

Paper-ID: VGI\_198005



## Über die inverse Gauß-Krüger-Abbildung

Erhart Ecker <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Fachbereich Mathematik, Naturwissenschaften und Datenverarbeitung,  
Wiesenstraße 12, D-6300 Gießen*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **68** (2), S.  
71–78

1980

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Ecker_VGI_198005,  
Title = {{\U}ber die inverse Gau{\ss}-Kr{"u}ger-Abbildung},  
Author = {Ecker, Erhart},  
Journal = {{\O}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {71--78},  
Number = {2},  
Year = {1980},  
Volume = {68}  
}
```



Ich habe in der zurückliegenden Stunde versucht, die große gesellschaftspolitische Bedeutung und wohl auch segensreiche Tätigkeit der Flurbereinigung für unser Land darzustellen. Ich konnte dies natürlich zunächst nur für Bayern, teilweise für die Bundesrepublik tun. Doch bin ich überzeugt, daß meine Ausführungen durchaus auf Österreich übertragbar sind. Österreich, das von Naturschönheiten verwöhnte Land, trägt eine besondere Verpflichtung zur Erhaltung und Fortentwicklung dieser gottbegnadeten Region. Hugo von Hofmannsthal hat einmal über sein Heimatland Österreich gesagt: „Das Schöne, Gesegnete würde ohne uns in Europa, in der Welt fehlen!“ Dies war und ist meines Erachtens auch für die österreichischen Flurbereinigungsingenieure besonderer Auftrag und Verpflichtung, ihren Beitrag zur Erhaltung und Fortentwicklung dieses Schönen zu leisten. Ich darf Ihnen hierzu auch weiterhin besten Erfolg wünschen.

## Über die inverse Gauß-Krüger-Abbildung

Von *Erhart Ecker*, Gießen

### Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die inverse Gauß-Krüger-Abbildung des Rotationsellipsoides untersucht. Die dabei erforderliche Umkehrung eines elliptischen Integrals zweiter Art wird durch Reihenumkehrung vorgenommen, wofür ein eigener Algorithmus dargestellt wird.

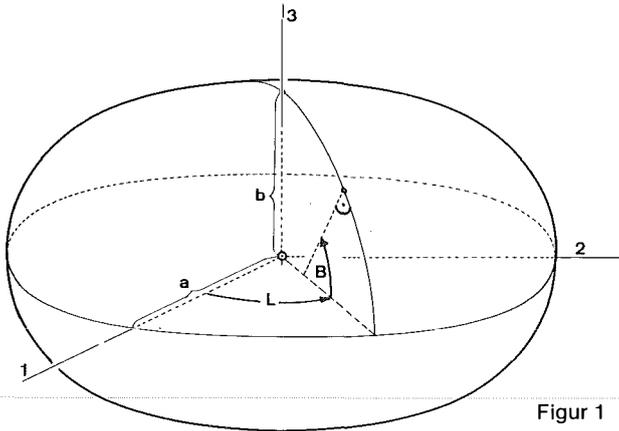
### Contents

In this paper the inverse Gauss-Krueger-mapping of an ellipsoid of revolution is discussed. This requires the inversion of an elliptic integral of second kind which is carried out by series inversion.

### 1. Einleitung

Die Gauß-Krüger-Abbildung ist als jene winkeltreue Abbildung des Rotationsellipsoides definiert, die einen bestimmten Meridian, den wir im folgenden Hauptmeridian nennen, längentreu in die Ebene abbildet. In Funktion der Mercatorvariablen  $w = q + iL$  ist die Gauß-Krüger-Abbildung darstellbar durch (Ecker, 1977, S. 114)

$$f_{GK}(w; e) = a \left\{ E\left(\frac{\pi}{2}; e\right) - E\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{b}{a} \tan g_{\mathbb{C}}^{-1} w\right); e\right) \right\}. \quad (1)$$



Figur 1

Hierin ist

a	große Halbachse,
b	kleine Halbachse,
$e = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2}$	erste numerische Exzentrizität,
L	ellipsoidische Länge,
B	ellipsoidische Breite,
q	isometrische Breite,
$w = q + iL$	Mercatorvariable,

ferner

$$E(\varphi; e) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi} \, d\psi = \int_0^{\sin \varphi} \sqrt{\frac{1 - e^2 t^2}{1 - t^2}} \, dt \quad (2)$$

das elliptische Integral 2. Art. Den speziellen Wert  $E\left(\frac{\pi}{2}; e\right) =: E(e)$  nennt man auch vollständiges elliptisches Integral zweiter Art.

Bisher nicht erwähnt wurde der Zusammenhang zwischen q und B sowie die in (1) auftretende Funktion  $g_{\mathbb{C}}^{-1}$ , was nun geschehen soll: numeriert man die Breitenkreise ( $B = \text{konstant}$ ) so durch einen neuen Parameter q um, daß die Bogenelemente entlang der Breitenkreise und Meridiane in jedem Punkt der Fläche einander gleich werden, was die Gültigkeit eines für den Punkt einheitlichen Längenmaßstabes am Ellipsoid zur Folge hat, so kommt man auf den B-q-Zusammenhang

$$g : \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, B \rightarrow g(B; e) = \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2}\right) - e \cdot \text{arth}(e \cdot \sin B). \quad (3)$$

Diese Funktion, die der ellipsoidischen die isometrische Breite zuordnet, ist für  $|e| < 1$  streng monoton steigend, also umkehrbar; es läßt sich zeigen, daß die Umkehrfunktion  $g^{-1}$  ebenso wie  $g$  selbst analytisch ist, und die analytische Fortsetzung der Umkehrfunktion ist gerade die in (1) vorkommende Funktion  $g_c^{-1}$ .

### 2. Die Umkehrung

Im folgenden suchen wir zur Gauß-Krüger-Abbildung  $f_{GK}$  die Umkehrfunktion  $f_{GK}^{-1}$ , die sich ja durch Auflösung der Gleichung

$$f_{GK}(w) = z \tag{4}$$

nach  $w$  ergeben muß:

$$w = f_{GK}^{-1}(z). \tag{4'}$$

Zunächst wollen wir eine schreibtechnische Vereinfachung verabreden: obwohl die Funktionen  $E(\cdot; e)$ ,  $g(\cdot; e)$  vom Parameter  $e$  abhängen, können wir wegen des Vorliegens eines festen Rotationsellipsoides im folgenden von der Notierung des Parameters  $e$  absehen. Dies benutzend, müssen wir gemäß (4) und (1) die Gleichung

$$a \left\{ E - E \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{b}{a} \tan g_c^{-1} w \right) \right) \right\} = z$$

nach  $w$  auflösen. Dies ist, wenn wir die Kenntnis der Umkehrfunktion des elliptischen Integrals 2. Art unterstellen, im wesentlichen eine Schreibarbeit mit dem Ergebnis

$$w = f_{GK}^{-1}(z) = g_c \left\{ \arctan \left( \frac{a}{b} \tan \left[ \frac{\pi}{2} - E^{-1} \left( E - \frac{z}{a} \right) \right] \right) \right\}. \tag{5}$$

Diese Funktion bildet das Gauß-Krüger-Bild von  $G: = \{q + iL: q > 0, -\frac{\pi}{2} < L < +\frac{\pi}{2}\}$  (oberes, offenes, zum Hauptmeridian  $L = 0$  symmetrisches Ellipsoidviertel), dem in der Gauß-Krüger-Ebene der Streifen  $\{x + iy: 0 < x < aE, y \in [R]\}$  entspricht, zurück ab auf das Gebiet  $G$  in der Mercatorebene. In (5) tritt die komplex-analytische Fortsetzung  $g_c$  der isometrischen Breite  $g$  auf; diese ist in naheliegendster Weise gegeben, indem man in (3) abgesehen von Definitions- und Wertebereich  $\ln$ ,  $\tan$ ,  $\text{arth}$  (area tangens hyperbolicus) und  $\sin$  komplex auffaßt.

Die Berechnung der inversen Gauß-Krüger-Abbildung ist also problemlos, sobald wir die Inverse des elliptischen Integrals 2. Art, vgl. (2), bilden können. Für die Umkehrung gegebener Funktionen gibt es nun drei gängige Möglichkeiten; die erste besteht darin, daß man die Umkehrfunktion mit Hilfe anderer Funktionen auszudrücken versucht, die zweite darin, die Gleichung als Fixpunktgleichung umzuschreiben und den Fixpunktsatz anzuwenden (Iterationsverfahren), und die dritte Möglichkeit besteht in der sogenannten Reihenumkehr (Knopp, 1964, S. 186). Die Möglichkeit der Reihenumkehr ist natürlich auf analytische Funktionen beschränkt. Für die vorliegende Funk-

tion  $f_{GK}$  bzw.  $E$  sind alle drei Möglichkeiten auch praktisch gangbar. In diesem Aufsatz soll der dritte Weg mit der Reihenumkehr verfolgt werden.

Nun ist, wie ein Blick auf (2) lehrt, die Potenzreihenumkehrung nicht unmittelbar auf das elliptische Integral 2. Art anwendbar; faßt man jedoch  $E(\varphi)$  mittels einer Hilfsfunktion  $h$  auf als Funktion von  $\sin\varphi$ , so kann man  $h$  in eine für  $|\sin\varphi| \leq 1$  konvergente Potenzreihe entwickeln,

$$E(\varphi) = \int_0^{\sin\varphi} \sqrt{\frac{1-e^2t^2}{1-t^2}} dt = h(\sin\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin^k \varphi, \quad (2')$$

und darauf die Reihenumkehrung anwenden. Dabei entstehen die Koeffizienten  $a_k$  in (2') durch Anwendung der Binomialreihe auf den Integranden, Reihenmultiplikation, und gliedweise Integration. Diese Herleitung bringt wenig Interessantes und verläuft standardmäßig; wir wollen sie daher übergehen und uns gleich mit dem Ergebnis auseinandersetzen:

$$a_k = \begin{cases} 0, & k = 2, 4, 6, \dots \\ (-1)^{k_0} \cdot \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k_0} \binom{1/2}{l} \binom{-1/2}{k_0-l} e^{2l}, & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (6)$$

wobei

$$k_0 = (k-1)/2$$

ganzzahlig ist. Bei der numerischen Behandlung der inversen Gauß-Krüger-Abbildung ist die Programmierung dieser Koeffizienten  $a_k$  der mit Abstand unangenehmste Teil. Es ist zweckmäßig, von folgender Darstellung der  $a_k$  für ungerade  $k$  Gebrauch zu machen:

$$a_k = (-1)^{k_0} \cdot \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k_0} \alpha_{k,l}, \quad \text{wobei } \alpha_{k,0} = \binom{-1/2}{k_0} \text{ und} \quad (6')$$

$$\frac{\alpha_{k,l+1}}{\alpha_{k,l}} = \frac{l-1/2}{l+1} \cdot \frac{k-l}{k-l-1/2} e^2, \quad l = 1, \dots, k_0 - 1.$$

Nun stellt, vgl. (2'), die Potenzreihe  $\sum a_k x^k$  ( $x = \sin\varphi$ ) im Konvergenz-kreis die Funktion  $h(x) = E(\varphi)$  dar. Die Gleichungslösung ( $a_1 \neq 0$ )

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = y \Leftrightarrow x = h^{-1}(y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k y^k$$

kann in einer gewissen Umgebung von Null durch Reihenumkehrung bewerkstelligt werden. Diese Reihenumkehr besteht darin, in

$$x = h^{-1}(y) = h^{-1}(h(x))$$

für  $h$  und  $h^{-1}$  die Potenzreihendarstellungen einzusetzen und einen Koeffizientenvergleich herbeizuführen, was die Koeffizienten  $b_k$  der Umkehrreihe in Abhängigkeit der gegebenen Koeffizienten  $a_k$  der Ausgangsreihe liefert.

### 3. Reihenumkehralgorithmus

Vorgelegt sei die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k = : h(z) \quad , \quad a_1 \neq 0 \quad , \quad (7)$$

die im Konvergenzkreis eine analytische und für  $a_1 \neq 0$  auch lokal umkehrbare Funktion  $h$  definiert. Gesucht ist die Potenzreihenentwicklung der Umkehrfunktion, also

$$h^{-1}(w) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l w^l \quad . \quad (7')$$

Es muß also gelten

$$h^{-1}(h(z)) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l [h(z)]^l = z \quad , \quad (7'')$$

woraus durch Koeffizientenvergleich die gesuchten Koeffizienten  $b_l$  aus den gegebenen Koeffizienten  $a_k$  errechenbar sind.

Für einige der ersten Indizes ist dies z. B. in (Knopp, 1964, S. 188) enthalten. Wir wollen aber die  $b_l$  sofern erforderlich für alle  $l \in \mathbb{N}$  berechnen können. Dazu führen wir die in (7'') auftretenden Potenzen  $[h(z)]^l$  mit Hilfe von (7) durch Reihenmultiplikationen aus:

$$[h(z)]^1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_{1,k} z^k \quad , \quad a_{1,k} := a_k \text{ für } k \in \mathbb{N} \quad , \quad (8-1)$$

$$\begin{aligned} [h(z)]^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{1,k} z^k \sum_{l=1}^{\infty} a_{2,l} z^l = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{1,k} a_{1,l} z^{k+l} \\ &= \sum_{m=2}^{\infty} a_{2,m} z^m \quad , \quad a_{2,m} = \sum_{k=1}^{m-1} a_{1,k} a_{1,m-k} \quad , \quad m \geq 2 \quad , \quad (8-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [h(z)]^3 &= [h(z)]^1 [h(z)]^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_{1,k} z^k \sum_{l=2}^{\infty} a_{2,l} z^l = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} a_{1,k} a_{2,l} z^{k+l} \\ &= \sum_{m=3}^{\infty} a_{3,m} z^m \quad , \quad a_{3,m} = \sum_{k=1}^{m-2} a_{1,k} a_{2,m-k} \quad , \quad m \geq 3 \quad , \quad (8-3) \end{aligned}$$

usw. Das allgemeine Ergebnis formulieren wir gleich als

Reihenumkehralgorithmus: Gegeben sei die formale Potenzreihe

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \quad , \quad a_1 \neq 0 \quad . \quad (9)$$

Dann gilt mit

$$a_{1,k} := a_k, \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{9-1}$$

für die l-te Potenz der Potenzreihe

$$[h(z)]^l = \sum_{m=l}^{\infty} a_{l,m} z^m, \quad (l \in \mathbb{N}) \tag{9-2}$$

wobei die  $a_{l,m}$  rekursiv aus

$$a_{l,m} = \sum_{k=1}^{m+1-l} a_{1,k} a_{l-1,m-k}, \quad m \geq l, \tag{9-3}$$

berechenbar sind. Für die Umkehrung gilt

$$h^{-1}(w) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l w^l, \tag{9-4}$$

wobei

$$b_l = \begin{cases} 1/a_{1,1} = 1/a_1, & l = 1 \\ -\frac{1}{a_{1,l}} \cdot \sum_{j=1}^{l-1} b_j a_{1,l-j}, & l = 2, 3, 4, \dots \end{cases} \tag{9-5}$$

im Falle  $a_1 = a_{1,1} \neq 0$  wohldefiniert ist.)

$$\begin{aligned} \text{Denn aus } h^{-1}(h(z)) &= \sum_{j=1}^{\infty} b_j [h(z)]^j = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sum_{l=j}^{\infty} a_{1,l} z^l = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^l b_j a_{1,l-j} \right) z^l = z \text{ folgt durch Koeffizientenvergleich (9-5).} \end{aligned}$$

Setzt man die bisher undefinierten  $a_{l,m}$  Null, dies ist für  $l < m$  der Fall, so kann man sich die  $a_{l,m}$  als Matrix veranschaulichen, vgl. Figur 2.

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	$a_{1,5}$	$a_{1,6}$	$a_{1,7}$	$a_{1,8}$
0							
0	0	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	$a_{3,5}$	$a_{3,6}$	$a_{3,7}$	$a_{3,8}$
0	0	0			$a_{4,6}$		
0	0	0	0				
0	0	0	0	0	$a_{6,6}$	$a_{6,7}$	$a_{6,8}$
0	0	0	0	0	0	$a_{7,7}$	$a_{7,8}$

Figur 2

1) Diese Formulierung des Reihenumkehralgorithmus wurde mir von Herrn G. Lindhorst mitgeteilt.

In der 1. Zeile stehen die Koeffizienten  $a_k = a_{1,k}$  der Ausgangsreihe, in der l-ten Zeile die Koeffizienten  $a_{l,k}$  der l-ten Potenz der Ausgangsreihe.

$$\text{Das l-te Diagonalglied ist } a_{l,l} = (a_{1,1})^l = (a_1)^l, \tag{9-3'}$$

was sogleich aus (9-3) folgt. Hieraus erkennt man die fundamentale Bedeutung von  $a_1$  für die Wohldefiniertheit des Reihenumkehralgorithmus: Ist  $a_1 \neq 0$ , so sind alle  $b_l$  berechenbar; praktisch ist es aber doch von Vorteil, wenn man es so einrichtet, daß  $a_1 = 1$  ist – die einzige im Algorithmus auftretende Division entfällt dann.

Ein beliebiges Element  $a_{l,m}$  (l-te Zeile, m-te Spalte) stellt den Koeffizienten von

$$z^m \text{ in der Darstellung von } \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_{1,k} z^k \right)^l$$

dar. Wir bekommen  $a_{l,m}$  als eine Art Inprodukt zwischen der ersten und (l-1).ten Zeile bis zur (m-1).ten = vorletzten Spalte, wobei die Besonderheit dieses Inprodukts sprachlich schwer zu formulieren, aber aus der Figur 2 und (9-3) gut ersichtlich ist. („Versetzt-gespiegelte-Inprodukt.“)

Der Reihenumkehralgorithmus wurde programmiert und für eine Reihe von Beispielen, bei denen man für Funktion und Umkehrfunktion die Reihenentwicklung an der Stelle Null kennt, getestet. Als in vielen Hinsichten kritischstes Beispiel hat sich dabei das folgende erwiesen:

$$h(z) = \ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \text{ wobei } a_k = (-1)^{k+1}/k,$$

$$h^{-1}(w) = \exp(w) - 1 = \sum_{l=1}^{\infty} b_l w^l, \text{ wobei } b_l = 1/l!$$

Der Algorithmus muß ja hierbei im Verlaufe des Rechenganges von den relativ schwach fallenden  $a_k$  zu den stark gegen Null strebenden  $b_l$  kommen; es ist z. B.  $a_{100} = -0.01$ ,  $b_{100} \approx 1.07151 \times 10^{-158}$ .

Insofern erscheint es nicht verwunderlich, daß die Koeffizientenberechnung mit doppelter Genauigkeit (an der verwendeten Cyber 174 sind dies bis zu 29 Dezimalstellen) für manche Beispiele von entscheidendem Vorteil ist.

#### 4. Tests

Die in diesem Aufsatz dargestellten Formeln wurden in ANSI-Fortran programmiert und zahlreichen Tests unterworfen, über die im folgenden noch berichtet wird. Interessierten Lesern kann auf Wunsch das Programmsystem, eine Übersicht über die Unterprogramme und je eine Plotterzeichnung des Netzes für  $f_{GK}$  und  $f_{GK}^{-1}$  zugesandt werden.

Mit dem erwähnten Programmsystem wurden im wesentlichen zwei Arten von Tests durchgeführt. Bei der ersten Testreihe wurde  $f_{GK}^{-1}(z; 0)$  mit den

Ergebnissen einer rein sphärischen Berechnung verglichen, es ist ja

$$g(B; 0) = \ln \tan \left( \frac{\tilde{r}}{4} + \frac{B}{2} \right) = q ,$$

$$w = q + iL ,$$

$$E \left( \frac{\tilde{r}}{2}; 0 \right) = \frac{\tilde{r}}{2} ,$$

$$f_{GK}(w; 0) = a \cdot g_{\mathbb{C}}(w; 0) = a \left[ 2 \arctan(e^w) - \frac{\tilde{r}}{2} \right] ,$$

$$f_{GK}^{-1}(z; 0) = g_{\mathbb{C}} \left( \frac{z}{a}; 0 \right) = \log \tan \left( \frac{\tilde{r}}{4} + \frac{z/a}{2} \right) .$$

Bei der zweiten Testreihe wurde  $f_{GK}^{-1}(f_{GK}(w)) =: \tilde{w}$  für ein Ellipsoid mit erdähnlicher Abplattung berechnet und mit der Sollgröße  $w$  verglichen. Dabei stellte sich heraus, daß das Programmsystem nur im oberen, offenen Ellipsoidviertel, also  $0 < B < \pi/2$ ,  $-\pi/2 < L < +\pi/2$ , zufriedenstellend funktioniert, obwohl die inverse Gauß-Krüger-Funktion in der vorderen, offenen Ellipsoidhälfte wohldefiniert ist.

Der Grund hierfür liegt in der Ausführung von

$$E^{-1}(u) = \arcsin(h^{-1}(u)) , \quad h^{-1}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k u^{2k+1} ,$$

vgl. (2'), wobei das Argument  $u$  gemäß (5) durch

$$u = E - \frac{z}{a}$$

gegeben ist. Hierin verhalten sich die durch Reihenumkehr gewonnenen Koeffizienten  $b_k$  im wesentlichen wie die Sinuskoeffizienten  $(-1)^k / (2k+1)!$ , im sphärischen Fall gilt  $h^{-1} = \sin$  sogar exakt. Das Argument  $u$  ist aber am und südlich des Äquators viel größer als nördlich davon, für den Nordpol wäre  $u = 0$ , für den Südpol  $u = 2E$ . Diese Situation ist ziemlich direkt vergleichbar mit dem Versuch,  $\sin(\pi)$  mittels der Taylorentwicklung in 0 zu berechnen. Man spart Rechenzeit und vermeidet Ungenauigkeiten, wenn man für die Südhalbkugel von den Symmetriebeziehungen

$$f_{GK}^{-1}(-z) = -f_{GK}^{-1}(z), \quad f_{GK}^{-1}(\bar{z}) = \overline{f_{GK}^{-1}(z)}, \quad f_{GK}^{-1}(-\bar{z}) = -\overline{f_{GK}^{-1}(z)}$$

Gebrauch macht, die natürlich auch für  $f_{GK}$  gelten.

#### Literatur

Ecker, E.: Über die Gauß-Krüger-Abbildung. ÖZfVuPh, 65. Jg./1977/Heft 3/4, S. 108 bis 117.

Ecker, E.: Conformal Mappings of the Earth Ellipsoid. Manuscripta geodaetica, Vol. 3 (1978), S. 229 bis 251.

Gradshteyn, I. S., and I. M. Ryzhik: Table of Integrals, Series and Products. Academic Press, New York, 1965.

Knopp, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Springer, Berlin, 1964.