

Paper-ID: VGI\_197804



## Vorarbeiten zur Geoidbestimmung in Österreich

Klaus-Peter Schwarz <sup>1</sup>, Hans Sünkel <sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Department of Surveying Engineering, The University of New Brunswick, Fredericton, N. B., Canada*

<sup>2</sup> *Institut für Erdmessung und Physikalische Geodäsie der Technischen Universität Graz, Steyrergasse 17, A-8010 Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **66** (2), S. 57–71

1978

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Schwarz_VGI_197804,  
Title = {Vorarbeiten zur Geoidbestimmung in {"0}sterreich},  
Author = {Schwarz, Klaus-Peter and S{"u}nkel, Hans},  
Journal = {"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {57--71},  
Number = {2},  
Year = {1978},  
Volume = {66}  
}
```



## Vorarbeiten zur Geoidbestimmung in Österreich

Von K. P. Schwarz, New Brunswick, Canada, und H. Sünkel, Graz

### 1. Klassische Verfahren der Geoidbestimmung

Um die auf der physikalischen Erdoberfläche gemessenen Größen wie Azimute, Brechungswinkel, Strecken u.dgl. in Rechengrößen, welche sich auf ein vorgegebenes Ellipsoid beziehen, umwandeln zu können, bedarf es der Kenntnis des Geoids. Die Bestimmung dieser Fläche konstanten Schwerepotentials ist das zentrale Problem der physikalischen Geodäsie. Zwei Verfahren waren bisher vorherrschend: die astrogeodätische und die gravimetrische Geoidbestimmung. Beide Methoden arbeiten mit Informationen über den Gradienten des Schwerepotentials.

#### a) Die Methode der astrogeodätischen Geoidbestimmung

Dieses Verfahren, das mit dem Namen Helmert eng verknüpft ist, basiert auf der Lotabweichung ( $\xi, \eta$ ) als Richtungsdivergenz zwischen tatsächlichem Schweregradienten und Normalgradienten und leitet daraus Differenzen von Geoidhöhen ab. Als Ergebnis wird ein auf das Triangulationsgebiet beschränktes Geoid geliefert, dessen relative Lage bezüglich des Erdschwerpunktes sich in Form von drei Freiheitsgraden ausdrückt. Liegt daher zusätzlich noch Information über drei unabhängige und bezüglich des Erdschwerpunktes absolute Größen vor, so ist es prinzipiell möglich, dieses astrogeodätische Geoid in absolute Lage zu bringen. („Absolut“ ist in diesem Zusammenhang stets mit „geozentrisch“ gleichzusetzen.) Nach dieser Transformation wird es vergleichbar mit dem skalierten gravimetrischen Geoid.

#### b) Die Methode der gravimetrischen Geoidbestimmung

Die Rolle der Lotabweichung bei der Bestimmung des astrogeodätischen Geoids übernimmt hier die Schwereanomalie  $\Delta g$  als Differenz zwischen dem Betrag des tatsächlichen Schwerevektors und dem des normalen Schwerevektors. Um aus der Schwereanomalie  $\Delta g$  das Störpotential und damit die Geoidhöhe gewissermaßen herausfiltern zu können, ist es theoretisch notwendig,  $\Delta g$  auf der gesamten Erdoberfläche zu kennen und damit zu messen. Die Integralformel von Stokes liefert sodann ein Geoid, welches sich im Gegensatz zum astrogeodätischen Geoid in absoluter Lage bezüglich des Erdschwerpunktes befindet. Durch Horizontalableitung des Geoids besteht die Möglichkeit, ebenfalls auf Grund der Kenntnis von  $\Delta g$  über die Integralformel von Vening-Meinesz absolute Lotabweichungen zu bestimmen. Während der Maßstab des astrogeodätischen Geoids durch die Triangulation und damit letzten Endes durch den Betrag der Lichtgeschwindigkeit gegeben ist,

wird der Maßstab des gravimetrischen Geoids im wesentlichen durch die Erdmasse zusammen mit dem Schwerepotential in Meeresniveau bestimmt.

c) Vorteile und Nachteile beider Methoden

Wie bereits erwähnt wurde, ist es mit der astrogeodätischen Methode möglich, lokale Geoidteile auf Grund von ebenfalls nur lokalen Daten zu bestimmen. Diese Annehmlichkeit gemeinsam mit der Tatsache, daß eine derartige Geoidbestimmung bei einigermaßen dichter Datenkonfiguration sehr genau ist und selbst noch Detailstrukturen des Geoids wiederzugeben imstande ist, macht die astrogeodätische Methode zu einem wichtigen Werkzeug für lokale Geoidbestimmungen. Neben diesem erheblichen Vorteil dürfen wir allerdings nicht außer acht lassen, daß ein derart bestimmtes Geoid nur relativ ist in bezug auf seine Lage zum Erdschwerpunkt. Die Zentrierung muß daher auf andere Art geschehen.

Um eine einzige Geoidhöhe nach der gravimetrischen Methode bestimmen zu können, ist die Kenntnis der Schwereanomalien auf der ganzen Erdoberfläche erforderlich. Selbst wenn wir über genügend dichtes Schwere-material verfügten, so wäre eine detaillierte Geoidbestimmung nach dieser Methode äußerst aufwendig was Rechenzeit anbelangt. Der wesentliche Vorteil jedoch ist, daß gravimetrische Geoidhöhen sowie gravimetrisch bestimmte Lotabweichungen absolut sind.

Alles in allem ergänzen sich beide Methoden aufs beste, sodaß eine sinnvolle und den Aufwand betreffend vertretbare Lösung darin besteht, die Form des Geoids in kontinentalen Gebieten mittels der astrogeodätischen Methode zu bestimmen und die Zentrierung und Stabilisierung der gravimetrischen Methode zu übertragen.

d) Verfeinerung bei der Geoidbestimmung – die Theorie von Molodensky

Den klassischen Verfahren der Geoidbestimmung liegt stets die vereinfachende Annahme zugrunde, daß sich sämtliche Meßdaten wie Schwereanomalien und astronomische Lotrichtungen auf das Geoid und nicht auf die physische Erdoberfläche beziehen. Somit wurde bisher stillschweigend angenommen, daß die Oberflächen-Meßdaten in bereits reduzierter Form vorliegen. Die Reduktionen jedoch bedingen die Kenntnis des Dichteverlaufs zwischen Geoid und Erdoberfläche. Da Informationen solcher Art nur mit beschränkter Genauigkeit vorliegen, wäre es wünschenswert, ein geeignetes Konzept zur Verfügung zu haben, welches derartige Reduktionen vermeidet und völlig hypothesenfreie Daten verwendet. Diese auf Molodensky zurückgehenden Verfeinerungen äußern sich darin, daß primär nicht das Geoid, sondern die physikalische Erdoberfläche in ihrer Beziehung zu einer erdoberflächenähnlichen Normalfläche, dem Telluroid, bestimmt wird. Der Abstand dieser beiden Flächen wird durch eine leicht modifizierte Stokes'sche Formel geliefert, wobei die Modifikation darin besteht, daß an die Schwereanomalie

Korrekturen angebracht werden, welche stark lokalen Charakter besitzen und im wesentlichen den Einfluß der Topographie auf die Schwereanomalie ausdrücken. Die gleichen Modifikationen, die für die Höhenanomalie, den Abstand zwischen Telluroid und physikalischer Erdoberfläche gelten, gelten auch für die Lotabweichung, welche sich nun wie alle terrestrisch-geodätischen Messungen auf die Oberfläche bezieht.

## 2. Die Bestimmung eines Fundamentalpunktes

Auf Grund der im Abschnitt (1c) vorgebrachten Argumente und in Anbetracht der so stark bewegten Topographie in Österreich scheidet unserer Ansicht nach eine rein gravimetrische Geoidbestimmung für unser Bundesgebiet aus. Unterstützt wird diese Entscheidung in hohem Maße durch die Tatsache, daß wir praktisch nur in Ost-Österreich über Schwerematerial verfügen. Eine Bestimmung der Geoidhöhe wäre zur Zeit lediglich im Wiener Bereich mit ansprechender Genauigkeit möglich. Die Wahl geht also eindeutig zugunsten der astrogeodätischen Methode aus. Um jedoch das astrogeodätische Geoid in absolute Lage zu bringen, benötigen wir – wie schon erwähnt – zumindest drei unabhängige absolute Größen; diese wählen wir als gravimetrische Geoidhöhe + 2 Lotabweichungskomponenten ( $\xi$ ,  $\eta$ ) in einem Fundamentalpunkt, den wir auf Grund der Datenverteilung zwangsläufig dezentral im Bereich um Wien wählen müssen.

Es ist also die Aufgabe gestellt, in einem Punkt die Integralformeln von Stokes und Vening-Meinesz auszuwerten.

Diese eben genannten Integrale sind durch mehr oder weniger stark singuläre Integralkerne gekennzeichnet. Die Singularität im Aufpunkt bedingt eine zunehmend dichter werdende Verteilung der Schwereanomalien zum Aufpunkt hin. Die programmgesteuerte numerische Integration ist aber praktisch nur auf der Grundlage von  $\Delta g$ -Mittelwerten über „Rechtecke“ durchführbar. Das heißt wiederum, daß die Blockgrößen mit abnehmender Aufpunktdistanz abnehmen müssen. Eine durchaus gebräuchliche Unterteilung des Integrationsbereiches (= Einheitskugel) sieht vor, daß zumindest für den Zweck der Geoidhöhenbestimmung drei Zonen geschaffen werden: eine Innenzone, eine Mittelzone und eine Fernzone. Die Fernzone erstreckt sich von ca.  $20^\circ$  bis  $180^\circ$  sphärischer Distanz, die Blockgröße wird mit  $5^\circ \times 5^\circ$  festgelegt. Die Mittelzone reicht von etwa  $1^\circ$ – $3^\circ$  bis  $20^\circ$ , die Blockgröße beträgt  $1^\circ \times 1^\circ$ . Der kritische Teil wird durch die Innenzone gebildet. Hier muß die Blockgröße noch weiter vermindert werden, sodaß auch die lokalen Einflüsse auf die Geoidhöhe entsprechend erfaßt werden können. Fehleruntersuchungen haben gezeigt, daß selbst in Gebieten mit extrem rauher Topographie durch Mittelwertbildung über  $20' \times 20'$ -Blöcke nur Fehler im Dezimeterbereich zugelassen werden.

Auf eine wesentlich unangenehmere Situation stoßen wir jedoch bei der Bestimmung der Lotabweichungen. Da die Lotabweichung als Horizontalgradient aus dem Geoid hervorgeht, ist ihre Rauigkeit um eine Größenordnung stärker als die des Geoids: sie hat dieselbe Rauigkeit wie die Schwereanomalie. Dies kommt auch durch den stark singulären Kern im Integral von Vening-Meinesz zum Ausdruck. Die Konsequenzen sind derart, daß die Singularität des Kerns durch eine stetige Differenzierbarkeit der Schwereanomalienfunktion im Bereich der Singularität kompensiert werden muß. Dies kann erreicht werden, indem man die diskreten Werte der Innenzone durch eine differenzierbare Funktion approximiert. In Sünkel (1977 a, b) ist dies mittels bikubischer Spline-Funktionen geschehen, die nach beiden unabhängigen Variablen zweifach stetig differenzierbar sind. Diese lokal-polynomiale Darstellung von  $\Delta g$  hat den großen Vorteil, daß die Integrationen in der Innenzone geschlossen durchgeführt werden können, dadurch eine erhebliche Reduzierung an teurer Computerzeit erreicht wird und zusätzliche Fehlerquellen durch digitale Integration vermieden werden. Die Blockgröße variiert sehr stark mit der Topographie. Um eine astronomischen Messungen entsprechende Genauigkeit von 0"5 erreichen zu können, darf die Blockgröße in der Innenzone in Gebieten mit Flachland-Charakter (Wien)  $5' \times 5'$  nicht übersteigen, im Hügelland bis Mittelgebirge erhalten wir als oberste Grenze  $2' \times 2'$ . Im Hochgebirge ist die gravimetrische Bestimmung von Lotabweichungen nicht mehr praktikabel.

Insgesamt bewegen sich optimistische Schätzungen der Genauigkeit einer Geoidhöhe im Bereich Wien bei 3 m, die einer Lotabweichung bestenfalls bei 0"8. Eine Genauigkeitssteigerung, welche sich vor allem bei der Bestimmung von Lotabweichungen im Hügelland bis Mittelgebirge auswirkt, kann dadurch erreicht werden, daß man den Mittelwerten als Treppenfunktion einen bikubischen Spline zuordnet, welcher die Mittelwerte reproduziert und die ursprüngliche Funktion gewissermaßen nach Anwendung eines Tiefpass-Filters rekonstruiert.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß sämtliche benötigten Programme zur Bestimmung von  $N$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  in einem vorgegebenen Fundamentalpunkt inklusive detaillierter Behandlung der Innenzone von uns bereits erstellt wurden, sodaß einer Berechnung lediglich im Wege steht, daß die erforderlichen Daten nicht im ausreichenden Maß zur Verfügung stehen.

### 3. Vorhandene Daten

Wenn wir an dieser Stelle von Daten sprechen, so meinen wir damit stets Schwerewerte und astrogeodätische Lotabweichungen. Andere Datengruppen, die für die Geoidbestimmung in Frage kommen, sind in Abschnitt 4 behandelt.

## a) Schwerewerte

Bei der Beschaffung von Schweredaten standen uns 3 Quellen zur Verfügung: das Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen (BAfEuV), die Österreichische Mineralölverwaltung AG (ÖMV) und jüngst die Abteilung für Gravimetrie und Paläomagnetismus des Instituts für Meteorologie und Geophysik der Universität Wien (Prof. Steinhauser).

Die Schweredaten des Bundesamtes (insgesamt ca. 13 000) liegen ausschließlich entlang der Hauptnivellement-Linien. Sie dienen offensichtlich dem Zwecke, geopotentielle Koten zu bestimmen. Dabei ist eine nahezu gleichmäßig dichte Verteilung ohne Rücksicht auf topographische Verhältnisse gewählt worden. In den großen, von den Nivellement-Linien eingeschlossenen Gebieten, liegen von Seiten des Bundesamtes keine Messungen vor (Abb. 1).

Die ÖMV verfügt über durchwegs äußerst dichtes Datenmaterial in Nord- und Ostösterreich mit sehr homogener Verteilung. In großzügiger Weise wurde uns das gesamte Schwere-Basisnetz kostenlos zur Verfügung gestellt. Es handelt sich dabei um ein Netz homogen verteilter Punkte (ca. 500) (Abb. 2).

Schließlich wurden jüngst von Prof. Steinhauser ca. 200 Schwerewerte im Bereich der östlichen Karawanken übermittelt (Abb. 2).

Mit Hilfe der ÖMV-Daten, teilweise ergänzt durch Bundesamt-Daten, war es möglich, im Bereich [ $\phi_0 = 47^\circ 40'$ ,  $\phi_1 = 48^\circ 50'$ ;  $\lambda_0 = 15^\circ 00'$ ,  $\lambda_1 = 17^\circ 05'$ ] mittels eines Prädiktionsprogrammes auf der Grundlage der Kollokation Mittelwerte über  $5' \times 5'$  zu schätzen (Noë, 1977). Die Fehlervarianzen dieser Mittelwerte sind sehr unterschiedlich und streuen von ca.  $1 \text{ mgal}^2$  bis zu ca.  $60 \text{ mgal}^2$ , wenn man von einigen wenigen Lücken absieht. In ähnlicher Weise wurden für entsprechend größere Bereiche auch  $10' \times 10'$  [ $\phi_0 = 47^\circ 00'$ ,  $\phi_1 = 48^\circ 50'$ ;  $\lambda_0 = 13^\circ 00'$ ,  $\lambda_1 = 17^\circ 00'$ ] mit noch stärker streuenden Fehlervarianzen bis zu ca.  $150 \text{ mgal}^2$  sowie im selben Gebiet  $20' \times 20'$ -Mittelwerte mit Fehlervarianzen bis zu  $400 \text{ mgal}^2$  prädiiziert. Diese großen mittleren Fehler kommen natürlich durch äußerst dünne Datenbedeckung zustande. In Gebieten mit dichtem Datenmaterial liegen die Varianzen durchwegs im Bereich von  $1 \text{ mgal}^2$  und darunter. Schließlich wurden im Bereich [ $\phi_0 = 47^\circ$ ,  $\phi_1 = 49^\circ$ ;  $\lambda_0 = 13^\circ$ ,  $\lambda_1 = 17^\circ$ ] noch  $30' \times 30'$ -Mittelwerte geschätzt, deren Varianzen natürlich wiederum entsprechend der Datenbedeckung stark streuen.

b) Noch gravierender ist die Situation, was astrogeodätische Lotabweichungen anbelangt. Auf insgesamt 99 Stationen im Netz 1. Ordnung wurden vom Bundesamt die Lotabweichungskomponenten in Richtung des Meridian bestimmt, auf lediglich 6 Stationen auch die zugehörige zweite Komponente in Richtung des Parallel. Alle anderen  $\eta$ -Werte wurden direkt aus Azimutmessungen abgeleitet und sind für die Geoidbestimmung nicht verwendbar. (In der Schweiz, einem topographisch mit Österreich vergleichbaren Land,



Abb. 1 Verteilung der Schweredaten des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen

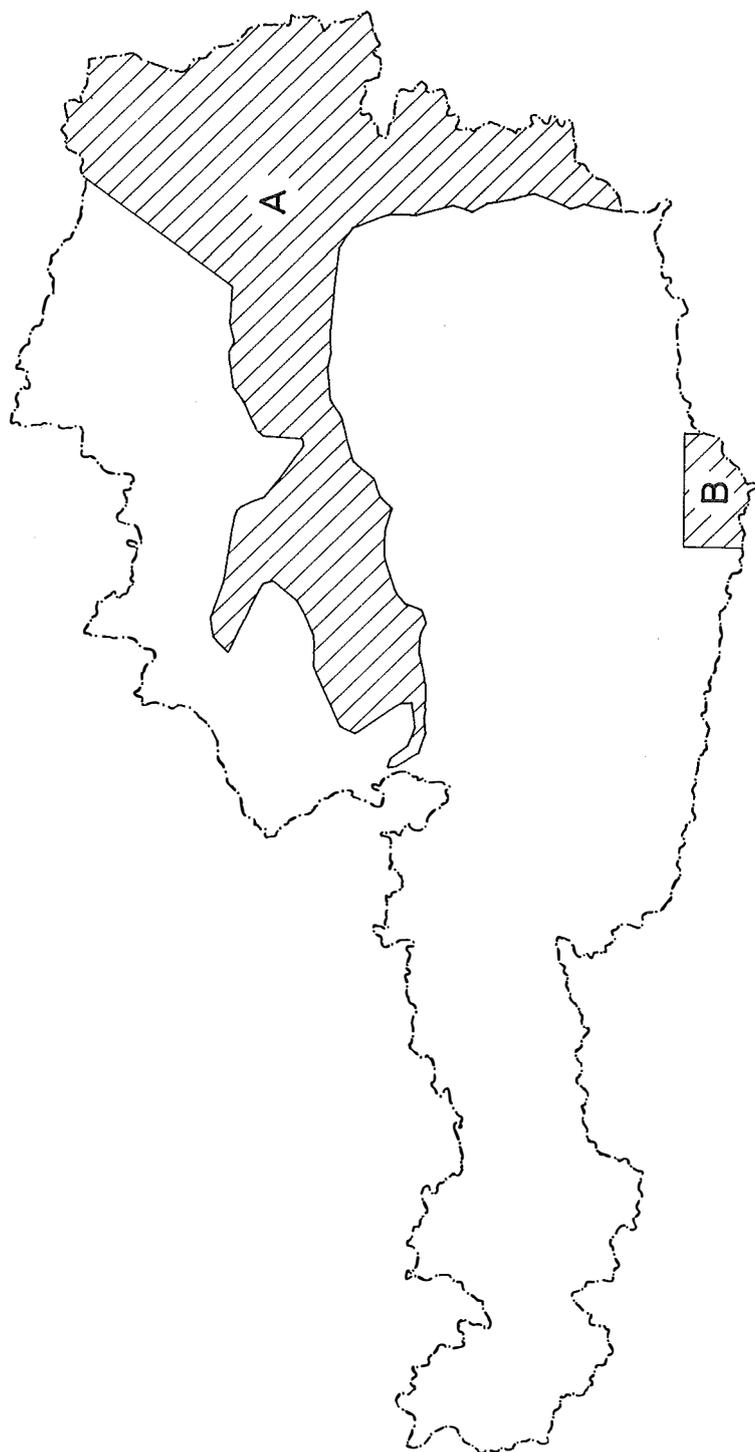


Abb. 2 Verteilung der Schwermetalle

A . . . Basisnetz der ÖMV

B . . . Abt. f. Gravimetrie u. Paläomagnetismus der Universität Wien (Prof. Steinhauser)

wurde das astrogeodätische Geoid mit 10-cm-Genauigkeit bestimmt! [Elmiger, 1969.]).

Aus diesen Gründen haben sich drei Universitätsinstitute (Prof. Bretterbauer, Prof. Embacher, Prof. Rinner) entschlossen, auf insgesamt etwa 150 Punkten astronomische Messungen durchzuführen, sodaß das gesamte Bundesgebiet mit einem mittleren Punktabstand von ca. 25 km überdeckt wird. Würden in Ostösterreich zur Verdichtung noch zusätzliche Schwere-messungen durchgeführt, die im Bereich des Fundamentalpunktes eine Dichte von etwa 1 Pkt/10 km<sup>2</sup> haben müßten, so stünde einer astrogeodä-tischen Geoidbestimmung mit Orientierung durch N,  $\xi$ ,  $\eta$  im Fundamentalpunkt nichts mehr im Wege. Die Miteinbeziehung der Molodensky-Korrekturen würde eine starke Verdichtung des Netzes erfordern (über derartige Daten verfügt die ÖMV bereits!) und sollte daher erst in einem zweiten Schritt geplant werden. Voruntersuchungen über die Schätzung mittlerer Höhen in charakteristischen Gebieten sind bereits durchgeführt worden. Ein wesentli-cher Schritt in dieser Richtung wäre die Erstellung einer Höhendatenbank für Österreich.

#### *4. Neuere Methoden der Geoidbestimmung*

Eine wesentliche Ergänzung haben die klassischen Verfahren der Geoidbestimmung in den letzten zwanzig Jahren durch Methoden erfahren, die erdnahe Satelliten als dynamisches Ziel oder als Meßsystem verwenden. Auch diese Methoden kann man unterteilen in solche, die absolute, und solche, die relative Geoidundulationen liefern. Sie benutzen aber nicht mehr ausschließlich den ersten Gradienten des Schwerepotentials zur Geoidbe-stimmung, sondern eine Vielfalt von Größen, die mit dem Potential zusam-menhängen.

##### a) Globale Satellitenlösungen für das Störpotential

Hierbei wird das Störpotential aus Bahnabweichungen des Satelliten bestimmt, die sich im Blick auf ein Referenzfeld ergeben. Der Satellit wird also als dynamisches Ziel benutzt. Beobachtete Größen sind Richtungen im Raum, Entfernungen und Entfernungsdifferenzen. Unbekannte sind die Kugelfunktionskoeffizienten der Reihenentwicklung des Störpotentials oder Verbesserungen dazu. Im allgemeinen nimmt man die Bestimmung zonaler und tesseraler Koeffizienten gesondert vor, da unterschiedliche Datengrup-pen zu ihrer Bestimmung herangezogen werden. Für die tesseralen Koeffi-zienten höheren Grades werden in immer stärkerem Maße Resonanzeigen-schaften niedrig fliegender Satelliten ausgenutzt.

Mit der Reihenentwicklung für das Störpotential hat man natürlich auch die Reihenentwicklung des entsprechenden Geoids. Dieses ist geozentrisch gelagert und bezieht seinen Maßstab von der eingeführten Erdmasse. Da die

Reihenentwicklung endlich ist, geben die Geoidhöhen den globalen und regionalen Verlauf im allgemeinen gut wieder, können aber keine lokalen Details liefern. Die Genauigkeit der so bestimmten Geoidhöhen wird in Nordamerika und Europa mit  $\pm 2$  m bis  $\pm 3$  m angegeben, dürfte aber in abgelegenen Gebieten, vor allem in den Ozeanen, deutlich schlechter sein. Ein Vergleich globaler Geoidprofile für die verschiedenen Lösungen ist z.B. in Balmino et al. (1976) zu finden.

#### b) Satellitenaltimetrie

Dieses Verfahren hat in den letzten Jahren zunehmend an Bedeutung gewonnen, da es gestattet, die Genauigkeit des Geoids in den Meeresgebieten um nahezu eine Größenordnung zu verbessern. Die Methode beruht auf dem einfachen Prinzip, die Entfernung zwischen Satellit und Meeresoberfläche zu messen, wobei der Meßstrahl als orthogonal auf der Oberfläche angenommen werden kann. Kennt man die Satellitenbahn genau und setzt man die Meeresoberfläche mit dem Geoid gleich, so ist eine direkte Bestimmung von Geoidprofilen möglich. Beide Bedingungen sind natürlich nur näherungsweise gegeben und die Genauigkeit der Geoidbestimmung kann daher nicht einfach der Entfernungsmeßgenauigkeit gleichgesetzt werden. Vorteilhaft wirkt sich aus, daß sich in vielen Gebieten die Geoidprofile überschneiden, sodaß Zwangsbedingungen eingeführt werden können, mit deren Hilfe man die Abhängigkeit von der Satellitenbahn größtenteils ausschalten kann. In Gebieten mit guter Datenbedeckung liegt die innere Genauigkeit des so bestimmten Geoids zwischen  $\pm 0,5$  m und  $\pm 0,7$  m. Die absoluten Geoidhöhen dürften eine Genauigkeit von  $\pm 2$  m haben. Einen guten Einblick in die Methodik und die praktischen Probleme geben Rummel und Rapp (1977).

Da die Satellitenaltimetrie in Gebirgsländern nicht anwendbar ist, liegt ihre Bedeutung für die Geoidbestimmung in Österreich im wesentlichen darin, daß in Zukunft die Mittel- und Fernzone in der Stokeschen Formel sehr viel genauer bestimmt werden können.

#### c) Gradiometrie

Bei dieser Methode werden zweite Gradienten des Schwerepotentials bzw. lineare Kombinationen dieser Gradienten gemessen. Diese Größen haben auf der Erdoberfläche einen stark lokalen Charakter und sind vor allem durch topographische Massenunregelmäßigkeiten beeinflusst. Die Verwendung terrestrischer Gradiometermessungen zur Geoidbestimmung ist daher problematisch, wie die Erfahrungen mit der Eötvös'schen Drehwaage zeigen. Mit zunehmendem Abstand von der Erdoberfläche werden aber die lokalen Anteile des Störfeldes herausgefiltert, und die so erhaltenen Daten lassen sich zur Bestimmung von Schwereanomalien und von Geoidhöhen verwenden. Zwei Anwendungen sind bisher vorgeschlagen und untersucht worden: Fluggradiometrie und Satellitengradiometrie.

Bei beiden Verfahren geht man davon aus, daß durch entsprechende Meßanordnung beliebige Gradienten bestimmt werden können. Im allgemeinen wird eine Kombination von drei Gradienten die besten Resultate liefern. Untersuchungen von Schwarz und Kryński (1977) haben gezeigt, daß bei der Geoidbestimmung mittels Satellitengradiometrie innere Genauigkeiten von  $\pm 0,7$  m bis  $\pm 1,0$  m auch in lokal begrenzten Gebieten zu erreichen sind. Allerdings muß man außerdem die Genauigkeit des Referenzpotentials sowie der Anfangswerte in Rechnung stellen, um den Fehler der absoluten Geoidhöhen zu schätzen. Dies gilt in gleicher Weise für die Fluggradiometrie, bei der infolge der niedrigeren Flughöhe die innere Genauigkeit bei etwa  $\pm 0,3$  m liegt (Schwarz, 1977). Beide Verfahren sind bisher nicht praktisch erprobt worden, da die instrumentelle Entwicklung noch nicht weit genug vorangeschritten ist. Die für die Fluggradiometrie benötigte Genauigkeit von  $\pm 1$  Eötvös wird aber inzwischen in Laboratoriumsversuchen regelmäßig erreicht, sodaß mit einer Erprobung in naher Zukunft zu rechnen ist.

#### d) Satellite-to-Satellite Tracking

Bei diesem Verfahren besteht das Meßsystem aus zwei Satelliten, deren Geschwindigkeitsdifferenz möglichst kontinuierlich gemessen wird. Es gibt also eine bevorzugte Meßrichtung, die durch den Vektor zwischen den beiden Satelliten angegeben wird. Die verschiedenen Ausführungen des Verfahrens unterscheiden sich nun durch Anordnung und Entfernung der Satelliten, sowie dadurch, daß zusätzliche Information über Lage und Richtung des Verbindungsvektors existiert oder nicht. Um sicherzustellen, daß die Geschwindigkeitsänderungen nur vom Schwerfeld abhängen, muß man andere Einflüsse weitgehend ausschalten. Die Hauptschwierigkeiten, die dabei auftreten, werden in Rummel und Reigber (1978) diskutiert. Untersuchungen von Kryński (1978) haben gezeigt, daß mit dieser Methode eine innere Genauigkeit von etwa  $\pm 1$  m für die lokale Geoidbestimmung erreicht werden kann. Das Verfahren ist in Versuchsmessungen erprobt worden, und es erscheint möglich, daß ein System dieser Art in naher Zukunft zur Verfügung stehen wird.

#### e) Doppler-Nivellement

Dieses Verfahren beruht wieder auf einem sehr einfachen Prinzip. Die dreidimensionalen Koordinaten, die sich aus Positionsbestimmung mittels Doppler ergeben, können in einfacher Weise durch Einführung einer Referenzfläche in ellipsoidische Koordinaten verwandelt werden. Hat man außerdem den orthometrischen Höhenunterschied für zwei so bestimmte Punkte, so erhält man aus der Differenz der ellipsoidischen und der orthometrischen Höhenunterschiede relative Geoidundulationen. Da orthometrische Höhenunterschiede für Punkte erster Ordnung entweder vorliegen, oder – wenn dies nicht der Fall ist – praktisch auch aus einer Verbindung von Nivellement und

trigonometrischer Höhenmessung abgeleitet werden können, wäre eine solche Bestimmung relativ einfach durchzuführen.

Kouba (1976) hat die Genauigkeit der relativen Geoidundulationen für Stationen untersucht, die 50 km voneinander entfernt liegen. Für die derzeit üblichen Dopplerausrüstungen gibt er eine Genauigkeit von  $\pm 0,4$  m an, hält aber bei gewisser instrumenteller Verbesserung  $\pm 0,2$  m für einen realistischen Wert. Versuchsmessungen bestätigen den ersten Wert. Es ist allerdings möglich, daß lokale Geoidstörungen und die unterschiedliche Genauigkeit der Bahnvorhersagen in verschiedenen Teilen der Erde einen größeren Einfluß haben als in diesen Werten zum Ausdruck kommt.

#### f) Trägheitsnavigation

Instrumente, die auf dem Prinzip der Trägheitsnavigation beruhen, sind relativ neu in der geodätischen Praxis. Sie werden heute fast ausschließlich zur Positionsbestimmung benutzt. Dabei integriert man Beschleunigungen, die in einem Inertialsystem gemessen werden, zweifach, um die Entfernung zwischen zwei Punkten in einem vorgegebenen Koordinatensystem zu erhalten. Bei der terrestrischen Verwendung dieser Meßsysteme lassen sich aber ebenso Änderungen des Schwerfelds bestimmen. Die Fahrzeuge (Lastwagen, Hubschrauber), die zum Transport des Instruments benutzt werden, stoppen alle 3 bis 4 Minuten, um die Nullanzeige der Beschleunigungsmesser zu kontrollieren. Aus diesen Messungen kann man die Änderung der Lotabweichungen relativ zum Anfangspunkt bestimmen. Untersuchungen in den kanadischen Rocky Mountains haben ergeben, daß sich Lotabweichungsdifferenzen zwischen Punkten, die nicht mehr als eine halbe Stunde Fahrzeit voneinander entfernt sind, mit einer Genauigkeit von weniger als  $\pm 1''$  bestimmen lassen. Da es sich bei den benutzten Instrumenten um die erste Generation handelt, liegen in dieser Entwicklung offensichtlich große Möglichkeiten für die Lotabweichungsbestimmung in Hochgebirgsländern. Die Verwendung dieser relativen Lotabweichungen erfolgt in der üblichen Weise im Rahmen der astrogeodätischen Geoidbestimmung.

### 5. Datenkombination

Bei der Fülle der in Abschnitt 1 und 4 beschriebenen Verfahren spielt die Frage der optimalen Kombination verschiedenartiger Datengruppen eine wesentliche Rolle. Dabei ist zu beachten, daß sich das Schwerfeld der Erde exakt nur durch eine unendliche Anzahl von Parametern beschreiben läßt, also z. B. durch eine unendliche Anzahl von Kugelfunktionskoeffizienten. Da die Anzahl der Meßwerte immer endlich ist, liegt im Prinzip ein unterbestimmtes Problem vor. Dazu kommt, daß die Meßgrößen im allgemeinen durch

Integral- oder Differentialoperatoren verbunden sind, und dadurch Approximationen, die für eine Datengruppe zulässig sind, bei einer anderen Gruppe wesentlichen Informationsverlust mit sich bringen.

In den letzten Jahren hat eine Methode zunehmend an Bedeutung gewonnen, die die oben angesprochenen Probleme in eleganter und numerisch einfacher Weise zu lösen gestattet. Sie ist als Kollokation nach kleinsten Quadraten bekannt geworden und vereinigt wesentliche Eigenschaften der Ausgleichsrechnung und der Prädiktion. Im folgenden soll keine Herleitung der Methode gegeben werden, sondern lediglich ihre Anwendung auf das Problem der Geoidbestimmung diskutiert werden. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß die Herleitung in sehr unterschiedlicher Weise erfolgen kann, und daß jeder dieser Ansätze charakteristische Eigenschaften der Methode zur Geltung bringt. Einzelheiten sind in Moritz (1973) zu finden, einen kurz gefaßten Überblick gibt Moritz (1977 a).

Das Modell, das im folgenden betrachtet werden soll, hat die Form

$$x = AX + s + n.$$

Der Vektor  $x$  enthält die beobachteten Größen, die sich aus einem Parameteranteil  $AX$ , dem Anteil des Störfelds  $s$  und dem Fehleranteil  $n$  zusammensetzen. Dabei werden  $s$  und  $n$  als statistische Größen betrachtet, die durch ihre ersten zwei Momente, Mittelwert und Kovarianzfunktion, beschrieben sind. Die Lösung mit kleinster Varianz der obigen Gleichung lautet

$$\begin{aligned} X &= (A^T C_x^{-1} A)^{-1} A^T C_x^{-1} x, \\ s &= C_s C_x^{-1} (x - AX), \end{aligned}$$

wobei  $C_{xx}$  die Autokovarianzmatrix der Beobachtungen ist und  $C_{sx}$  die Kreuzkovarianzmatrix zwischen Signal  $s$  und Beobachtung  $x$ . Die Elemente der verschiedenen Kovarianzmatrizen sind diskrete Werte der entsprechenden Kovarianzfunktionen. Die verschiedenen Größen des anomalen Schwerefeldes sind durch Differential- und Integralbeziehungen streng miteinander verknüpft. Ihre Kovarianzfunktionen lassen sich deshalb von einer einzigen Kovarianzfunktion, z. B. der der Schwereanomalien, herleiten. Dies ist der Grund, warum die mathematischen Relationen zwischen verschiedenen Größen des Störfelds in dieser Methode streng berücksichtigt werden können. Es wird keine Diskretisierung der Integral- oder Differentialoperatoren vorgenommen, wie z. B. bei der üblichen Diskretisierung der Stokeschen Integralformel, sondern der entsprechende Operator wird auf die Kovarianzfunktion angewendet, und die so entstandene Funktion wird anschließend diskretisiert. Die Beziehungen zwischen der Kollokation nach kleinsten Quadraten und den klassischen Integralformeln wird in Moritz (1975) diskutiert. Einen Einblick in die Fragen, die bei der Bestimmung einer globalen Kovarianzfunktion auftreten, gibt Moritz (1977 b). Eine Diskussion der Probleme, die sich bei der Bestimmung des Geoids in der Bundesrepublik

Deutschland mittels eines modifizierten Kollokationsverfahrens ergaben, ist in Lelgemann (1977) zu finden.

Zum Verständnis des Ausgangsmodells ist es hilfreich, sich die Bedeutung der verschiedenen Terme für die vorher diskutierten Meßverfahren klar zu machen. Das Signal  $s$ , das im vorliegenden Fall zu bestimmen ist, ist die Geoidundulation  $N$ . Die Meßgrößen  $x_i$ , die zu seiner Bestimmung verwendet werden, sind Schwereanomalien, Lotabweichungen, Altimetermessungen, Gradiometermessungen usw. Der Parameterterm  $AX$  umfaßt alle systematischen Anteile, die in diesen Messungen enthalten sind, also z. B. Drift und Kalibrierungsfehler bei Schwere- und Gradiometermessungen, Fehler in den Anfangswerten bei Lotabweichungen und Gradiometermessungen, Fehler des Referenzfeldes bei Altimeter- und Dopplermessungen, Differenz zwischen Meerestopographie und Geoid bei Altimetermessungen. Der Fehlervektor  $n$  enthält alles, was nicht in  $s$  oder  $AX$  enthalten ist, d.h. die Grenzen zwischen den drei Termen sind nicht starr. So ist es bei zunehmender Verfeinerung der Meßmethoden häufig der Fall, daß systematische Anteile in den Residuen entdeckt werden, die dann durch  $AX$  modelliert werden können. Im allgemeinen wird man bei der Komplexität der in Abschnitt 4 besprochenen Meßsysteme davon ausgehen müssen, daß die Elemente des Vektors  $n$  nicht mehr unkorreliert sind.

Die Kombination sehr unterschiedlicher Datengruppen bringt natürlich eine Reihe interessanter numerischer Fragen mit sich. Da die theoretischen Vorteile des Modells durch numerische Instabilitäten vollständig zunichte gemacht werden können, ist es wichtig, diese Fragen in Voruntersuchungen abzuklären. Bei den hier anfallenden großen Datenmengen empfiehlt es sich, schrittweise vorzugehen, um zu verstehen, was jede Datengruppe zur Gesamtlösung beiträgt und wie eine optimale Konfiguration aussieht. Für einen Teil der hier besprochenen Verfahren sind diese Genauigkeitsuntersuchungen in den letzten Jahren am Institut für Erdmessung und physikalische Geodäsie in Graz (Prof. Moritz) durchgeführt worden. Die Kombination von Kugelfunktionskoeffizienten und Schwereanomalien ist in Schwarz (1975) behandelt, die Kombination von Lotabweichungen und Schwereanomalien in Lachapelle (1975), die Kombination von Gradiometer- und Altimeterdaten in Schwarz (1976) und die Kombination von Schwereanomalien und Gradiometerdaten in Schwarz und Kryński (1977). Diese Untersuchungen haben gezeigt, daß die Datenkonfiguration für eine stabile Lösung sehr wesentlich ist, und daß im allgemeinen größere Datenmengen ohne Genauigkeitsverluste durch repräsentative Werte dargestellt werden können. Der Genauigkeitsgewinn, der sich bei den einzelnen Kombinationen ergibt, ist unterschiedlich, er kann jedoch bis zu 60% gegenüber den Einzellösungen betragen. Dazu kommt die größere Zuverlässigkeit der Ergebnisse, da systematische Fehler einer Datengruppe entweder entdeckt werden oder in die Fehlerschätzungen eingehen, und damit übermäßig optimistische Aussagen vermieden werden.

Versucht man abzuschätzen, welche Rolle die verschiedenen Verfahren bei der Geoidbestimmung in Österreich spielen können, so kann man leicht drei Gruppen unterscheiden. Globale Satellitenlösungen und Satellitenaltimetrie liefern ein Referenzfeld höherer Ordnung und gestatten es, die Mittel- und Fernzone in der Stokeschen Formel mit bisher nicht verfügbarer Genauigkeit zu bestimmen. Eine Kombination von Lotabweichungen und Schweredaten ergänzt durch Dopplernivellement wird zumindest in naher Zukunft das detaillierte Geoid in Österreich liefern. Dabei sollte man vor allem die Möglichkeiten im Auge behalten, die sich durch die Verwendung von Inertialinstrumenten für die Messung von Lotabweichungsdifferenzen ergeben. Eine rasche Verdichtung des geplanten Lotabweichungsnetzes wäre in dieser Weise möglich. Schließlich könnten Gradiometrie und Satellite-to-Satellite Tracking eine wesentliche Verstärkung des bis dahin berechneten Geoides liefern, wobei vor allem durch Fluggradiometrie weitere Verbesserungen in schwer zugänglichen Gebieten zu erwarten sind.

#### Literatur

- Balmino, G, Ch. Reigber and B. Moynot (1976):* The GRIM 2 Earth gravity field model. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Heft Nr. 88, München.
- Elmiger, A. (1969):* Studien über Berechnung von Lotabweichungen aus Massen, Interpolation von Lotabweichungen und Geoidbestimmung in der Schweiz. Dissertation an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich.
- Kouba, J. (1976):* Doppler Levelling. The Canadian Surveyor, Vol. 30, No. 1, pp. 21–32.
- Kryński, J., H. Noë, K. P. Schwarz and H. Sünkel (1977):* Numerical studies and programs for interpolation and collocation. Mitteilungen der geodätischen Institute der TU Graz, Folge 26.
- Kryński, J. (1978):* Possibilities of low-low satellite-to-satellite tracking for local geoid improvement. Mitteilungen der geodätischen Institute der TU Graz, Folge 31.
- Lachapelle, G. (1975):* Determination of the geoid using heterogeneous data. Mitteilungen der geodätischen Institute der TU Graz, Folge 19.
- Leigemann, D. (1977):* Ein Verfahren zur astrogravimetrischen Geoidbestimmung. Im Druck.
- Moritz, H. (1973):* Least-squares collocation. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Heft 15, München.
- Moritz, H. (1975):* Integral formulas and collocation. OSU Report No. 234, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio.
- Moritz, H. (1977a):* Least-squares collocation and the gravitational inverse problem. Journal of Geophysics, vol. 43, pp. 153–162.
- Moritz, H. (1977b):* On the computation of a global covariance model. OSU Report No. 255, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio.
- Rummel, R. and R. H. Rapp (1977):* Undulation and anomaly estimation using GEOS-3 altimeter data without precise satellite orbits. Bulletin Géodésique, vol. 51, pp. 73–88.
- Rummel, R., Ch. Reigber and K. H. Ilk (1978):* The use of satellite-to-satellite tracking for gravity parameter recovery. Presented at European Workshop, Schloss Elmau.

*Schwarz, K. P. (1975):* Zonal harmonic coefficients by least-squares collocation using satellite and gravimetric data. Mitteilungen der geodätischen Institute der TU Graz, Folge 20.

*Schwarz, K. P. (1976):* Geodetic accuracies obtainable from measurements of first and second order gravitational gradients. OSU Report No. 242, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio.

*Schwarz, K. P. (1977):* Airborne inertial systems for gravity determination in ocean areas. Proceedings of the 1st International Symposium on Inertial Technology for Surveying and Geodesy, Ottawa.

*Schwarz, K. P. and J. Kryński (1977):* Improvement of the geoid in local areas by satellite gradiometry. Bulletin Géodésique, vol. 51, pp. 163–176.

*Sünkel, H. (1977a):* Spline functions and geodetic integral formulas. Vorgelegt beim International Symposium on Optimization of Design and Computation of Control Networks, Sopron.

*Sünkel, H. (1977b):* Die Darstellung geodätischer Integralformeln durch bikubische Spline-Funktionen. Mitteilungen der geodätischen Institute der TU Graz, Folge 28.

## Zur Geometrie des normalen Schwerfeldes

Von *Hans Sünkel*, Graz

### Zusammenfassung

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit werden für ein rotierendes Bezugsellipsoid die Beziehungen zwischen Normalschwerelinien, Isozenithlinien und Normalotlinien anhand der verschiedenen Formulierungen der Randbedingung der physikalischen Geodäsie gezeigt. Der zweite Teil zeigt für ein nichtrotierendes Bezugsellipsoid die Zusammenhänge zwischen Normalschwerelinien, Äquigravitationslinien und Isozenithlinien im gewöhnlichen physikalischen Raum sowie im Schwereraum.

### 1. Einleitung

Das letzte Jahrzehnt war für die physikalische Geodäsie zu einem guten Teil gekennzeichnet vom Streben nach einer mathematisch strengen Formulierung und Lösung des nun bereits klassischen Randwertproblems der physikalischen Geodäsie: der Bestimmung der physikalischen Erdoberfläche bei vollständiger Kenntnis des Schwerepotentials und des Schwerevektors auf dieser Fläche. Die bisherigen einschlägigen Arbeiten auf diesem Gebiet sind gekennzeichnet durch Approximationen, welche zwar keinerlei praktische Konsequenzen zur Folge haben, jedoch eine strenge Formulierung verhindern. Es ist das Verdienst von T. Krarup (1973) und P. Meissl (1971), das Randwertproblem streng formuliert und linearisiert zu haben. Wesentlich