



## Ein neues EDV-Programm für die Berechnung ellipsoidischer und geoidischer Höhen und für die Reduktion elektronisch gemessener Schrägstrecken

Josef Zeger<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Abteilung K 3 – Triangulierung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, Friedrich Schmidt-Platz Nr. 3, A-1082 Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **67** (1), S. 42–47

1979

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Zeger_VGI_197906,  
Title = {Ein neues EDV-Programm für die Berechnung ellipsoidischer und  
geoidischer Höhen und für die Reduktion elektronisch gemessener  
Schrägstrecken},  
Author = {Zeger, Josef},  
Journal = {{Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {42--47},  
Number = {1},  
Year = {1979},  
Volume = {67}  
}
```



[3] *Dingeldey, F.*: Kegelschnitte und Kegelschnittssysteme. Enzykl. Math. Wiss. III C1.

[4] *Wunderlich, W.*: Über gefährliche Annahmen beim Clausenschen und Lambertschen Achtpunktproblem. Sitzgsber. Bayer. Akad. Wiss. 1978, 23–46.

### Summary

For Lambert's classical six-point problem, which recently is gaining a certain interest in the domain of Marine Geodesy, the author exposes a linear graphical construction and the corresponding trigonometric solution. Furthermore he shows, as well by synthetic as by analytic developments, that critical cases of the problem occur if and only if the six points belong to a conic (which may split into a pair of straight lines). Even when the number of points is arbitrarily augmented, the problem (which then is overdetermined) possesses an infinite continuous set of solutions, if all points are situated on the critical conic.

## **Ein neues EDV-Programm für die Berechnung ellipsoidischer und geoidischer Höhen und für die Reduktion elektronisch gemessener Schrägstrecken**

*Von Josef Zeger, Wien*

Aufbauend auf den Grundsätzen und Formeln, die im Sonderheft 32 der ÖZfVuPh entwickelt wurden, hat die Triangulierungsabteilung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen in Wien eine Programmierungsgrundlage zusammengestellt, die von der Abteilung für Elektronische Datenverarbeitung als neues Rechenprogramm realisiert wurde.

Wie in [1] ausführlich dargelegt wurde, ist die bisherige Art der Höhenberechnung und der Reduktion der elektronisch gemessenen Schrägstrecken in vielen Fällen nicht befriedigend. Dieses neue Rechenprogramm bietet nun die Möglichkeit einer besseren Höhenberechnung und einer richtigeren Reduktion der Strecken. Es besteht aus mehreren Programmteilen.

Im ersten Teil werden vorläufige Höhenunterschiede berechnet und in einem Ausgleichsverfahren Refraktionsänderungen und Lotabweichungskomponenten ermittelt. Für die Berechnung der Höhenunterschiede werden, wenn vorhanden, grundsätzlich die zugeordneten gemessenen Schrägstrecken verwendet. Nur in jenen Fällen, wo einer Höhenwinkelmessung keine gemessene Schrägstrecke zugeordnet werden kann, erfolgt die Berechnung der vorläufigen und später auch der ellipsoidischen Höhenunterschiede mit aus Koordinaten abgeleiteten Horizontalstrecken. Um dies durchführen zu können, wird als grundsätzliche Voraussetzung die Angabe von

guten vorläufigen Koordinaten für alle in einer Berechnungsgruppe enthaltenen Stand- und Zielpunkte sowie die Bekanntgabe von vorläufigen Höhen für alle Festpunkte verlangt. Die Instrument- und Zielhöhen der Höhenwinkel- und auch der Streckenmessung sind auf den jeweiligen Hauptpunkt eines jeden Festpunktes bezogen anzugeben. Liegen Streckenmessungen vor, werden die zugehörigen Höhenwinkel auf die Höhenbezugspunkte der Streckenmessung reduziert. Für jene Standpunkte, von denen bereits Lotabweichungskomponenten vorgegeben sind, werden auch die den einzelnen Höhenwinkeln entsprechenden Lotabweichungsanteile  $\varepsilon$  berechnet und bereits bei der Ermittlung der vorläufigen Höhenunterschiede berücksichtigt. Für die Berücksichtigung der Refraktionseinflüsse wird vorerst der Refraktionskoeffizient nach *Harti* zugrundegelegt.

Die Summe der ellipsoidischen Höhenunterschiede aus Hin- und Rückmessung sollte bei fehlerfreier Beobachtung und richtiger Berücksichtigung der Refraktion und Lotabweichung gleich Null sein. Es stellen somit die Summen der vorläufigen Höhenunterschiede aus Hin- und Rückmessung die Widersprüche der Fehlergleichungen dar, aus denen die Normalgleichungen zur Ermittlung der gewünschten Refraktionsänderungen und Lotabweichungskomponenten gebildet werden.

An sich müßte man ja für jede einzelne Höhenwinkelmessung den zugehörigen Refraktionseinfluß ermitteln. Auf rechnerischer Grundlage im Zuge eines Ausgleichungsverfahrens ist dies praktisch unmöglich, da auf diese Weise mehr Unbekannte zu bestimmen wären als Beobachtungen vorliegen. Es müssen daher immer mehrere Höhenwinkel, die unter annähernd gleichen Bedingungen gemessen worden sind, jeweils einer Refraktionsunbekannten zugeordnet werden. Für mindestens zwei Punkte einer Berechnungsgruppe müssen auch die Lotabweichungskomponenten  $\xi$  und  $\eta$  bekannt sein. Anzustreben wäre allerdings, vor dieser Ausgleichung für möglichst viele Punkte einer Berechnungsgruppe die Lotabweichungskomponenten als bereits bekannt einführen zu können, entweder abgeleitet aus astronomischen Messungen oder wenigstens interpolierte Werte. Wie die in [1] durchgeführte Berechnung von Lotabweichungskomponenten im Wege einer solchen Ausgleichung gezeigt hat, besitzen die daraus resultierenden Werte eine relativ große Unsicherheit.

Durch Refraktionsnummern erfolgt die Zuordnung der gemessenen Höhenwinkel zu den zu ermittelnden Refraktionsunbekannten, durch anzugebende Lotabweichungsnummern werden die Punkte gekennzeichnet, für welche Lotabweichungskomponenten zu berechnen sind.

Werden weder Refraktionsnummern noch Lotabweichungsnummern angeführt und sind auch keine Lotabweichungskomponenten vorgegeben, erfolgt mit diesem Programm eine elektronische Höhenberechnung unter Anwendung der *Harti*-Refraktion wie bei der bisher durchgeführten Art der Höhenberechnung, jedoch mit einer strengen Ausgleichung der Höhen.

Für diesen Teil der Berechnung werden ausschließlich gegenseitig vorliegende Höhenwinkelmessungen verwendet. Nur einseitig gemessene Höhenwinkel werden zwar in die Berechnung der vorläufigen Höhenunterschiede einbezogen, aber als „nicht verwendet“ ausgewiesen. Im Verlaufe eines Fehlersuchprogrammes werden fehlerhafte Beobachtungen vor Durchführung der Ausglei chung ausgeschlossen.

Im nächsten Programmteil erfolgt die Berechnung der ellipsoidischen Höhenunterschiede unter Verwendung der Ergebnisse der vorangegangenen Ausglei chung zur Ermittlung der Refraktionsänderungen und Lotabweichungskomponenten. Anschließend werden in einem zweiten Ausglei chungsverfahren die ellipsoidischen Höhen berechnet. Vor der Berechnung der ellipsoidischen Höhenunterschiede wird jeder gemessene Höhenwinkel mit dem aus der Ausglei chung resultierenden Refraktionskoeffizienten und dem zugehörigen Lotabweichungsanteil reduziert. Mit diesen auf das Ellipsoid reduzierten Höhenwinkeln werden die ellipsoidischen Höhenunterschiede berechnet. Auch hier wird, wie bereits erwähnt, eine vorhandene gemessene Schrägstrecke grundsätzlich für die Höhenunterschiedsberechnung herangezogen.

Für die Berechnung der ellipsoidischen Höhen muß mindestens von einem Punkt eine ellipsoidische Höhe vorgegeben sein. Da derzeit in Österreich noch kein eigenes einheitliches ellipsoidisches Höhensystem vorliegt, können mit diesem Teil des Höhenprogrammes einstweilen nur lokale ellipsoidische Höhen berechnet werden, die in erster Linie für die Reduktion der gemessenen Schrägstrecken von Bedeutung sind.

Im allgemeinen wird somit derzeit in jeder Berechnungsgruppe nur für einen einzigen Punkt eine ellipsoidische Höhe vorgegeben sein, meist auf der Grundlage, daß eine gegebene Meereshöhe als lokale ellipsoidische Höhe übernommen wird. Erst wenn ein einheitliches ellipsoidisches Höhensystem für ganz Österreich vorliegt, kann eine echte Einrechnung in dieses System erfolgen. Dann werden jeweils auch für mehrere Punkte ellipsoidische Höhen vorgegeben sein.

In diesem Teil der Höhenberechnung werden auch nur einseitig vorliegende Höhenwinkelmessungen ohne Rückmessung mit verwendet. Ausgehend von den Punkten mit gegebener ellipsoidischer Höhe werden unter Verwendung eines jeden einzelnen aus einer Höhenwinkelmessung abgeleiteten ellipsoidischen Höhenunterschiedes sogenannte Einzelhöhen der Neupunkte berechnet. Auf diese Weise entstehen von jedem Neupunkt eine Reihe von Einzelhöhen, die unter Verwendung einer Fehlergrenze überprüft werden. Anschließend erfolgt eine Mittelung. Die Einzelhöhen werden dann nochmals in bezug auf dieses Mittel überprüft. Dieser gesamte Vorgang wird so lange fortgesetzt, bis von jedem Neupunkt eine vorläufige ellipsoidische Höhe vorliegt und bis jeder einzelne Höhenunterschied überprüft werden

konnte. Als fehlerhaft erklärte Höhenunterschiede werden aus der weiteren Berechnung ausgeschlossen.

Es folgt die Aufstellung der Fehlergleichungen, anschließend die Bildung und Auflösung der Normalgleichungen, woraus die ausgeglichenen ellipsoidischen Höhen der Neupunkte mit ihren mittleren Fehlern resultieren.

Im dritten Programmteil werden die in der Berechnungsgruppe enthaltenen elektronisch gemessenen Schrägstrecken reduziert, je nach der Situation unter Verwendung der ellipsoidisch reduzierten Höhenwinkel oder mit Hilfe der aus den ausgeglichenen ellipsoidischen Höhen abgeleiteten ellipsoidischen Höhenunterschiede, falls keine zugeordnete Höhenwinkelmessung vorliegt. Da, wie bereits erwähnt, von allen in der Berechnungsgruppe enthaltenen Stand- und Zielpunkten Koordinaten als Angabe vorliegen müssen, werden als Endergebnis die konform reduzierten Strecken in der Rechenfläche ausgewiesen.

Im vierten und letzten Programmteil werden die geoidischen Höhen der Neupunkte berechnet. Hier kommen allerdings einige wesentliche Unterschiede gegenüber der Berechnung der ellipsoidischen Höhen zum Tragen.

Ein wesentlicher Unterschied besteht darin, daß ausschließlich nur gegenseitig vorhandene Höhenwinkelmessungen zur Berechnung von geoidischen Höhen herangezogen werden, da nach dem in [1] erwähnten Näherungsverfahren nur der Mittelwert der Höhenunterschiede aus Hin- und Rückmessung als gute Näherung für den geoidischen Höhenunterschied angesehen werden kann, allerdings nur dann, und das ist der zweite wesentliche Unterschied, wenn für die Höhenunterschiedsberechnung eine von der Rechenfläche unabhängige schräge Raumstrecke verwendet wird. Liegt keine elektronisch gemessene Schrägstrecke vor, wird für die Höhenunterschiedsberechnung aus Koordinaten eine Horizontalstrecke errechnet, die anschließend unter Verwendung der vorher ermittelten ellipsoidischen Höhen in eine von der Rechenfläche unabhängige schräge Raumstrecke verwandelt wird.

Der gemessene Höhenwinkel ist beim Vorhandensein einer gemessenen Schrägstrecke auf die Höhenbezugspunkte der Streckenmessung ja bereits anlässlich der Berechnung der vorläufigen Höhenunterschiede reduziert worden. In allen anderen Fällen wird die errechnete schräge Raumstrecke auf die vorhandene Höhenwinkelmessung bezogen, und zwar auf die Instrumentenkipkachse und den Zielpunkt der Höhenwinkelmessung. Die Höhenwinkel werden weiters wohl bezüglich der aus der ersten Ausgleichung resultierenden Refraktionskoeffizienten korrigiert, hingegen darf hier aber nicht die Lotabweichung berücksichtigt werden.

Die so errechneten Höhenunterschiede aus Hin- und Rückmessung werden nach einer Überprüfung mittels einer Fehlergrenze gemittelt. Diese Mittelwerte stellen gute Näherungswerte für die geoidischen Höhenunterschiede dar und sie sind die Grundlage für die nachfolgenden Berechnungen.

In ähnlicher Art und Weise wie bei der Berechnung der ellipsoidischen Höhen werden für die Neupunkte, ausgehend von den Punkten mit vorgegebenen geoidischen Höhen, unter Verwendung dieser Mittelwerte der Höhenunterschiede aus Hin- und Rückmessung Einzelhöhen berechnet. Diese werden anschließend überprüft und gemittelt. So werden schrittweise die vorläufigen geoidischen Höhen aller Punkte ermittelt. Diese bilden die Ausgangswerte für die nachfolgende Ausgleichung, deren Ergebnis die ausgeglichenen geoidischen Höhen der Neupunkte mit ihren mittleren Fehlern sind.

Allerdings stehen derzeit auch noch keine echten geoidischen Höhen als Ausgangshöhen zur Verfügung, sondern nur die Meereshöhen des österreichischen Gebrauchshöhennetzes.

In einer entsprechend gestalteten Tabellierung werden die Ergebnisse der Berechnungen aus den einzelnen Programmteilen zusammengestellt.

Dieses Höhenprogramm hat derzeit noch einen großen Nachteil, es müssen für seine Anwendung die Angaben in einer eigenen Vorschreibung zusammengestellt und erfaßt werden. Es ist jetzt noch keine Kombination mit der Vorschreibung für das im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen als „EDV-Netz 77“ bezeichnete und in [2] ausführlich beschriebene neue umfassende Netzprogramm möglich. Dies aus mehreren Gründen. Es besteht derzeit weder ein echtes geoidisches Höhensystem noch ein das gesamte Bundesgebiet umfassendes ellipsoidisches Höhensystem. Weiters ist derzeit auch erst für wenige Punkte unseres Festpunktfeldes eine Lotabweichung bekannt. Es ist daher nicht in allen Fällen die Anwendung dieses Höhenprogrammes eine Voraussetzung für eine gesicherte Lageberechnung. Im Flachland werden die nach der konventionellen Methode im „EDV-Netz 77“ reduzierten Strecken in voll und ganz ausreichender Genauigkeit vorliegen. Anders liegt jedoch die Situation im Bergland. Dort müßten zwar die gemessenen Schrägstrecken, vor allem bei steileren Visuren, entsprechend den in [1] niedergelegten Grundsätzen reduziert werden, doch es fehlen vielfach noch die hierfür notwendigen Lotabweichungen, so daß also auch in diesen Fällen die Anwendung des Höhenprogrammes noch nicht allgemein möglich ist.

Ein weiterer Grund dafür, daß die Kombination dieser beiden Programme derzeit nicht einmal noch vorgesehen ist, liegt darin, daß fallweise auch in lagemäßig bereits seit längerem gegebenen Gebieten im Nachhinein eine Höhenberechnung mit diesem Programm durchgeführt werden muß. In diesen Fällen ist dann das Netzprogramm als Vorprogramm hinfällig.

In der Zukunft wird wohl einmal eine Verbindung dieser beiden Programmgruppen erfolgen. Dann allerdings unter der Berücksichtigung der Erfahrungen, die man bis dahin mit der praktischen Anwendung der beiden Programmgruppen gemacht hat.

Augenblicklich ist die Situation noch so, daß das soeben fertiggestellte Höhenprogramm vorerst noch richtig durchgetestet werden muß. Dann erst wird es für die allgemeine Anwendung freigegeben. Sinnvoll kann dieses

Programm nur dann angewendet werden, wenn für möglichst viele Punkte Lotabweichungsmessungen vorliegen. Dies ist eine Voraussetzung, die man im Bergland als unbedingt notwendig wird zur Kenntnis nehmen müssen, will man nicht gute Streckenmessungen mit einem Fehler im Bereich von wenigen Zentimetern durch eine mangelhafte Reduktion in einem Ausmaß bis in den Dezimeterbereich verfälschen. Dies aber bereits bei Strecken im Netz der Triangulierung 5. Ordnung! Wie sich bei dem in [1] angeführten Testnetz gezeigt hat, haben dort auch die Richtungen im Netz 5. Ordnung als Folge der Lotabweichungen Korrekturen bis zu rund  $\pm 20''$  erhalten.

In einem Fall, wo die Anwendung des neuen Höhenprogrammes notwendig ist, besteht derzeit folgender Berechnungsgang: Vorerst wird mit dem Programm „EDV-Netz 77“ eine erste Lageberechnung und die Berechnung von vorläufigen Höhen durchgeführt. Mit dem neuen Höhenprogramm erfolgt die endgültige Höhenberechnung und die richtige Reduktion der elektronisch gemessenen Schrägstrecken. Im Anschluß daran werden die richtig reduzierten Strecken in das Programm „EDV-Netz 77“ übernommen und es erfolgt die Berechnung der endgültigen Koordinaten der Neupunkte.

#### Literaturhinweise

[1] Zeger, J.: Untersuchungen über die trigonometrische Höhenmessung und die Horizon-  
tierung von schräg gemessenen Strecken. Sonderheft 32 der ÖZfVuPh, Wien 1978.

[2] Meissl, P., und Stübenvoll, K.: Ein Computer-Programmsystem zur Verdichtung trigono-  
metrischer Netze. Allgemeine Beschreibung und Benutzeranleitung. Mitteilungen der geodäti-  
schen Institute der Technischen Universität Graz, Folge 25, Graz 1977.

### Berichtigung

Im Aufsatz „Staatsgrenze Österreich–Italien. Neuvermessung und Dokumentation“ von K. Mikulits im Heft 3/1978 der ÖZfVuPh., 66. Jahrgang, wären folgende Berichtigungen anzubringen:

1. Seite 136, Abschnitt B, 3. Zeile soll richtig lauten: . . . das sind insgesamt 190 km mit 680  
Grenzzeichen . . .

2. Seite 143, Punkt 3, 2. Absatz: Laut Hinweis von Herrn Hofrat Dipl.-Ing. Dr. techn. J. Litschauer war die hier angeführte Charakterisierung des Grenzkordinatensystems zwar ur-  
sprünglich so vorgesehen, sie wurde jedoch im Einvernehmen mit den Vertretern des IGM in  
Florenz abgeändert. Das Grenzkordinatensystem ist also richtig wie folgt charakterisiert:

- Internationales Ellipsoid (Hayford),
- Bestimmung der Lage durch Festhalten des Punktes Dreiherrnspitze mit seinen geogra-  
phischen Koordinaten aus dem Europeanetz 50,
- Bestimmung von Maßstab und Orientierung durch die österreichischen und italienischen  
Messungen von Geodimeter-Distanzen und Laplace-Azimuten,
- Gauß-Krüger-Koordinaten mit dem Mittelmeridian  $12^\circ$  östl. von Greenwich.

Kurt Mikulits