Paper-ID: VGI_197921

Gefährliche Örter eines Trilaterations-Problems der Satellitengeodäsie

Karl Killian [1], Peter Meissl [2]

[1] *Hadikgasse 40, A-1130 Wien*
[2] *Institut für Mathematische und Numerische Geodäsie der Technischen Universität in Graz, Technikerstraße 4, A-8010 Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **67** (4), S. 191–197

1979

BibTEX:

```
@ARTICLE{Killian_VGI_197921,
Title = {Gef{\"a}hrliche {\"O}rter eines Trilaterations-Problems der
   Satellitengeod{\"a}sie},
Author = {Killian, Karl and Meissl, Peter},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen und
   Photogrammetrie},
Pages = {191--197},
Number = {4},
Year = {1979},
Volume = {67}
}
```

Gefährliche Örter eines Trilaterations-Problems der Satellitengeodäsie

Von *Karl Killian*, Wien, und *Peter Meissl*, Graz

In dieser Zeitschrift [1] S. 18 bis 20 wurde folgendes Problem gestellt, und ein Weg zur Bestimmung von Näherungskoordinaten aus einer überschüssigen Messung wurde angegeben. In dieser Arbeit werden die gefährlichen Örter dieses Problems sowie eine numerische Lösung behandelt. In Fig. 1 sind 1, 2, 3 drei mit Lasergeräten ausgerüstete Stationen der Erdoberfläche. Ihre Lagen sind unbekannt, und zwischen ihnen besteht keine Sicht. A (x,y,z), A' (x',y',z'); B (u,v,w), B' (u',v',w') und C (ξ,η,ζ) und C' (ξ',η',ζ') ist ein Satellitenpaar in drei verschiedenen unbekannten Lagen.

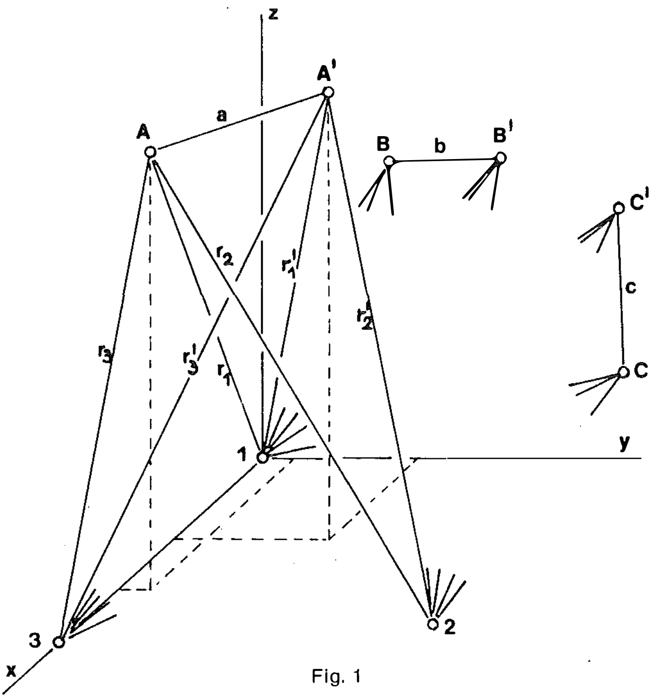

Fig. 1

Die für dieses Problem notwendigen Messungen können praktisch nicht gleichzeitig erfolgen. Sie werden daher quasi-simultan ausgeführt: In jeder der drei Lagen des Satellitenpaares werden von den drei Stationen aus die sechs Entfernungen zu beiden Satelliten laufend gemessen. Außerdem werden die Entfernungen a,b,c der beiden Satelliten laufend gemessen. Da zu allen Messungen die zugeordneten Zeitpunkte registriert werden, können alle Messungen auf gewählte Zeitpunkte reduziert werden.

Zur Auffindung der gefährlichen Örter des Problems beantworten wir zunächst die Frage: Wie ändern sich die Koordinaten von A, wenn sich die Koordinaten von den Punkten 2 und 3 ändern?

Die Satelliten liegen immer in den Schnittpunkten von drei Kugeln mit den Mittelpunkten 1, 2, 3 und den gemessenen Radien. Die Gleichungen dieser Kugeln für Punkt A sind:

$$x^2+y^2+z^2 = r_1^2 \qquad 1)$$
$$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+z^2 = r_2^2 \qquad 2)$$
$$(x-x_3)^2+y^2+z^2 = r_3^2 \qquad 3)$$

Die Differentiation dieser Gleichungen ergibt:

$$x\,dx+y\,dy+z\,dz = 0 \qquad 1a)$$
$$(x-x_2)(dx-dx_2)+(y-y_2)(dy-dy_2)+z\,dz = 0 \qquad 2a)$$
$$(x-x_3)(dx-dx_3)+y\,dy+z\,dz = 0 \qquad 3a)$$

Aus 1a)–3a) folgt:

$$x\,dx-(x-x_3)\,dx+(x-x_3)\,dx_3 = 0$$

und somit

$$dx = \frac{1}{x_3}(x_3-x)\,dx_3 \qquad 4)$$

Aus 1a)–2a) folgt:

$$x\,dx-(x-x_2)(dx-dx_2)+y\,dy-(y-y_2)(dy-dy_2) = 0$$

Setzt man dx aus Gl. 4) ein und drückt man auch dx_2 und dy_2 durch dx_3 aus, indem man setzt: $dx_2 = \alpha\,dx_3$, $dy_2 = \beta\,dx_3$, wobei α und β beliebige Zahlen sind, so folgt:

$$dy = \frac{1}{y_2}\left[(x_2-x)\,\alpha+(y_2-y)\,\beta-\frac{x_2}{x_3}(x_3-x)\right]dx_3 \qquad 5)$$

Aus 1a) folgt:

$dz = -\frac{1}{z}(x\,dx+y\,dy)$, und durch Einsetzen von dx und dy aus 4) und 5):

$$dz = -\frac{1}{z}\left\{\frac{x}{x_3}(x_3-x)+\frac{y}{y_2}\left[(x_2-x)\,\alpha+(y_2-y)\,\beta-\frac{x_2}{x_3}(x_3-x)\right]\right\}dx_3 \qquad 6)$$

Analog ergeben sich die Änderungen der Koordinaten des Punktes A'

$$dx' = \frac{1}{x_3}(x_3-x')\,dx_3 \qquad 4')$$
$$dy' = \frac{1}{y_2}\left[(x_2-x')\,\alpha+(y_2-y')\,\beta-\frac{x_2}{x_3}(x_3-x')\right]dx_3 \qquad 5')$$
$$dz' = -\frac{1}{z'}\left\{\frac{x'}{x_3}(x_3-x')+\frac{y'}{y_2}\left[(x_2-x')\,\alpha+(y_2-y')\,\beta-\frac{x_2}{x_3}(x_3-x')\right]\right\}dx_3 \qquad 6')$$

In [1] S. 19 sind die Beziehungen abgeleitet, die zwischen den Koordinaten der Satellitenpaare bestehen:

$$xx'+yy'+zz' = C_1$$
$$uu'+vv'+ww' = C_2$$
$$\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta' = C_3$$

Die erste dieser Beziehungen folgt durch Kombinieren der Gleichungen $x^2+y^2+z^2 = r_1{}^2$, $x'^2+y'^2+z'^2 = r'_1{}^2$, $(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2 = a^2$.

Differenziert man die erste dieser Gleichungen, so folgt:
$x\,dx'+x'\,dx+y\,dy'+y'\,dy+z\,dz'+z'\,dz = 0$

Setzt man aus den Gleichungen 4) 5) 6) und 4') 5') 6') die Differentiale ein und hebt man α und β heraus, so ergibt sich:

$$\frac{1}{y_2}[(x_2-x')(y-\frac{z}{z'}y')+(x_2-x)(y'-\frac{z'}{z}y)]\,\alpha+$$
$$\frac{1}{y_2}[(y_2-y')(y-\frac{z}{z'}y')+(y_2-y)(y'-\frac{z'}{z}y)]\,\beta+$$
$$+\frac{1}{x_3}[(x_3-x')(x-\frac{y}{y_2}x_2-\frac{z}{z'}x'+\frac{z}{z'}\frac{y'}{y_2}x_2)+(x_3-x)(x'-\frac{y'}{y_2}x_2-\frac{z'}{z}x+\frac{z'}{z}\frac{y}{y_2}x_2)$$
$$= 0 \quad \ldots\ldots \quad 7)$$

Bezeichnet man die Koeffizienten von α und β mit a_0 bzw. b_0 und den letzten Term mit c_0, so folgt:
$$a_0\alpha+b_0\beta+c_0 = 0 \quad \ldots\ldots \quad 8)$$

Für die anderen Lagen des Satellitenpaares bestehen die analogen Gleichungen:
$$a_1\alpha+b_1\beta+c_1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad 9)$$
$$a_2\alpha+b_2\beta+c_2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad 10)$$

Wir fassen α und β als zwei Unbekannte auf, für die also drei Gleichungen bestehen. Ihre Verträglichkeitsbedingung lautet bekanntlich

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots \quad 11)$$

Wir denken uns nun die drei Standpunkte 1, 2, 3 sowie fünf Zielpunkte, und zwar A', B, B', C, C' fest und fragen nach der Lage des Zielpunktes A, dessen Koordinaten die Gleichung 11) befriedigen. Wir können auch sagen, wir halten die drei Standpunkte und vier Zielpunkte, und zwar B, B', C, C' fest und fragen nach den Zielpunkten A, A', deren Koordinaten die Gleichung 11) befriedigen. In beiden Fällen weisen die zweite und dritte Zeile nur konstante Größen auf.

Sind A, B, C die Unterdeterminanten zu den Elementen der ersten Zeile, so folgt:
$$a_0A-b_0B+c_0C = 0$$
$$A\frac{1}{y_2}[(x_2-x')(y-\frac{z}{z'}y')+(x_2-x)(y'-\frac{z'}{z}y)]-B\frac{1}{y_2}[(y_2-y')(y-\frac{z}{z'}y')+$$
$$+(y_2-y)(y'-\frac{z'}{z}y)]+C\frac{1}{x_3}[(x_3-x')(x-\frac{y}{y_2}x_2-\frac{z}{z'}x'+\frac{z}{z'}\frac{y'}{y_2}x_2)+$$
$$+(x_3-x)(x'-\frac{y'}{y_2}x_2-\frac{z'}{z}x+\frac{y}{y_2}\frac{z'}{z}x_2)] = 0 \quad \ldots\ldots \quad 12)$$

Hält man die drei Standpunkte und die genannten fünf Zielpunkte fest, so sind in dieser Gleichung alle Größen außer x,y,z konstant. Fassen wir die Konstanten zusammen, so folgt:

$$K_1 x^2 + K_2 y^2 + K_3 z^2 + K_4 xy + K_5 yz + K_6 xz + K_7 x + K_8 y + K_9 z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 13)$$

Das ist die Gleichung einer Fläche 2. Ordnung. Diese Gleichung weist keine Konstante auf, und die Fläche geht daher durch den Ursprung des Koordinatensystems ($x = y = z = 0$ befriedigt diese Gleichung). Da der Standpunkt 1 mit dem Ursprung zusammenfällt, geht die Fläche auch durch die Standpunkte 2 und 3, denn diese machen gegenüber 1 keine Ausnahme.

Um weitere Eigenschaften dieser Fläche 2. Ordnung zu finden, legen wir durch Punkt 1 (= Koordinatenursprung) und A' (x',y',z') eine Gerade. Sind x,y,z die laufenden Koordinaten dieser Geraden, so ist:

$$x : x' = y : y' = z : z' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 14)$$

Daraus folgt, daß alle Ausdrücke von der Form $(x - \frac{z}{z'} x')$, $(x' - \frac{z'}{z} x)$, $(y - \frac{z}{z'} y')$, $(y' - \frac{z'}{z} y)$ verschwinden.

Die Gleichung 12) wird daher von allen Punkten der Geraden befriedigt, d. h. die Gerade durch 1 und A' liegt in der gesuchten Fläche 2. Ordnung. Da die Punkte 2 und 3 keine Ausnahme gegenüber Punkt 1 machen, gehören auch die Geraden durch 2 und A' bzw. 3 und A' dieser Fläche an. Die gesuchte Fläche ist somit ein Kegel 2. Ordnung mit der Spitze in A'. Diese Fläche schneidet die durch die drei Standpunkte bestimmte Ebene in einer Kurve 2. Ordnung, die durch die drei Standpunkte geht.

Wir stellen die Frage, ob sich dieselbe Kurve auch dann ergibt, wenn wir die Punkte B bzw. C die Rolle des Punktes A spielen lassen, wobei wir wieder analog die anderen Punkte festhalten. Zur Beantwortung dieser Frage nehmen wir eine bestimmte gefährliche Lage der Punkte 1,2,3, A,A', B,B', C,C' als gegeben an. Zu dieser gefährlichen Lage gehören dann gewisse Werte von α,β, die man aus 8), 9), 10) berechnen kann. Variiert man nun A auf der Oberfläche des Kegels, so bleibt die Lage gefährlich und es bleiben auch α,β unverändert. Diese Größen kann man nämlich aus 9) 10) alleine berechnen, solange die Determinante 11) verschwindet. Wir sehen demnach, daß die Gleichung des Kegels bereits durch 8) bzw. 7) gegeben ist, wenn man für α,β die erwähnten Werte einsetzt. Nun bringen wir den Kegel mit der xy-Ebene (= Standpunktebene) zum Schnitt. Dazu multiplizieren wir 7) mit $z : z'$ und setzen dann $z = 0$. Es folgt:

$$-\frac{1}{y_2}(x_2 - x)\, y\, \alpha - \frac{1}{y_2}(y_2 - y)\, y\, \beta - \frac{1}{x_3}\left[(x_3 - x)\, x - \frac{y}{y_2} x_2\right] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 15)$$

Die Koeffizienten dieser Gleichung sind nur mehr über α,β von A' = (x',y',z') abhängig. Die Größen α,β sind aber für eine bestimmte gefährliche

Konfiguration charakteristisch. Läßt man nun B,B' bzw. C,C' die Rolle von A,A' spielen, so ergibt sich dieselbe Gleichung 15) mit denselben Werten von α,β. Damit ist die oben gestellte Frage im positiven Sinne beantwortet. Die Kegel zu B,B' bzw. C,C' schneiden die xy-Ebene in derselben Kurve 2. Ordnung.

Zusammenfassend ergibt sich aus diesen Überlegungen folgender Satz (Fig. 2):

Ein gefährlicher Fall unseres Problems liegt dann vor, wenn die drei Standpunkte und die drei Schnittpunkte der durch je ein Satellitenpaar bestimmten Geraden mit der Standpunktebene einer Kurve 2. Ordnung angehören, oder anders gesagt, wenn diese sechs Punkte ein Pascalsches Sechseck bilden.

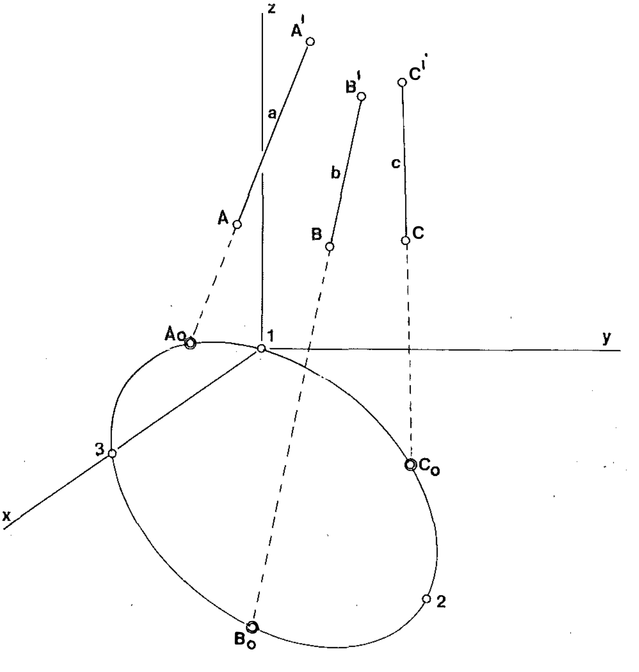

Fig.2

Dieser Satz kann auch lediglich aus der Anschauung, und zwar durch Rückführung auf das bekannte 3,3-Problem (siehe z. B. [2] S. 72) gefunden werden: Liegt kein gefährlicher Fall vor, so können die Lagen der drei Standpunkte und die der sechs Satellitenpunkte relativ zueinander bestimmt werden. Daher können auch die drei Schnittpunkte der genannten Geraden mit der Standpunktebene bestimmt werden.

Liegt jedoch ein gefährlicher Fall vor und würden außer den gemessenen Größen auch noch die Distanzen a_0,b_0,c_0 der Satelliten von den zu bestimmenden Schnittpunkten fehlerfrei gegeben sein (Fig. 3) – es wären damit auch die entsprechenden neun Entfernungen der Stand- und Schnittpunkte berechenbar –, so könnte dennoch die relative Lage der in der xy-Ebene gelegenen Stand- und Schnittpunkte nicht genügend genau bestimmt werden; denn es liegt sodann der gefährliche Ort des 3,3-Problems vor.

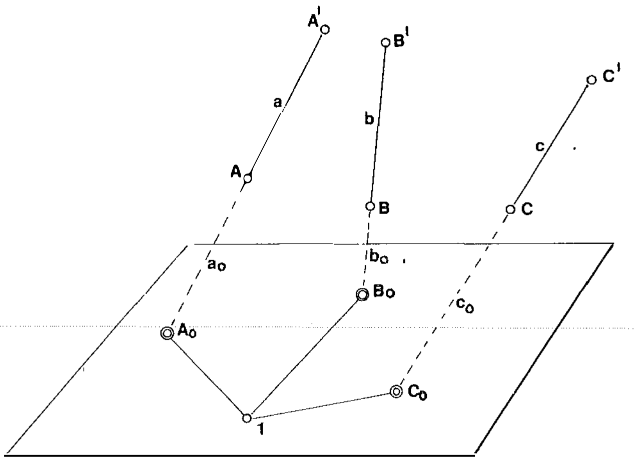

Fig. 3

Weitere Eigenschaften der gefährlichen Örter, die bei speziellen Lagen des Satellitenpaares auftreten, werden an dieser Stelle nicht untersucht.

Ergänzend sei noch bemerkt, daß die Gleichungen 8) 9) 10) noch in anderer Weise verwendet werden können:

Die numerische Lösung dieses Problems und sehr vieler anderer Probleme geht von Näherungslösungen aus. Die Näherungslösungen können beschafft werden, entweder durch Überbestimmung [1] oder durch Messung anderer Größen, z. B. durch geographische Ortsbestimmung der drei Standpunkte.

Aus den oben genannten Beziehungen: $dx_2 = \alpha dx_3$, $dy_2 = \beta dx_3$ setzen wir α und β in die Gleichungen 8) 9) 10) ein und erhalten

$a_0\, dx_2 + b_0\, dy_2 + c_0\, dx_3 = 0$ .... 8a)
$a_1\, dx_2 + b_1\, dy_2 + c_0\, dx_3 = 0$ .... 9a)
$a_2\, dx_2 + b_2\, dy_2 + c_0\, dx_3 = 0$ .... 10a)

In dieser Form gelten die Gleichungen bei widerspruchsfreier Übereinstimmung von Näherungskoordinaten und Distanzmessungen. Im allgemeinen sind jedoch die Nullen auf der rechten Seite von 8a), 9a), 10a) durch Widersprüche zu ersetzen, deren Berechnung so erfolgt, wie dies von nichtlinearen Ausgleichsproblemen her geläufig ist. Die Berechnung der Widersprüche wird besonders einfach, wenn man ausgehend von genäherten Stationskoordinaten die Näherungswerte der Satellitenörter durch Bogenschnitt mittels der Distanzen r_1, r_2, r_3, r_1', r_2', r_3' usw. bestimmt. Wie man leicht nachrechnet, wird dann Gleichung 8a) zu

$$a_0\, dx_2 + b_0\, dy_2 + c_0\, dx_3 = \frac{1}{2}[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 - a^2] \qquad 8b)$$

Dabei sind x,y,z, x',y',z' als Näherungswerte für A,A' anzusehen, während a wie früher die gemessene Distanz zwischen A,A' bezeichnet. Sinngemäß ergeben sich 2 weitere Gleichungen 9b), 10b).

Dieser Vorgang zur wesentlichen Verbesserung der Näherungswerte kann analog für zahlreiche Aufgaben angewandt werden. So können z. B. die in [2] angeführten Trilaterationsprobleme ganz analog behandelt werden. Wenn nötig, wird mit den verbesserten Werten der Vorgang wiederholt.

Für zwei Unbekannte ist dieses Verfahren unter dem Namen Näherungsverfahren von Newton aus der Elementarmathematik bekannt. Für mehrere Unbekannte wird dieses Verfahren in der praktischen Analysis ebenfalls Verfahren von Newton bzw. von Newton-Raphson genannt [3].

Literatur

[1] *Killian, K.:* Zur Lösung geometrisch überbestimmter Probleme II. Beispiele. ÖZfVuPh., 67. Jahrgang (1979), Heft 1.

[2] *Killian, K./P. Meissl:* Einige Grundaufgaben der räumlichen Trilateration und ihre gefährlichen Örter. In: K. Rinner, K. Killian, P. Meissl: „Beiträge zur Theorie der geod. Netze im Raum." Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe A, Heft 61 (1969).

[3] *Willers, F. A.:* Methoden der praktischen Analysis, de-Gruyter-Lehrbuch, 4. Auflage, S. 267 (1971).

Fremde Bauführung und Kataster

Von *Leopold Krepper,* Baden

Die Bestimmung des § 44 des Vermessungsgesetzes (VermG) verpflichtet die Grundeigentümer und die Nutzungsberechtigten, dem Vermessungsamt Änderungen von Grenzen gemäß § 418 ABGB zu melden. Derartige Grenzänderungen entstehen, wenn bei der Errichtung eines Gebäudes über die Grenze gebaut wird und der Bauführer dadurch Eigentum am überbauten Teil des Nachbargrundstückes erwirbt. Für Organe des Bundesvermessungsdienstes und für Vermessungsbefugte ist daher die Frage von Interesse, wie sich durch die Bauführung auf fremdem Grund die Eigentumsverhältnisse am Grund und Boden und dem darauf stehenden Gebäude gestalten und welche Folgerungen sich daraus für den Grenzkataster und für den Grundsteuerkataster ergeben.