

Paper-ID: VGI_197905



Das Lambertsche Sechspunktproblem und seine gefährlichen Fälle

Walter Wunderlich ¹

¹ *II. Institut für Geometrie an der Technischen Universität Wien, Gußhausstraße 27-29, A-1040 Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **67** (1), S. 33–42

1979

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Wunderlich_VGI_197905,  
Title = {Das Lambertsche Sechspunktproblem und seine gefährlichen Fälle},  
Author = {Wunderlich, Walter},  
Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {33--42},  
Number = {1},  
Year = {1979},  
Volume = {67}  
}
```



Das Lambertsche Sechspunktproblem und seine gefährlichen Fälle*)

Von Walter Wunderlich, Wien

Für das klassische Sechspunktproblem von Lambert wird eine lineare konstruktive Lösung nebst einer trigonometrischen dargelegt. Überdies wird sowohl synthetisch als auch analytisch nachgewiesen, daß gefährliche Anordnungen mit stetigen Lösungsscharen dann und nur dann vorliegen, wenn die sechs Punkte einem (eventuell zerfallenden) Kegelschnitt angehören. Auch bei beliebiger Vermehrung der Punkte bleibt die Existenz unendlich vieler Lösungen des dann bereits überbestimmten Problems bestehen, sofern alle Punkte auf dem gefährlichen Kegelschnitt liegen.

1. Aufgabenstellung

Werden aus jedem von drei der Situation nach unbekanntem Standpunkten P_1, P_2, P_3 dieselben drei ebenfalls unbekanntem Zielpunkte Q_1, Q_2, Q_3 anvisiert und dabei auch die Azimute gemessen, so reichen die neun Meßdaten gerade aus, um die Konfiguration der sechs (in der Grundebene gedachten) Punkte bis auf den unbestimmt bleibenden Maßstab zu ermitteln.

Dieses interessante „Sechspunktproblem“, das 1765 von *J. H. Lambert* [1] aufgeworfen und gelöst wurde, scheint neuerdings im Bereich der Meeresgeodäsie wieder Beachtung zu finden, wie einer aktuellen Arbeit von *K. Killian* [2] zu entnehmen ist. Aus diesem Grunde wird eine neue, ganz elementare und dem linearen Charakter der Aufgabe besser entsprechende Lösung mitgeteilt, ferner wird die einschlägige, bisher nur in [2] behandelte Frage nach den gefährlichen Fällen erörtert und in übersichtlicher Weise geklärt.

2. Konstruktive Lösung

Die vom Standpunkt P_1 aus gemessenen, von Nord über Ost gezählten Richtungswinkel nach den Zielpunkten Q_i seien mit α_i bezeichnet, die von P_2 aus gemessenen mit β_i , und schließlich die von P_3 aus gemessenen mit γ_i ($i = 1, 2, 3$). Lambert baut nun die Figur von den beliebig angenommenen Punkten Q_1 und Q_3 aus mit Hilfe von Kreisen auf, die zu bekannten Peripheriewinkeln gehören (z. B. $\alpha_3 - \alpha_1$ für P_1 usw.).

Im Hinblick darauf, daß von sämtlichen Zielstrahlen die Richtungen bekannt sind, ist es natürlicher, etwa mit den Punkten P_1 und Q_1 zu beginnen, die dem gemessenen Azimut α_1 entsprechend in beliebiger Entfernung l angenommen werden. Die Punkte P_2 und P_3 sind dann an wohlbestimmte

*) Herrn emer. o. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. *Alois Barvir* zur Vollendung seines 80. Lebensjahres gewidmet.

Strahlen p_2 bzw. p_3 durch Q_1 gebunden (Azimute β_1 bzw. γ_1), ebenso die Punkte Q_2 und Q_3 an die Strahlen q_2 und q_3 durch P_1 (Azimute α_2 bzw. α_3). Beginnt man nun – sozusagen probeweise – mit dem zweiten Standpunkt an irgendeiner Stelle P'_2 auf p_2 (Fig. 1), so gelangt man in der Richtung β_2 zu Q'_2 auf q_2 und von dort in Richtung γ_2 zu P'_3 auf p_3 . Zieht man zuletzt noch die Strahlen in Richtung β_3 und γ_3 durch P'_2 bzw. P'_3 , so sollte deren Schnittpunkt Q'_3 als dritter Zielpunkt eigentlich auf q_3 liegen, was jedoch wegen der willkürlichen Wahl des Ausgangspunktes P'_2 im allgemeinen nicht der Fall sein wird (vgl. hingegen Abschnitt 4).

Läßt man nun P'_2 mit konstanter Geschwindigkeit auf p_2 wandern, so werden die übrigen Konstruktionselemente (Punkte und Geraden) mit ebenfalls konstanten Geschwindigkeiten folgen. Hieraus ist zu erkennen, daß der Punkt Q'_3 eine Gerade g durchlaufen wird, deren Schnitt mit q_3 dann den richtigen Zielpunkt Q_3 liefert, worauf rückschreitend der Rest der Figur leicht zu ergänzen ist. Zur Bestimmung der Geraden g genügt es also, die vorhin geschilderte Konstruktion für eine zweite Wahl P''_2 auf p_2 zu wiederholen, am besten für die Annahme $P''_2 = Q''_2$ im Schnittpunkt von p_2 mit q_2 (Fig. 1).

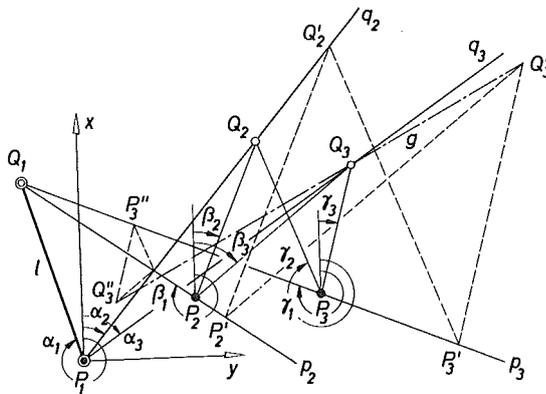


Fig. 1 Konstruktive Lösung des Sechspunktpblems

3. Trigonometrische Lösung

Die in Abschnitt 2 beschriebene Konstruktion läßt sich ohne weiteres rechnerisch nachvollziehen. Zur trigonometrischen Behandlung setze man $P_1Q_i = R_i$ und $Q_iP_i = r_i$ ($i = 2, 3$); der unbestimmte Abstand P_1Q_1 sei mit l bezeichnet. Nimmt man den Koordinatenursprung in P_1 an ($x_1 = y_1 = 0$), dann hat Q_1 die Koordinaten $X_1 = l\cos\alpha_1$, $Y_1 = l\sin\alpha_1$. Für die restlichen Koordinaten hat man:

$$\begin{aligned}
 P_2: x_2 &= l\cos\alpha_1 - r_2\cos\beta_1, y_2 = l\sin\alpha_1 - r_2\sin\beta_1; \\
 P_3: x_3 &= l\cos\alpha_1 - r_3\cos\gamma_1, y_3 = l\sin\alpha_1 - r_3\sin\gamma_1; \\
 Q_2: X_2 &= R_2\cos\alpha_2, Y_2 = R_2\sin\alpha_2; \\
 Q_3: X_3 &= R_3\cos\alpha_3, Y_3 = R_3\sin\alpha_3.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Bedingt durch die bekannten Azimute β_i und γ_i der Peilstrahlen P_2Q_i bzw. P_3Q_i ($i = 2, 3$) bestehen die Beziehungen

$$\begin{aligned} r_2 \sin(\beta_2 - \beta_1) + R_2 \sin(\beta_2 - \alpha_2) &= l \sin(\beta_2 - \alpha_1), \\ r_2 \sin(\beta_3 - \beta_1) + R_3 \sin(\beta_3 - \alpha_3) &= l \sin(\beta_3 - \alpha_1), \\ r_3 \sin(\gamma_2 - \gamma_1) + R_2 \sin(\gamma_2 - \alpha_2) &= l \sin(\gamma_2 - \alpha_1), \\ r_3 \sin(\gamma_3 - \gamma_1) + R_3 \sin(\gamma_3 - \alpha_3) &= l \sin(\gamma_3 - \alpha_1). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dies sind vier lineare Gleichungen für die unbekanntenen Distanzen r_2, r_3, R_2, R_3 . Sie sind auflösbar, falls die Determinante nicht verschwindet, was in einem „gefährlichen Fall“ eintreten würde (vgl. Abschnitt 4). Nach Elimination von r_2 und r_3 ergeben sich zwei lineare Gleichungen für R_2 und R_3 der Gestalt

$$\begin{aligned} A_2 R_2 - A_3 R_3 &= A_1 l, \quad B_2 R_2 - B_3 R_3 = B_1 l \text{ mit} \\ A_1 &= \sin(\beta_1 - \alpha_1) \sin(\beta_3 - \beta_2), \quad B_1 = \sin(\gamma_1 - \alpha_1) \sin(\gamma_3 - \gamma_2), \\ A_2 &= \sin(\beta_2 - \alpha_2) \sin(\beta_3 - \beta_1), \quad B_2 = \sin(\gamma_2 - \alpha_2) \sin(\gamma_3 - \gamma_1), \\ A_3 &= \sin(\beta_3 - \alpha_3) \sin(\beta_2 - \beta_1), \quad B_3 = \sin(\gamma_3 - \alpha_3) \sin(\gamma_2 - \gamma_1). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Auf das Anschreiben der Lösungswerte für R_2 und R_3 wird verzichtet, weil keine Vereinfachungen zu erwarten sind. – In ähnlicher Weise findet man r_2 und r_3 aus dem Gleichungspaar

$$\begin{aligned} a_2 r_2 - a_3 r_3 &= a_1 l, \quad b_2 r_2 - b_3 r_3 = b_1 l \text{ mit} \\ a_1 &= \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \sin(\gamma_2 - \beta_2), \quad b_1 = \sin(\alpha_3 - \alpha_1) \sin(\gamma_3 - \beta_3), \\ a_2 &= \sin(\beta_2 - \beta_1) \sin(\gamma_2 - \alpha_2), \quad b_2 = \sin(\beta_3 - \beta_1) \sin(\gamma_3 - \alpha_3), \\ a_3 &= \sin(\gamma_2 - \gamma_1) \sin(\beta_2 - \alpha_2), \quad b_3 = \sin(\gamma_3 - \gamma_1) \sin(\beta_3 - \alpha_3). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Die beiden Nenner-Determinanten $A_2 B_3 - A_3 B_2$ und $a_2 b_3 - a_3 b_2$ unterscheiden sich im übrigen bloß durch das Vorzeichen.

Die gesuchten Koordinaten der Punkte P_2, P_3, Q_2 und Q_3 sind schließlich gemäß den Formeln (3.1) zu berechnen.

4. Synthetische Untersuchung gefährlicher Konfigurationen

Eine „gefährliche“ Anordnung der sechs Punkte beim Lambertschen Problem liegt offenbar vor, wenn die im Zuge der konstruktiven Lösung aus Abschnitt 2 auftretende Hilfsgerade g (Fig. 1) mit dem Zielstrahl q_3 zusammenfällt: Der Schnittpunkt $Q_3 = q_3 g$ wird dann (einfach) unbestimmt, so daß sich nicht mehr eine eindeutig bestimmte Lösung, sondern eine (einparametrische) *Schar von Lösungen* einstellt.

Vorausgesetzt, daß ein solcher Ausnahmefall $q_3 = g$ überhaupt existiert – was ja nicht selbstverständlich ist –, wird also der von einem beliebigen Ausgangspunkt P'_2 auf p_2 gemäß der Vorschrift aus Fig. 1 abgeleitete Punkt Q'_3 stets auf q_3 zu liegen kommen (Fig. 2). Bei Variation von P'_2 auf p_2 wird dann der Punkt $J'_1 = P'_2 Q'_3 \cdot Q'_2 P'_3$ eine Gerade j durch $J_2 = p_2 q_2$ und $J_3 = p_3 q_3$ durchlaufen. Das geschlossene Polygon $P_1 Q'_2 P'_3 Q_1 P'_2 Q'_3$ ist demnach ein *Pascalsches Sechseck*, weil die Schnittpunkte der drei Gegenseitenpaare einer Geraden $j = J'_1 J_2 J_3$ angehören; nach einem der ältesten Sätze der projektiven Geometrie ist es daher einem *Kegelschnitt* k' eingeschrieben [3, S. 32–34].

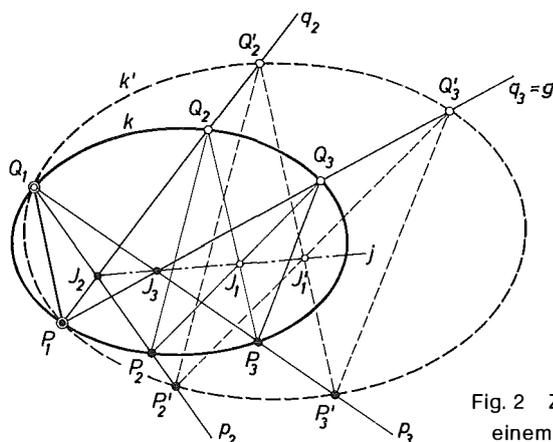


Fig. 2 Zwei Lösungen in einem gefährlichen Fall

Nun ist bloß noch zu zeigen, daß die so erkannte notwendige Bedingung für eine gefährliche Anordnung auch hinreichend ist. Seien also die drei Standpunkte P_i zusammen mit den drei Zielpunkten Q_i ($i = 1, 2, 3$) auf einem Kegelschnitt k angeordnet (Fig. 2). Nach dem Satz von *B. Pascal* schneiden einander dann die drei Paare von Gegenseiten des Sechsecks $P_1Q_2P_3Q_1P_2Q_3$ in drei Punkten J_1, J_2, J_3 einer Geraden j . Verlagert man nun P_2 an irgend eine andere Stelle P'_2 von $p_2 = Q_1P_2$, und läßt man die übrigen Punkte nach der Konstruktionsvorschrift aus Abschnitt 2 folgen, so wandert J_1 nach J'_1 auf j , denn die Dreiecke $P_2Q_2J_1$ und $P'_2Q'_2J'_1$ sind wegen der parallelen Lage entsprechender Seiten zentrisch-ähnlich bezüglich J_2 . Ebenso gilt $P_3Q_3J_1, P'_3Q'_3J'_1$ (Ähnlichkeitszentrum J_3), so daß Q'_3 tatsächlich auf $q_3 = P_1Q_3$ zu liegen kommt. – Damit ist im Einklang mit [2] erkannt der

Satz 1: *Gehören beim Lambertschen Sechspunktproblem die drei Standpunkte samt den drei Zielpunkten einem Kegelschnitt an, so liegt eine gefährliche Anordnung vor, die auf eine einparametrische Lösungsschar führt.*

5. Analytische Ermittlung der gefährlichen Fälle

Zur analytischen Untersuchung der Frage nach den gefährlichen Fällen beim Sechspunktproblem empfiehlt sich eine Vorgangsweise, die sich schon bei zwei Achtpunktproblemen bewährt hat [4]: Unter Beibehaltung des in Abschnitt 2 eingeführten Koordinatensystems wird das Zielstrahlbüschel $P_1(0,0)$ unverändert festgehalten, während auf die beiden anderen zwei willkürliche gleichsinnig-kongruente Verlagerungen $P_2(x_2, y_2) \rightarrow P'_2(x'_2, y'_2)$ und $P_3(x_3, y_3) \rightarrow P'_3(x'_3, y'_3)$ ausgeübt werden. Zum Unterschied von den Achtpunktproblemen in [4] sind jetzt aber keine Verdrehungen, sondern auf Grund der bekannten Azimute bloß *Verschiebungen* vorzunehmen.¹⁾

¹⁾ Das vorliegende Sechspunktproblem ließe sich als Sonderfall unter das Clausensche Achtpunktproblem unterordnen (Fall I in [4, S. 38 ff.]), doch ist die nachstehende direkte Behandlung beträchtlich einfacher.

Sollen die drei zu einem Zielpunkt $Q(X, Y)$ weisenden Strahlen auch nach der Verlagerung wieder in einem Punkt $Q'(X', Y')$ zusammenlaufen – was nur für ausgezeichnete, eben „gefährliche“ Zielpunkte Q eintreten wird –, so müssen die Bedingungen

$$\begin{aligned} Y/X &= u = Y'/X', \\ (Y-y_2)/(X-x_2) &= v = (Y'-y'_2)/(X'-x'_2), \\ (Y-y_3)/(X-x_3) &= w = (Y'-y'_3)/(X'-x'_3) \end{aligned} \tag{5.1}$$

erfüllt sein; u, v, w stehen dabei abkürzend für $\text{tg}\alpha, \text{tg}\beta, \text{tg}\gamma$ (Fig. 3). Mit anderen Worten bedeutet dies, daß die drei Geradengleichungen

$$\begin{aligned} uX - Y &= 0, \\ vX - Y &= vx_2 - y_2, \\ wX - Y &= wx_3 - y_3 \end{aligned} \tag{5.2}$$

linear abhängig sein müssen. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist das Verschwinden der Gleichungsdeterminante, d. i. ausgewertet:

$$w(ux_3 - vx_3 + vx_2 - y_2) = uvx_2 + u(y_3 - y_2) - vy_3. \tag{5.3}$$

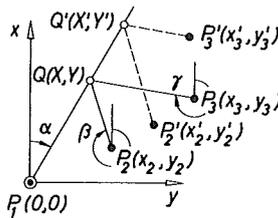


Fig. 3 Gefährliche Zielpunkte

Die gleiche Beziehung muß natürlich auch für die gestrichelten Koordinaten bestehen. Elimination von w aus den beiden Schnittbedingungen (5.3) und (5.3') führt dann auf eine Relation zwischen u und v , welche die gefährlichen Zielpunkte Q durch die Azimute $\alpha = \arctgu$ und $\beta = \arctgv$ der Peilstrahlen P_1Q bzw. P_2Q kennzeichnet. Sie lautet nach einigen Umformungen und Kürzung durch $u-v$ (womit die in trivialer Weise gefährlichen Fernpunkte ausgeschaltet werden):

$$\begin{aligned} auv + bu + cv + d &= 0 \text{ mit} \\ a &= x_2x'_3 - x_3x'_2, \quad b = x_3(y'_2 - y'_3) + (y_3 - y_2)x'_3, \\ c &= y_3(x'_2 - x'_3) + (x_3 - x_2)y'_3, \quad d = y_2y'_3 - y_3y'_2. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Durch diese bilineare Beziehung sind die beiden Zielstrahlbüschel P_1 und P_2 projektiv gekoppelt, sodaß der von ihnen erzeugte Ort aller (für die angenommene Verlagerung) gefährlichen Punkte Q ein Kegelschnitt k durch die beiden Büschelscheitel P_1 und P_2 ist. Seine Gleichung ergibt sich – auch ohne solche Vorkenntnisse –, indem man in (5.4) die Größen u und v vermöge (5.2) durch X und Y ausdrückt. Man gelangt so zu

$$dX^2 + (b + c)XY + aY^2 - (dx_2 + cy_2)X - (bx_2 + ay_2)Y = 0. \tag{5.5}$$

Durch Einsetzen der Koordinaten x_i und y_i für X und Y kann man sich überzeugen, daß alle drei Standpunkte P_i ($i = 1, 2, 3$) auf dem gefährlichen Kegelschnitt k liegen. Über die Anzahl der Zielpunkte Q (X, Y) ist nichts gesagt. Das bedeutet also vorläufig: Liegen *beliebig viele Zielpunkte* Q zusammen mit den drei Standpunkten P_i auf dem Kegelschnitt k (5.5), dann besitzt das Lambertsche Problem noch eine Nebenlösung, bei welcher anstelle der Standpunkte $P_i(x_i, y_i)$ deren Neulagen $P'_i(x'_i, y'_i)$ treten.

Daß die damit nachgewiesene Nebenlösung nicht die einzige ist, sondern bloß eine aus einer ganzen (stetigen) Schar, wäre noch zu zeigen. Weiters, daß der Kegelschnitt k (5.5) in keiner Weise ausgezeichnet ist, sondern daß jeder beliebige Kegelschnitt als gefährlicher Ort für eine bestimmte Verlagerung auftreten kann. Und schließlich, daß die Standpunkte P_i auf k keine spezielle Lage haben, ja daß ihre Anzahl sogar beliebig vermehrt werden kann, wenn sie nur allesamt auf k liegen. All dies könnte nach dem Vorbild in [4] geschehen, doch werden sich die angeführten Behauptungen im letzten Abschnitt auf einfachere Weise bestätigen.

Zu diesem Zwecke ist aber vorerst die Anordnung der *Zielpunktneulagen* Q' (X', Y') zu klären. Zufolge (5.1) sind offenbar bloß die gestrichenen und ungestrichenen Koordinaten zu vertauschen. Dies zieht lediglich einen Vorzeichenwechsel der Koeffizienten a bis d in (5.4) nach sich, sodaß sich als Ort der neuen Zielpunkte Q' wieder ein *Kegelschnitt* k' ergibt; seine Gleichung lautet:

$$dX'^2 + (b+c)X'Y' + aY'^2 - (dx'_2 + cy'_2)X' - (bx'_2 + ay'_2)Y' = 0. \quad (5.6)$$

Die Übereinstimmung der quadratischen Glieder in (5.5) und (5.6) besagt, daß die Kegelschnitte k und k' *gemeinsame Fernpunkte* haben, und dies bedeutet für gewöhnlich, daß sie *ähnlich und ähnlich gelegen* sind. Bei Ellipsen gilt dies ohne Einschränkung (vgl. Fig. 2); im Falle einer Parabel k ist für k' aber auch die Grenzform eines achsenparallelen Geradenpaares zu berücksichtigen; bei einer Hyperbel k kann k' auch eine Hyperbel sein, für welche Haupt- und Nebenachse die Rollen getauscht haben, oder aus zwei Geraden in Asymptotenrichtungen bestehen.

6. Lösungsscharen der gefährlichen Fälle

Beim Vorhandensein ähnlicher und ähnlich gelegener gefährlicher Kegelschnitte k und k' liegt es im Hinblick auf den sowieso unbestimmt bleibenden Maßstab nahe, diese Kegelschnitte *zusammenfallen* zu lassen, was die Übersicht über die Lösungsschar zu erleichtern verspricht. Hierbei sind allerdings Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln getrennt zu behandeln. Abweichend von der bisherigen Bedeutung sollen jetzt x, y und X, Y *affine Koordinaten* bezeichnen, die von der Nordrichtung unabhängig sind. Die Koordinatenachsen brauchen also keinen rechten Winkel mehr zu bilden, und die Einheiten auf ihnen dürfen verschieden sein.

I. *Elliptischer Fall*

Legt man im Falle einer gefährlichen *Ellipse* $k = k'$ die Koordinatenachsen und ihre Einheiten durch zwei konjugierte Halbmesser fest, so können auf Grund der geläufigen Parameterdarstellung $x = \cos t, y = \sin t$ die auf k angeordneten Stand- und Zielpunkte erfaßt werden durch

$$\begin{aligned} P_i \dots x_i &= \cos t_i, y_i = \sin t_i \\ Q_j \dots X_j &= \cos T_j, Y_j = \sin T_j \end{aligned} \tag{6.1}$$

Die *Richtung* des Zielstrahls $P_i Q_j$ wird dann gekennzeichnet durch

$$(Y_j - y_i) : (X_j - x_i) = -\cot (T_j + t_i)/2. \tag{6.2}$$

Wird nun die *Verlagerung* der Stand- bzw. Zielpunkte durch

$$t'_i = t_i - \tau, T'_j = T_j + \tau \tag{6.3}$$

angesetzt, dann bleiben wegen $T'_j + t'_i = T_j + t_i$ die Richtungen sämtlicher Zielstrahlen unverändert. Die Transformationen $P_i \rightarrow P'_i$ und $Q_j \rightarrow Q'_j$ sind als *affine Drehungen* um die Winkel $-\tau$ bzw. $+\tau$ anzusprechen (gewöhnliche Drehungen im Falle eines Kreises $k = k'$, bei welchem die Sachlage elementar zu durchschauen ist). Anzahl und Anordnung der Stand- und Zielpunkte unterliegen dabei keinen Einschränkungen. Den frei wählbaren Werten von τ entsprechen unendlich viele Lösungen, die eine stetige Schar erfüllen; zu achten ist nur auf die zu vermeidende Möglichkeit, daß sich das Azimut eines Zielstrahls bei der Verlagerung um 180° ändert.

II. *Parabolischer Fall*

Legt man im Falle einer gefährlichen *Parabel* $k = k'$ die x -Achse in die Scheiteltangente und die y -Achse in die Parabelachse, so können die Stand- bzw. Zielpunkte angesetzt werden mit

$$P_i \dots x_i = t_i, y_i = t_i^2; Q_j \dots X_j = T_j, Y_j = T_j^2. \tag{6.4}$$

Die Richtung des Zielstrahls $P_i Q_j$ wird dann gekennzeichnet durch

$$(Y_j - y_i) : (X_j - x_i) = T_j + t_i. \tag{6.5}$$

Die wieder durch (6.3) erklärten Verlagerungen der Stand- und Zielpunkte sind jetzt „*isotrope Drehungen*“ im Sinne von *K. Strubecker*. Da sie die Richtungen (6.5) erhalten, sind die gleichen Schlüsse wie in I zu ziehen.

Der Grenzfall eines *Parallelenpaares* k^* stellt sich für $\tau \rightarrow \infty$ ein, wenn man vorher noch auf die Nebenlösung die Ähnlichkeitstransformation $\bar{x}' = x'/\tau, \bar{y}' = (y'/\tau) - \tau$ ausübt. Man gelangt so zur ausgezeichneten Nebenlösung

$$P_i^* \dots x_i^* = -1, y_i^* = -2x_i; Q_j^* \dots X_j^* = +1, Y_j^* = 2X_j. \tag{6.6}$$

III. Hyperbolischer Fall

Läßt man im Falle einer gefährlichen *Hyperbel* $k = k'$ die Koordinatenachsen mit den Asymptoten zusammenfallen, so können auf Grund der Darstellung $xy = 1$ die Stand- bzw. Zielpunkte angesetzt werden mit

$$\begin{aligned} P_i \dots x_i &= \exp t_i, y_i = \exp (-t_i); \\ Q_j \dots X_j &= \exp T_j, Y_j = \exp (-T_j). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Die reellen Punkte eines Hyperbelastes werden mit reellen Parameterwerten erfaßt, jene des anderen Astes hingegen durch komplexe Werte mit dem Imaginärteil π . Die Richtung des Zielstrahls $P_i Q_j$ ist gekennzeichnet durch

$$(Y_j - y_i) : (X_j - x_i) = -1 : \exp (T_j + t_i). \quad (6.8)$$

Die wiederum durch (6.3) erklärten Verlagerungen der Stand- und Zielpunkte könnten als „Pseudodrehungen“ bezeichnet werden. Für reelle Werte von τ bleibt jeder Punkt auf seinem Hyperbelast (Fig. 4a), für Werte mit $\text{Im}\tau = \pi$ wechselt er auf den anderen Ast über.

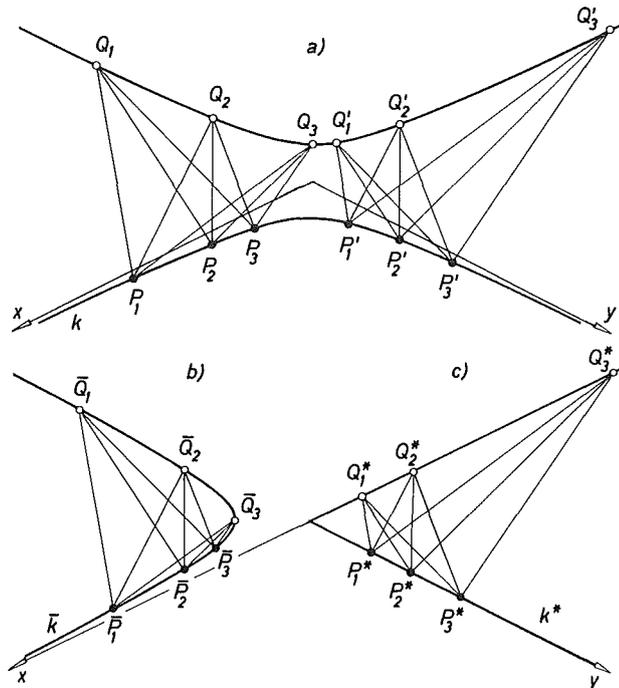


Fig. 4 Vier Lösungen in einem gefährlichen Fall hyperbolischen Typs

Eine zweite Schar von Nebenlösungen ergibt sich, wenn man von $P_i(x_i, y_i)$ zu $\bar{P}_i(\pm x_i, \mp y_i)$ und gleichzeitig von $Q_j(X_j, Y_j)$ zu $\bar{Q}_j(\mp X_j, \pm Y_j)$ übergeht, wobei die Zielstrahlrichtungen auch erhalten bleiben. Die neuen Punkte und die durch Pseudodrehungen aus ihnen hervorgehenden gehören jetzt der „konjugierten“ Hyperbel k mit der Gleichung $xy = -1$ an (Fig. 4b).

Der Grenzfall eines Geradenpaares k^* ergibt sich, wenn $P_i(x_i, y_i)$ durch $P_i^*(0, y_i)$ oder $(x_i, 0)$ und gleichzeitig $Q_j(X_j, Y_j)$ durch $Q_j^*(X_j, 0)$ oder $(0, Y_j)$ ersetzt wird; auch hierbei bleiben die Zielstrahlrichtungen unverändert (Fig. 4c). Hier bewirken die Pseudodrehungen bloß zentrisch-ähnliche Transformationen. – Ein derartiger gefährlicher Fall hyperbolischen Typs liegt demnach stets vor, wenn sich die Stand- und Zielpunkte auf je eine Gerade verteilen.

In Erweiterung von Satz 1 gilt mithin

Satz 2: *Werden aus $m \geq 3$ der Lage nach unbekanntem Standpunkten jeweils dieselben $n \geq 3$ ebenfalls unbekanntem Zielpunkte anvisiert und dabei die Azimute gemessen, so liegt für die Aufgabe der Lagebestimmung aller $m + n$ Punkte (die für $m + n > 6$ bereits überbestimmt ist) ein gefährlicher Fall mit stetigen Lösungsscharen genau dann vor, wenn sämtliche Punkte auf einem (eventuell zerfallenden) Kegelschnitt angeordnet sind.*

Kenner der projektiven Geometrie werden einen Zusammenhang der Entwicklungen dieses Abschnitts mit einem klassischen *Schließungsproblem* bemerkt haben, nämlich mit der erstmals von *G. di Ottaviano* (1788) behandelten Aufgabe: „Einem gegebenen Kegelschnitt ein n -Eck einzuschreiben, dessen Seiten der Reihe nach durch n vorgelegte Stützpunkte gehen“ [3, S. 42–46]. Diese Aufgabe besitzt im allgemeinen zwei (nicht unbedingt reelle) Lösungen. Liegen speziell sämtliche Stützpunkte auf einer Geraden f und ist n gerade, so fallen die beiden Lösungspolygone mit der mehrfach zu zählenden Geraden f zusammen. Existiert jedoch ausnahmsweise noch eine dritte, nicht ausgeartete Lösung, dann hat man eine sogenannte „poristische“ Aufgabe, die unendlich viele Lösungen besitzt.

Eine solche Situation liegt nun offenbar bei einem gefährlichen Fall des Lambertschen Sechspunktproblems vor: Die Seiten des einem Kegelschnitt k eingeschriebenen Sechsecks $P_1Q_2P_3Q_1P_2Q_3$ gehen auf Grund ihrer bekannten Richtungen durch sechs uneigentliche Stützpunkte (auf der Ferngeraden f), sodaß es noch unendlich viele weitere, k eingeschriebene Sechsecke mit denselben Seitenrichtungen geben wird. Die Anwendung der Aussage auf die Teilvierecke des Sechsecks lehrt dann, daß auch die Diagonalen P_1Q_1 , P_2Q_2 , P_3Q_3 beim Durchlaufen der Schar ihre Richtungen bewahren.

Literatur

[1] *Lambert, J. H.*: Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendungen, I. Berlin 1765, 72–83.

[2] *Killian, K.*: Critical configurations of Lambert's 6-station problem. Marine Geodesy 1978, 323–335.

[3] *Dingeldey, F.*: Kegelschnitte und Kegelschnittssysteme. Enzykl. Math. Wiss. III C1.

[4] *Wunderlich, W.*: Über gefährliche Annahmen beim Clausenschen und Lambertschen Achtpunktproblem. Sitzgsber. Bayer. Akad. Wiss. 1978, 23–46.

Summary

For Lambert's classical six-point problem, which recently is gaining a certain interest in the domain of Marine Geodesy, the author exposes a linear graphical construction and the corresponding trigonometric solution. Furthermore he shows, as well by synthetic as by analytic developments, that critical cases of the problem occur if and only if the six points belong to a conic (which may split into a pair of straight lines). Even when the number of points is arbitrarily augmented, the problem (which then is overdetermined) possesses an infinite continuous set of solutions, if all points are situated on the critical conic.

Ein neues EDV-Programm für die Berechnung ellipsoidischer und geoidischer Höhen und für die Reduktion elektronisch gemessener Schrägstrecken

Von *Josef Zeger, Wien*

Aufbauend auf den Grundsätzen und Formeln, die im Sonderheft 32 der ÖZfVuPh entwickelt wurden, hat die Triangulierungsabteilung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen in Wien eine Programmierungsgrundlage zusammengestellt, die von der Abteilung für Elektronische Datenverarbeitung als neues Rechenprogramm realisiert wurde.

Wie in [1] ausführlich dargelegt wurde, ist die bisherige Art der Höhenberechnung und der Reduktion der elektronisch gemessenen Schrägstrecken in vielen Fällen nicht befriedigend. Dieses neue Rechenprogramm bietet nun die Möglichkeit einer besseren Höhenberechnung und einer richtigeren Reduktion der Strecken. Es besteht aus mehreren Programmteilen.

Im ersten Teil werden vorläufige Höhenunterschiede berechnet und in einem Ausgleichsverfahren Refraktionsänderungen und Lotabweichungskomponenten ermittelt. Für die Berechnung der Höhenunterschiede werden, wenn vorhanden, grundsätzlich die zugeordneten gemessenen Schrägstrecken verwendet. Nur in jenen Fällen, wo einer Höhenwinkelmessung keine gemessene Schrägstrecke zugeordnet werden kann, erfolgt die Berechnung der vorläufigen und später auch der ellipsoidischen Höhenunterschiede mit aus Koordinaten abgeleiteten Horizontalstrecken. Um dies durchführen zu können, wird als grundsätzliche Voraussetzung die Angabe von