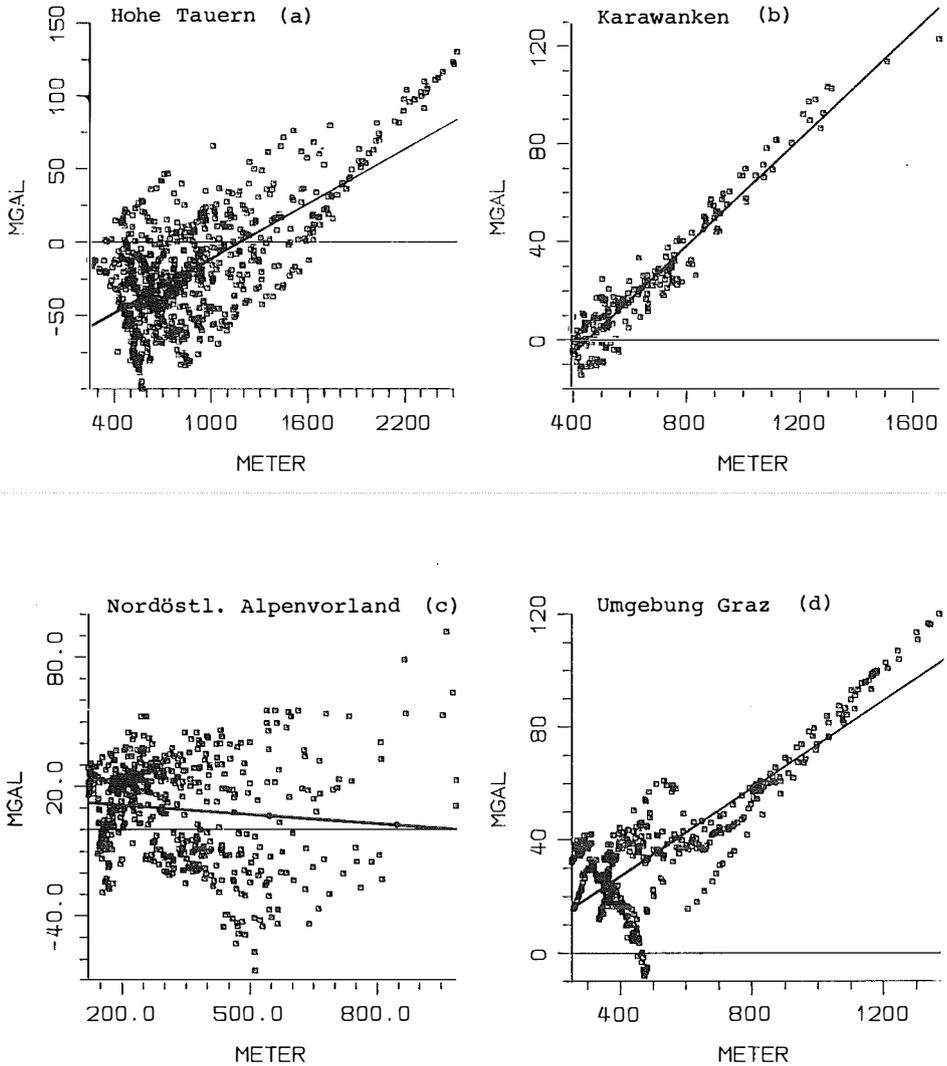


Fig. 2.2a-d Korrelation zwischen Freiluftanomalie und Höhe

3. Kovarianzfunktion und Prädiktion von Schwereanomalien

Wenn wir in diesem Zusammenhang von Kovarianzfunktion sprechen, meinen wir eine homogene und isotrope lokale Kovarianzfunktion C der Anomalie s mit

$$s = \Delta g - (a + bh) . \quad (3.1)$$

Homogenität und Isotropie äußert sich darin, daß die Kovarianzfunktion lediglich von der sphärischen Distanz ψ_{PQ} zweier Punkte P und Q abhängt,

$$\text{cov}(s_P, s_Q) = C(\psi_{PQ}) ; \tag{3.2}$$

wir erhalten sie durch die Mittelwertbildung der Produkte $s_P s_Q$ über alle Punkte P und Q, welche jeweils gleichen Abstand voneinander haben,

$$C(\psi_{PQ}) = M\{s_P s_Q\} , \quad \overline{PQ} = \psi_{PQ} \tag{3.3}$$

Da die „Bouguer-Anomalie“ s von den Regressionsparametern a und b abhängt, diese aber wiederum von C , erfolgt die Bestimmung von C iterativ wie in Abschnitt 2 beschrieben.

Das wesentliche Verhalten einer Kovarianzfunktion kann durch drei Parameter hinreichend charakterisiert werden (Moritz, 1976; 1980, S. 174 ff.): Die Varianz $C_0 = C(0)$, die Halbwertsbreite $\xi : C(\xi) = C_0/2$, und durch die Krümmung im Ursprung κ_0 , welche mit der Varianz des Horizontalgradienten der Schwereanomalie, G_0 , über $\kappa_0 = -G_0$ zusammenhängt.

Die Schätzung der Varianz ist sehr einfach ($C_0 = M\{s^2\}$) und schnell; die Varianz stellt den Maßstabsfaktor der Kovarianzfunktion dar. Ungleich aufwendiger ist die Schätzung der Halbwertsbreite ξ , die praktisch nur indirekt aus der empirischen Kovarianzfunktion abgeleitet werden kann; sie ist ein Maß für den Grad der Korrelation zwischen benachbarten Größen und gleichzeitig ein Richtwert für die Repräsentationsfähigkeit der Daten: hinreichend gute Repräsentation des Feldes ist nur dann zu erwarten, wenn der mittlere Punktabstand zwischen benachbarten Daten die Halbwertsbreite nicht überschreitet. Die Schätzung der Varianz des Horizontalgradienten ist in mancher Hinsicht problematisch: Drehwaagenmessungen und/oder Vertikalgradientenmessungen sind meist nicht vorhanden und überdies besonders in Gebirgsgegenden kaum repräsentativ, da sie auf streng lokale Einflüsse reagieren; die Schätzung über Differenzenquotienten mag im Flach- bis Hügelland sinnvolle Ergebnisse liefern (Schwarz/Lachapelle, 1980), im Mittel- bis Hochgebirge jedoch ist die dazu erforderliche Datendichte nie vorhanden. Aus eben diesen Gründen beschränkten wir uns auf die Schätzung von lediglich zwei dieser insgesamt drei Parameter, die Varianz und die Halbwertsbreite. Die folgende Tabelle gibt eine Zusammenstellung der Ergebnisse.

Kovarianzparameter	Hohe Tauern	Karawanken	Nordöstl. Alpenvorld	Umgebung Graz
$\text{var}(\Delta g), \text{ mgal}^2$	1925	1360	670	2085
$\xi(\Delta g), \text{ km}$	9.3	12.7	38.0	23.0
$\text{var}(\Delta g_x), \text{ mgal}^2$	1467	760	549	586
$\xi(\Delta g_x), \text{ km}$	7.6	3.3	24.1	6.7
$\text{var}(s), \text{ mgal}^2$	821	54	540	171
$\xi(s), \text{ km}$	7.6	2.5	24.0	6.0

Tab. 3.1 Varianzen (var) und Halbwertsbreiten (ξ)

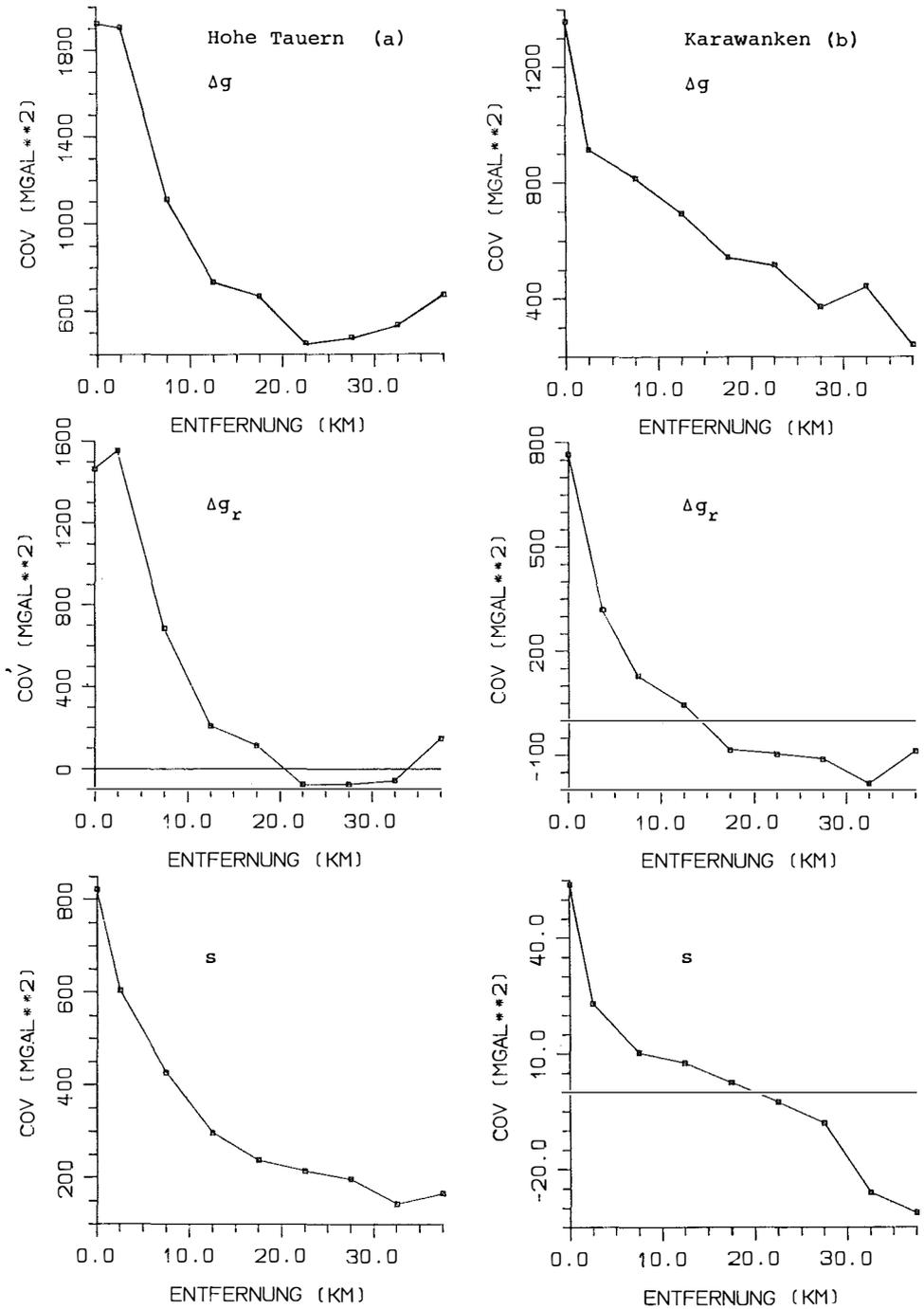


Fig. 3.1a, b Empirische Kovarianzfunktionen

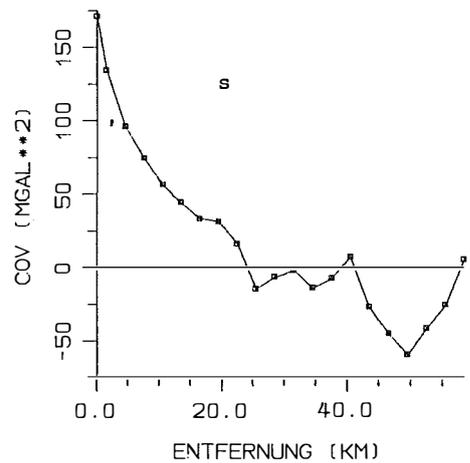
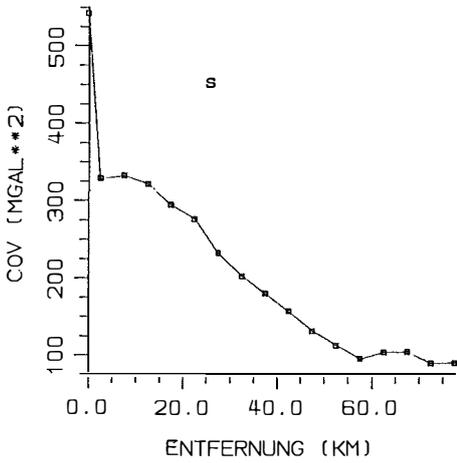
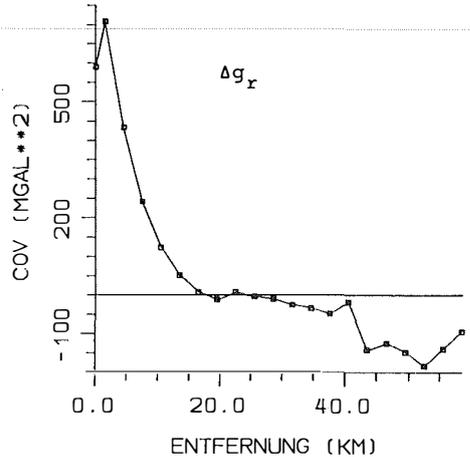
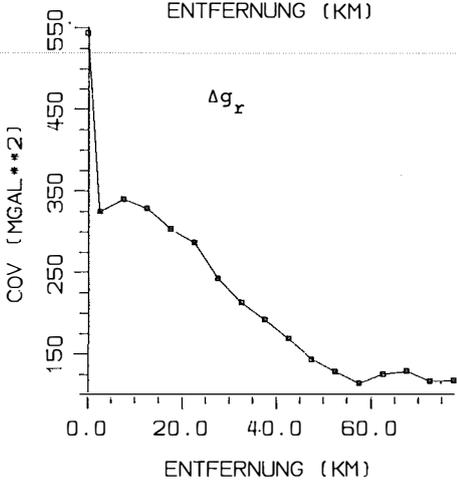
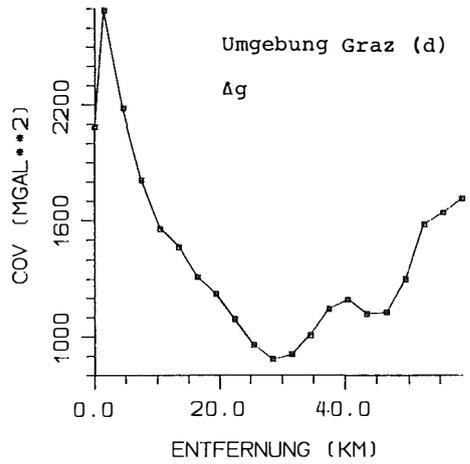
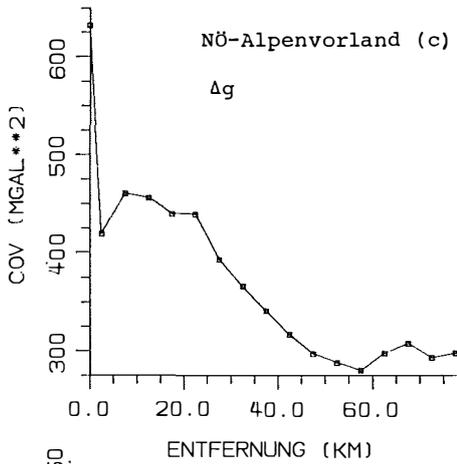


Fig. 3.1c, d Empirische Kovarianzfunktionen

In Fig. 3.1a–d sind zum Vergleich die empirischen Kovarianzfunktionen der unreduzierten Freiluftanomalien Δg , der um ihren Mittelwert reduzierten Anomalien Δg_r und der „Bouguer-Anomalien“ s der vier untersuchten Daten-gruppen dargestellt.

Die Tatsache, daß bisweilen die Varianz die Kovarianz überschreitet, hat rein numerische Ursachen: Für einen bestimmten kleinen Entfernungsbereich wurden nur relativ wenig Schwereanomalien-Paare gefunden, offenbar zu wenig für eine verlässliche statistische Aussage; die Anzahl der gefundenen Paare steigt allerdings ab einer Entfernung von ca. 5 km sprunghaft an und damit die Aussagekraft der empirischen Kovarianzfunktion.

Folgende Charakteristiken der Kovarianzfunktionen scheinen uns – wenn auch zum Teil allgemein bekannt – dennoch besonders bemerkenswert zu sein:

- a) Die Varianz der Freiluftanomalien steigt i. a. mit zunehmender mittlerer Höhe des Gebietes an; eine Ausnahme stellt die Datengruppe Umgebung Graz dar; die Ursache liegt mit großer Wahrscheinlichkeit in der linien- und nicht flächenhaften Datenverteilung vor allem entlang von Talsohlen (Schweredaten nur entlang der Hauptnivelementlinien = Verkehrswege).
- b) Die Halbwertsbreite der Kovarianzfunktion wird deutlich durch den nicht verschwindenden Mittelwert der Freiluftanomalien beeinflusst.
- c) Für das topographisch eher ruhige Gebiet des nordöstlichen Alpenvorlandes zeigt die Kovarianzfunktion sehr ähnliche Charakteristiken, wie die von Schwarz und Lachapelle (1980) für Kanada (mit Ausschluß der Rocky Mountains) abgeleitete.
- d) Für kleinere Gebiete (Karawanken, Umgebung Graz) kann sowohl die Varianz wie auch die Halbwertsbreite durch die Reduktion wegen der Höhe beträchtlich gesenkt werden (vgl. $\text{cov} [\Delta g_r]$ mit $\text{cov} [s]$); wesentlich schwächer wirkt sich diese Reduktion bei den beiden größeren Gebieten aus, was vor allem durch die nicht mehr einheitlich vorhandene Höhenkorrelation bedingt ist.

4. Prädiktion von Schwereanomalien

In den ersten drei Abschnitten wurden die notwendigen Vorarbeiten für die Beantwortung der anfangs gestellten Frage geleistet: Wie gut wird das tatsächliche Feld der Schwereanomalien durch die vorhandenen Schweredaten repräsentiert? Die Antwort ist keineswegs eindeutig, da die Güte der Repräsentation von mehreren Parametern abhängt: der Datenverteilung, der Datendichte, der Topographie, ihrer isostatischen Kompensation und vielen anderen mehr. Da sich die vier vorliegenden Datensätze auf relativ kleine Gebiete beschränken und hinreichend detaillierte Geländemodelle nicht zur

Verfügung standen, war es naheliegend, mit der sehr vereinfachten Annahme linearer Korrelation zwischen Freiluftanomalie und Höhe zu arbeiten. Die Güte der Prädiktion (Interpolation) von Schwereanomalien hängt daher auch von der Signifikanz dieser linearen Beziehung ab.

Wir geben hier für die „Bouguer-Anomalie“ s und für die Freiluftanomalie Δg den prädierten Wert sowie dessen Fehler in linearer Funktion der Daten bzw. der zugehörigen Kovarianzen an. Zunächst zum einfachen Fall der Bouguer-Anomalie s : Bezeichnen wir mit \hat{s}_p deren beste lineare Schätzung an der Stelle P und mit C_p den Vektor der Kovarianzen zwischen dem Prädiktionspunkt P und sämtlichen Datenpunkten, so läßt sich mit (2.8)' und (2.9a, b) \hat{s}_p darstellen als (Moritz, 1980, S. 116)

$$\hat{s}_p = C_p^T C^{-1} (\Delta g - A\hat{\lambda}) \quad (4.1)$$

Wird nicht nur ein einziger Wert, sondern ein Vektor \hat{s} prädiert, so wird C_p zu einer Matrix C_s . Die zum Vektor \hat{s} gehörende geschätzte Fehlerkovarianzmatrix \hat{E}_{ss} ist gegeben durch

$$\hat{E}_{ss} = C_{ss} - C_s C^{-1} [I - A(A^T C^{-1} A)^{-1} A^T C^{-1}] C_s^T \quad (4.2)$$

(Die Diagonalelemente von \hat{E}_{ss} sind die zu den Elementen des Vektors \hat{s} gehörigen geschätzten Fehlervarianzen.)

Die geschätzte Fehler-Kreuzkovarianzmatrix zwischen den im Vektor $\hat{\lambda}$ zusammengefaßten besten linearen Schätzungen der Trendparameter und dem prädierten Anomalienvektor ist gegeben durch

$$\hat{E}_{\lambda s} = -(A^T C^{-1} A)^{-1} A^T C^{-1} C_s \quad (4.3)$$

Man beachte, daß in diesen Schätzformeln die mit C bezeichneten Kovarianzvektoren und Kovarianzmatrizen von einem Modell der empirischen Kovarianzfunktion der höhenreduzierten Anomalie s („Bouguer-Anomalie“) abgeleitet werden.

Die Varianz stellt einen Maßstabsfaktor für den Prädiktionsfehler dar; die geschätzte Fehler-Kovarianzmatrix der Parameter $\hat{E}_{\lambda\lambda}$ spiegelt die Signifikanz des Trendmodells wider. Es ist daher bei einem hinreichend strengen Korrelationsverhalten und bei kleiner Varianz der Kovarianzfunktion mit kleinen Prädiktionsfehlern zu rechnen (z. B. Karawanken).

Im Zusammenhang mit Integralformeln ist es von Interesse, die Genauigkeit prädizierter Mittelwerte von „Bouguer-Anomalien“ s über vorgegebene Gebiete zu schätzen: Bezeichnen wir mit M den linearen Glättungsoperator der gleitenden Mittelwertbildung und mit \bar{s}_p den Mittelwert von s über ein vorgegebenes Gebiet $\sigma(P)$,

$$\begin{aligned} \bar{s}(P) &= \frac{1}{\sigma(P)} \iint_{\sigma(P)} s(Q) d\sigma(Q) \\ &= M(P, Q) s(Q) \quad , \end{aligned} \quad (4.4)$$

so läßt sich für das Gebiet σ (P) der Mittelwert von s präzisieren mit

$$\hat{s}_P = M_{PQ} \hat{s}_Q,$$

was bei Berücksichtigung von (4.1) zu

$$\hat{s}_P = M_{PQ} C_Q^T C_Q^{-1} (\Delta g - A\hat{X}) \quad (4.5)$$

mit der Fehler-Kovarianzmatrix

$$\hat{E}_{ss} = M E_{ss} M^T$$

führt.

Schließlich wollen wir noch einen Ausdruck zur Schätzung der Freiluftanomalien Δg sowie deren Fehler-Kovarianzmatrix ableiten. Mit (2.1) und (2.8) ist die beste lineare Schätzung für Δg gegeben durch

$$\Delta g_P = A_P \hat{X} + \hat{s}_P \quad (4.6)$$

mit \hat{X} aus (2.9a) und \hat{s}_P aus (4.1). A_P ist eine Matrix, welche in der ersten Spalte einer 1 besitzt und deren zweite Spalte die Höhen der Prädiktionspunkte enthält. (Im Gegensatz dazu enthält die zweite Spalte von A die Höhen der Datenpunkte.) Die zugehörige Fehler-Kovarianzmatrix erhält man mit

$$\hat{E}_{\Delta_P \Delta_P} = A_P \hat{E}_{XX} A_P^T + A_P \hat{E}_{Xs} + (A_P \hat{E}_{Xs})^T + \hat{E}_{ss}. \quad (4.7)$$

Analog zu \hat{E}_{ss} enthält die Hauptdiagonale von $\hat{E}_{\Delta_P \Delta_P}$ die mittleren quadratischen Prädiktionsfehler der präzisierten Freiluftanomalien.

5. Schlußfolgerungen

Als Vorarbeit für die in Angriff genommene Geoidbestimmung in Österreich war anhand von vier Datengruppen von Freiluftanomalien zu untersuchen, welche Interpolationsgenauigkeit unter der Annahme linearer Korrelation zwischen Freiluftanomalie und Höhe möglich ist. Die Datensätze waren bezüglich der Dichte, der Verteilung, der Geologie, den topographischen Verhältnissen und der Ausdehnung des betreffenden Gebietes recht unterschiedlich. Entsprechend uneinheitlich ist auch das Korrelationsverhalten: Während im recht lokalen Bereich der Karawanken eine sehr ausgeprägte und signifikante Korrelation festgestellt wurde, geht eine derart einheitliche für das große Datengebiet des nordöstlichen Alpenvorlandes völlig verloren.

Die zugehörigen Kovarianzfunktionen der Freiluftanomalien Δg sowie der vom Höhentrend befreiten Anomalien s weisen ebenfalls recht unterschiedliche Charakteristiken auf: Die Varianzen von Δg streuen im Bereich zwischen ca. 700 und 2000 mgal², die Halbwertsbreiten zwischen 9 und 38 km. Die

Kovarianzfunktion der „Bouguer-Anomalie“ s besitzt dann eine kleine Varianz und Halbwertsbreite, wenn die lineare Korrelation mit der Höhe stark ausgeprägt ist (Datensatz Karawanken, Umgebung Graz). Besonders eindrucksvoll wird dieses Verhalten im streng abgeschlossenen Bereich der Karawanken demonstriert: Die Varianz der Bouguer-Anomalien beträgt lediglich $\frac{1}{25}$ der Varianz der Freiluftanomalien, die Halbwertsbreite der Bouguer-Anomalie-Kovarianzfunktion nur $\frac{1}{5}$ der Halbwertsbreite der Freiluftanomalie-Kovarianzfunktion. Im Gegensatz dazu unterscheidet sich das statistische Verhalten der Bouguer-Anomalien für den Datensatz NÖ-Alpenvorland nur geringfügig von dem der Freiluftanomalien.

Bisher wurden lediglich mit dem Datensatz „Karawanken“ Testprädiktionen von Schwereanomalien durchgeführt. Als Modell-Kovarianzfunktion diente das einfache Hirvonen-Modell (Heiskanen/Moritz, 1967, S. 255)

$$c(\psi) = c_0 \left[1 + \left(\frac{\psi}{\xi} \right)^2 \right]$$

Als durchschnittlicher mittlerer Prädiktionsfehler der Bouguer-Anomalien (Gleichung 4.2) ergab sich ein Wert von ± 6 mgal, für die Freiluftanomalien (Gleichung 4.7) ± 7 mgal, bemerkenswert gute Ergebnisse in Anbetracht der stark vereinfachten Annahme linearer Korrelation zwischen Freiluftanomalie und Höhe. Es liegt daher die begründete Vermutung nahe, daß bei hinreichend homogenen geologischen Verhältnissen und bei einer Beschränkung auf hinreichend kleine Gebiete die Prädiktion von Punktanomalien mit einer Genauigkeit von besser als ± 10 mgal mit diesem einfachen Modell möglich erscheint. Eine wesentliche Genauigkeitssteigerung ist bei Berücksichtigung der Wirkung der Topographie zu erwarten.

Mit diesen kleinen Detailuntersuchungen sollte ein bescheidener Anfang gemacht werden für ausgedehnte Studien. In weiterer Folge ist geplant, in verschiedenen Gebieten des österreichischen Bundesgebietes nicht nur Punktwerte und Mittelwerte der Schwere, sondern auch Lotabweichungen und Geoidhöhen *flächenhaft* zu präzisieren, topographische sowie geologische Detailinformation im Zusammenhang mit einem optimalen isostatischen Modell heranzuziehen, und auf der Grundlage aller vorhandenen Schwerefelddaten das Inversionsproblem der Bestimmung des Schwerefeldes in Österreich bestmöglich zu lösen.

Literatur

- Heiskanen, W. A., and H. Moritz (1967): Physical Geodesy. W. H. Freeman, San Francisco.
 Moritz, H. (1976): Covariance functions in least-squares collocation. Report No. 240, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio.
 Moritz, H. (1980): Advanced Physical Geodesy. H. Wichmann Verlag, Karlsruhe.
 Schwarz, K. P., and G. Lachapelle (1980): Local characteristics of the gravity anomaly covariance function. Bulletin Géodésique 54 (1980), S. 21–36.