

Paper-ID: VGI\_197708



## Über die Gauß-Krüger-Abbildung

Erhart Ecker <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Fachhochschule Gießen, Wiesenstraße 14, D-6300 Gießen*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **65** (3–4), S.  
108–117

1977

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Ecker_VGI_197708,  
Title = {{\U}ber die Gau{\ss}-Kr{\u}ger-Abbildung},  
Author = {Ecker, Erhart},  
Journal = {{{\O}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {108--117},  
Number = {3--4},  
Year = {1977},  
Volume = {65}  
}
```



### 8. Zusammenfassung

Insgesamt löst für  $b > 1$  die Übergangskurve mit dem Krümmungsgesetz  $l \mapsto \kappa(l) = \kappa_0 + a l^b$ ,  $0 \leq l \leq \Delta l/2$  (und einem entsprechenden im zweiten Teilintervall), das Problem des differenzierbaren Übergangs der Krümmung in einfacher Weise.

Der Fall  $b = 1$  (Klothoide) ist als Sonderfall mitenthalten, in diesem Fall geht aber die Differenzierbarkeit der Krümmung an den Enden des Übergangsbogens verloren.

Soll die Trassierung mit differenzierbarem Krümmungsverlauf nicht allzu sehr von der mit Gerade, Kreis und Klothoide abweichen, besteht die Möglichkeit,  $b$  nur wenig größer als 1 zu wählen: die Schar der Krümmungsgesetze (7) mit dem Scharparameter  $b$  geht für  $b \rightarrow 1$  stetig in den affin-linearen Fall der Klothoide über.

Das mehrfach angesprochene numerische Problem tritt (in Abhängigkeit der Stellenzahl bei der Rechnung) erst ein, wenn der Tangentenwinkel  $\tau$  mehrere Vielfache von  $2\pi$  beträgt (12stellige Testrechnungen: Zusammenbruch bei  $7\pi$ ). Für die in der Praxis vorkommenden Übergangsbögen ist dieses Problem also nicht von Bedeutung.

## Über die Gauß-Krüger-Abbildung

Von *Erhart Ecker*, Gießen

### Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die bekannte konforme Gauß-Krüger-Abbildung des Rotationsellipsoides unter numerischen Aspekten untersucht.

### Contents

In this paper the well-known Gauß-Krüger-map (transversal Mercator map) is discussed under numerical aspects.

### 1. Einleitung

Wir betrachten das abgeplattete Rotationsellipsoid mit den Halbachsen  $a$ ,  $b$ , wobei  $a > b > 0$ , oder mit anderen Worten die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

wobei die Lösungen  $X = (x, y, z)$  gerade die Punkte der Ellipsoidoberfläche bilden. Die Funktion

$$X : \left[ -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3 \tag{2}$$

$$(B, L) \mapsto X(B, L) := N(B) \left( \cos B \cos L, \cos B \sin L, \frac{\sin B}{1 + e'^2} \right)$$

wird in der Geodäsie üblicherweise zur Parametrisierung der Oberfläche des Rotationsellipsoids verwendet. Hierbei haben die Parameter B, L die bekannte Bedeutung Breite bzw. Länge.

In Formel (2) bedeuten

E: =  $(a^2 - b^2)^{1/2}$ , metrische Exzentrizität,

e: = E/a, 1. numerische Exzentrizität,

e': = E/b, 2. numerische Exzentrizität,

w(B): =  $(1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2}$ ,

N(B): = a/w(B). (3)

Für das Quadrat des Bogenelements ds auf dem Ellipsoid ergibt sich aus (2)

$$\begin{aligned} ds^2 = dX \cdot dX &= \left( \frac{\partial X}{\partial B} dB + \frac{\partial X}{\partial L} dL \right)^2 = \left( \frac{\partial X}{\partial B} \right)^2 dB^2 + 2 \frac{\partial X}{\partial B} \cdot \frac{\partial X}{\partial L} dB dL + \left( \frac{\partial X}{\partial L} \right)^2 dL^2 \\ &= \frac{a^2 (1 - e^2)^2}{w^6(B)} dB^2 + \frac{a^2 \cos^2 B}{w^2(B)} dL^2 \end{aligned} \tag{4-0}$$

$$= N^2(B) \cos^2 B \left( \frac{(1 - e^2)^2}{w^4(B) \cos^2 B} dB^2 + dL^2 \right) \tag{4-1}$$

$$= N^2(B) \cos^2 B (g'^2(B) dB^2 + dL^2) \tag{4-2}$$

wobei

$$g'(B) = \frac{1 - e^2}{w^2(B) \cos B} = \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 B) \cos B} \tag{5}$$

### 2. Isometrische Breite

Durch Integration findet man leicht eine Stammfunktion g von g', nämlich

$$\begin{aligned} g : \left( -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right) &\rightarrow \mathbf{R}, \\ B \mapsto g(B) &:= \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) - \frac{e}{2} \ln \left( \frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B} \right) \end{aligned} \tag{6}$$

wobei man den zweiten Term auch in der Form  $-e \operatorname{arth}(e \sin B)$  schreiben kann. Die Diskussion dieser Funktion, die für uns eine fundamentale Rolle spielen wird, ergibt sofort

a) g ist wohldefiniert für  $|e| < 1$ ,

b) g ist ungerade, und  $g(B) \rightarrow \infty$  für  $B \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,

c)  $g$  ist differenzierbar, und  $g'(B) = \dots$  siehe (5),

$$d) g'(B) \geq \frac{1-e^2}{\cos B} \geq 1-e^2 > 0,$$

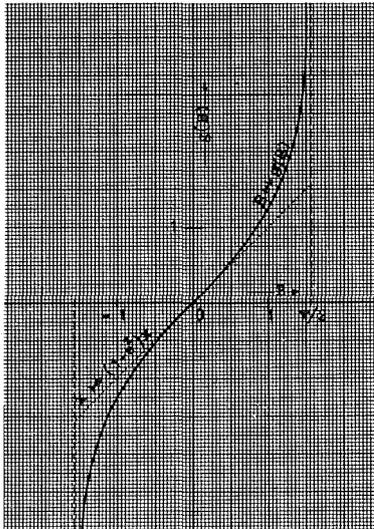


Abbildung 1

d. h.  $g$  steigt streng monoton,

e) besitzt also eine Umkehrfunktion  $g^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$

Die Umkehrung von  $g$  z. B. über Reiheninversion scheidet jedoch an der Praxis. Z. B. ist die Taylorreihe für  $g$  an der Stelle 0 im Falle  $e = 0$  (Kugel) gegeben durch

$$g(B) = \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|E_{2k}| B^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad |B| < \frac{\pi}{2}$$

worin  $E_0 = 1$ ,  $E_2 = -1$ ,  $E_4 = 5$ ,  $E_6 = -61$  usw. die sogenannten Eulerschen Zahlen sind, cf. (Gradshteyn, S. 35, S. 1078).\*)

Die Umkehrung von  $g$  bekommt man jedoch mit Hilfe des Kontraktionsatzes (Iterationsverfahren) gut in den Griff: Löst man die Gleichung  $g(B) = q$  nach dem Buchstaben  $B$  in  $\ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right)$  auf, so kommt man auf die Funktion

\*) Man kann jedoch ohne weiteres die Taylorreihe der Funktion in (6) angeben, wenn man als Argument nicht  $B$ , sondern  $\sin B$  verwendet.

$$h_q : \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right), \quad (q \in \mathbf{R} \text{ fest vorgegeben}) \quad (7)$$

$$x \mapsto h_q(x) := 2 \arctan \left[ \exp \left( q + \frac{e}{2} \ln \frac{1 + e \sin x}{1 - e \sin x} \right) \right] - \frac{\pi}{2}$$

für die folgendes gilt:

$$\alpha) h_q'(x) = \frac{e^2 \cos x}{(1 - e^2 \sin^2 x) \operatorname{ch} \left( q + \frac{e}{2} \ln \frac{1 + e \sin x}{1 - e \sin x} \right)}, \text{ also } 0 \leq h_q'(x) \leq e^2/(1 - e^2)$$

β) für  $e^2 < 1/2$  ist  $h_q$  eine Kontraktion mit der Kontraktionskonstanten

$$\lambda = e^2/(1 - e^2) < 1,$$

γ) aufgrund der Anwendbarkeit des Kontraktionssatzes\*) hat  $h_q$  genau einen Fixpunkt, und wie man durch Auflösen der Fixpunktgleichung  $h_q(B) = B$  nach  $q$  sieht, gilt  $q = g(B)$ , d. h. der Fixpunkt  $B$  ist  $g^{-1}(q)$ ,

δ) für jeden Startwert  $B_0$  aus  $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$  [wähle  $B_0 = 0$ ] strebt die Folge  $(B_n)$ ,

wobei  $B_n = h_q(B_{n-1})$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,

mit der a-priori-Abschätzung

$$|B_n - B| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |B_1 - B_0|$$

gegen  $B = g(q)$ .

a-posteriori-Abschätzung

$$|B_n - B| \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda} |B_n - B_{n-1}|$$

Die Größe  $q = g(B)$  wird isometrische Breite genannt. Mit Formel (6) hat man den Übergang von  $B$  zu  $q$ , mit der Iterationsfunktion  $h_q$  in (7) den Übergang von  $q$  zu  $B$  problemlos in der Hand.

### 3. Die Mercatorabbildung

Geht man mit  $q = g(B)$  vom Parameterpaar  $(B, L)$  zum neuen Parameterpaar  $(q, L)$  über, so bedeutet dies für das Bogenelement  $ds$

$$ds^2 = N^2 [g^{-1}(q)] \cos^2 [g^{-1}(q)] (dq^2 + dL^2) \quad (4-3)$$

oder in komplexer Schreibweise, mit

$q + iL = : w$  (Mercatorvariable)

und  $\{ N [g^{-1}(q)] \cos [g^{-1}(q)] \}^2 = : h(q + iL)$ :

$$ds^2 = h(w) \frac{dw}{dw} \quad (4-4)$$

Der Umstand, daß  $dq^2$  und  $dL^2$  in (4-3) mit demselben Faktor multipliziert erscheint, hat zwei wesentliche Auswirkungen. Die erste Auswirkung ist, daß für das Messen auf der Ellipsoidoberfläche entlang den  $q$ -Linien und  $L$ -Linien derselbe (allerdings nur lokal gültige) Maßstab gilt. Aus diesem Grunde werden solche Parameter bzw. Parametrisierungen isometrisch genannt.

\*) siehe z. B. H. Werner: Praktische Mathematik I, Springer, Berlin 1975, oder Dieudonné, S. 264.

Die zweite Auswirkung ist die Konformität (oder: Winkeltreue) der „Abbildung“ der Ellipsoidoberfläche in die Ebene, die man im wesentlichen (d. h. bis auf einen generellen Maßstabsfaktor) dadurch erhält, daß man  $(q, L)$  als ebene rechtwinkelige kartesische Koordinaten  $(x, y)$  deutet.

Hierzu muß man einige Erläuterungen geben. Konform heißt hierbei, daß der Schnittwinkel je zweier Flächenkurven bei der „Abbildung“ erhalten bleibt; daß dies der Fall ist, liegt im wesentlichen am (lokal gültigen) einheitlichen Maßstab und der Identifizierungsabbildung

$$\mathbf{R} \times (-\pi, +\pi) \xrightarrow{\text{id}} \mathbf{R} \times (-\pi, +\pi) \quad q + iL \mapsto x + iy = q + iL$$

die auch als „Mercatorabbildung“ bezeichnet wird, siehe auch Abb. 2.

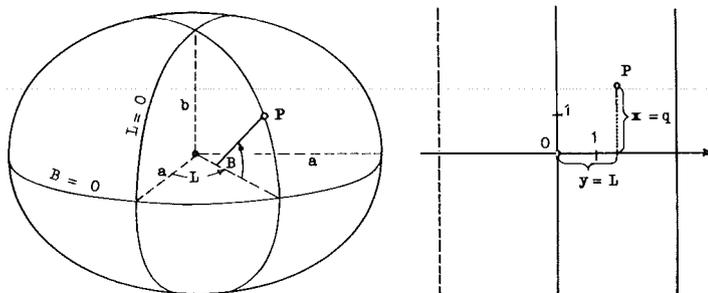


Abb. 2 Mercatorabbildung

Weitere konforme Abbildungen der Ellipsoidoberfläche, oder von Teilen davon\*), erhält man durch Wahl einer stetig differenzierbaren Funktion

$$f: \mathbf{R} \times (-\pi, +\pi) \rightarrow \mathbf{C} \quad w = q + iL \mapsto f(w)$$

mit der Eigenschaft  $f'(w) \neq 0$  für alle  $w = q + iL$ , in denen Konformität herrschen soll (vgl. Tutschke, S. 41).

Eine Diskussion verschiedener konformer Abbildungen der Ellipsoidoberfläche findet sich in der Artikelserie von Frank (ZfV, 1940). Dort ist

$$f_{Lg}(w) := \frac{-\exp(-kw) + \exp(-q_0)}{1 + \exp(-kw - q_0)}, \quad 0 < k \leq 1,$$

der allgemeinste Entwurf, genannt Lagrangesche Kreisnetze mit Hauptpunkt  $q + i,0$ , aus dem für  $k = 1$  die stereographischen Abbildungen folgen, für  $q_0 \rightarrow \infty$  die Lambertschen polständigen, usw.

In der oben zitierten Artikelserie wird jedoch die sogenannte Gauß-Krüger-Abbildung nicht diskutiert. Diese ist auf sehr einfache Weise durch die Forderung nach längentreuer Abbildung des (o. B. d. A.) Nullmeridians  $L = 0$  definiert. Zur Gauß-Krüger-Abbildung liegt umfangreiches Material in der

\*) Vgl. Bröcker und Jänich, S. 11, Aufgabe 2: Von der Ellipsoidoberfläche existiert kein differenzierbarer Atlas mit nur einer Karte.

Arbeit von Hubeny „Isotherme Koordinatensysteme und konforme Abbildungen des Rotationsellipsoids“ vor. Die Entwicklung der Datenverarbeitung hat jedoch den rechnerischen Schwerpunkt von den Reihenentwicklungen (Taylorscher Satz) wegverschoben, hin zu iterativ behandelbaren Formeln (Fixpunktsätze), und diesem Umstand soll in dieser Arbeit Rechnung getragen werden.

#### 4. Meridianbogen

Die rechte Hälfte der Ellipse mit den Halbachsen  $a > b > 0$  und der Gleichung

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

wird durch  $X : (0, \pi) \rightarrow \mathbf{R}^2 \ni \vartheta \mapsto X(\vartheta) := (a \sin \vartheta, b \cos \vartheta)$

parametrisiert. Für die Bogenlänge  $\sigma(\vartheta)$  gilt demnach wegen

$X'(\vartheta) = (a \cos \vartheta, -b \sin \vartheta), \|X'(\vartheta)\| = (a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta)^{1/2} = a(1 - e^2 \sin^2 \vartheta)^{1/2}$   
die Darstellung

$$\sigma(\vartheta) = a \int_0^{\vartheta} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi} \, d\psi = a E(\vartheta; e)$$

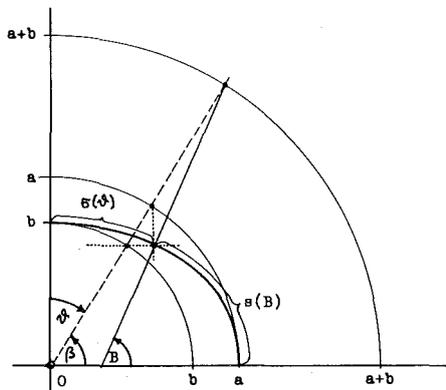


Abbildung 3

worin  $E(\vartheta; e)$  das elliptische Integral 2. Art (vgl. z. B. Gradshteyn, S. 904) mit dem Modul  $e =$  erste numerische Exzentrizität ist. Für die Meridianbogenlänge vom Äquator bis zur ellipsoidischen Breite  $B$  gilt demnach wegen (vgl. Abb. 3)

$$\tan \beta = \frac{b}{a} \tan B, \vartheta = \frac{\pi}{2} - \beta, \text{ und } B = g^{-1}(q)$$

die Formel

$$f(q) := s[g^{-1}(q)] = a \left[ E\left(\frac{\pi}{2}; e\right) - E\left\langle \frac{\pi}{2} - \arctan\left\{\frac{b}{a} \tan[g^{-1}(q)]\right\}; e \right\rangle \right] \quad (8)$$

### 5. Die Gauß-Krüger-Abbildung

Diese zuletzt definierte Funktion  $f$  muß die Einschränkung der Gauß-Krüger-Abbildung auf die reellen Zahlen (d. h. geometrisch inhaltlich: die Einschränkung auf den durch die isometrische Breite parametrisierten Grundmeridian) sein.

Sofern die in (6) und (7) diskutierte Funktion  $g^{-1}: \mathbf{R} \rightarrow (-\pi/2, +\pi/2)$  reell-analytisch ist, liefert dort, wo die komplexe Fortsetzung  $g^{-1}_c$  von  $g^{-1}$  definiert ist, die durch

$$f_{\text{GK}}(w; e) := a \left[ E \left( \frac{\pi}{2}; e \right) - E \left\langle \frac{\pi}{2} - \arctan \left\{ \frac{b}{a} \tan [g^{-1}_c(w)] \right\}; e \right\rangle \right] \quad (9)$$

definierte Funktion die Gauß-Krüger-Koordinaten in Funktion der Mercatorvariablen  $q + iL = w$ . Für die Ableitung der Gauß-Krüger-Funktion findet man

$$f'_{\text{GK}}(w; e) = a \frac{\cos [g^{-1}_c(w)]}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 [g^{-1}_c(w)]}} \quad (9')$$

Man beachte hierbei, daß, abgesehen von der multiplikativen Konstanten  $a$ , die Gauß-Krüger-Funktion nur von der Mercatorvariablen  $w$  und dem Parameter  $e =$  erste numerische Exzentrizität abhängt. Da die analytische Fortsetzung der Funktionen  $E$ ,  $\arctan^*$ ) und  $\tan$  unproblematisch ist, auch vom Standpunkt der Programmierung, konzentriert sich das ganze Problem auf die Funktion  $g^{-1}$  und deren analytische Fortsetzung. Doch zuvor sollten wir uns die einfachere Situation im sphärischen Fall ansehen.

### 6. Einschub: sphärischer Fall

Betrachtet man die Gauß-Krüger-Abbildung für den Fall  $a = b$ ,  $e = 0$ , also den Fall einer Sphäre, so folgt aus (9) wegen  $E(\frac{\pi}{2}; 0) = \text{id}$

$$f_{\text{GK}}(w; 0) = a g^{-1}_c(w) \quad (9\text{-sph})$$

Für  $e = 0$  ergibt sich aus (6), daß  $g$  analytisch fortsetzbar ist zur Funktion

$$g_c: \left( -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right) \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \times \left( -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right), z \mapsto g_c(z) = \log \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{z}{2} \right)$$

daß ferner  $g_c$  umkehrbar ist, und  $(g_c)^{-1}$  die analytische Fortsetzung von  $g^{-1}$  liefert. In dieser Weise bekommt man

\*) Für die Programmierung und das Verständnis des folgenden ist es wesentlich zu rekapitulieren, daß

$$\arctan: D \rightarrow W, z \mapsto \arctan(z) := \frac{1}{2i} \cdot \log \left( \frac{1+iz}{1-iz} \right)$$

eine bijektive, differenzierbare [ $\arctan'(z) = 1/(1+z^2)$ ] Funktion ist und  $\tan: W \rightarrow D$  Umkehrfunktion ist, wobei

$$D := \mathbf{C} \setminus \{iy/y \in \mathbf{R}, |y| \geq 1\} \text{ und } W := \{x + iy/x, y \in \mathbf{R}, |x| < \pi/2\}$$

$$f_{\text{GK}}(w; 0) = a \left\{ 2 \arctan [\exp (w)] - \frac{\pi}{2} \right\}, \text{ wobei } f_{\text{GK}}(w; 0) : \mathbf{R} \times \left( -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right) \mapsto \left( -\frac{a\pi}{2}, +\frac{a\pi}{2} \right) \times \mathbf{R}$$

die symmetrisch zum Grundmeridian liegende Halbsphäre bijektiv auf einen unendlich langen Streifen der Höhe = halber Erdumfang abbildet. Dies ist ein so wesentlicher Unterschied zur Mercatorabbildung, daß aus diesem Grunde die Bezeichnung „transversale Mercatorabbildung“ als Synonym für die Gauß-Krüger-Abbildung unverständlich erscheint.

Der sphärische Fall wurde hier aus zwei Gründen diskutiert: zum einen liefert er Testmaterial für die Programmierung, zum anderen gibt er einen ersten Anhaltspunkt über den Definitionsbereich der Gauß-Krüger-Funktion (9); strebt  $e$  gegen Null, so strebt die halbe Ellipsoidoberfläche gegen die halbe Sphäre. So kann man für den Definitionsbereich von  $f_{\text{GK}}$  die Menge  $\mathbf{R} \times (-\Lambda, +\Lambda)$  erwarten, wobei  $\Lambda$  etwa bei  $\pi/2$  liegt.

### 7. Analytische Fortsetzung von $g^{-1}$

Wir kehren nun wieder zum Rotationsellipsoid zurück. Durch Betrachtung der Ableitung (5) der in (6) definierten Funktion  $g$  erkennt man, daß  $g$  analytisch ist; außerdem ist  $g$  bijektiv, also die Umkehrfunktion stetig, und mit Hilfe von (5) und (6) kann man zeigen, daß  $g^{-1}$  mit der Ableitung

$$(g^{-1})'(q) = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left\{ 1 - e^2 \sin^2 [g^{-1}(q)] \right\} \cdot \cos [g^{-1}(q)]$$

differenzierbar, hinmit sogar stetig differenzierbar ist, und in dieser Weise fortfahrend erkennt man, daß  $g^{-1}$  unendlich oft differenzierbar ist; für die Analytizität reicht dies jedoch noch nicht aus. Jedoch ergibt sich aus dem Umkehrsatz für Potenzreihen (Knopp, S. 186, S. 418) die lokale Umkehrbarkeit der Funktion in Gestalt der umgekehrten Potenzreihe, und dies liefert die Analytizität von  $g^{-1}$ .

Damit ist die wichtigste Voraussetzung für die analytische Fortsetzbarkeit von  $g^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow (-\pi/2, +\pi/2)$  gegeben, nämlich daß die fortzusetzende Funktion selbst analytisch ist. In Analogie zur Hilfsfunktion  $h_q$  aus (7),

$$x \mapsto h_q(x) = 2 \arctan \left[ \exp \left( q + \frac{e}{2} \ln \frac{1 + e \sin x}{1 - e \sin x} \right) \right] - \frac{\pi}{2}$$

die uns über die Lösung der Fixpunktgleichung  $h_q(B) = B$  die Breite  $B = g^{-1}(q)$  lieferte, führen wir nun die analytische Fortsetzung dieser Hilfsfunktion – allerdings für komplexe Parameter  $w = q + iL$  anstelle des reellen Parameters  $q$  – ein durch

$$h_w: \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \times \mathbf{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \times \mathbf{R}, \quad (10-1)$$

$$x + iy = z \mapsto h_w(z) := 2 \arctan \left[ \exp \left( w + \frac{e}{2} \log \frac{1 + e \sin z}{1 - e \sin z} \right) \right] - \frac{\pi}{2}$$

wobei  $h_w$  wohldefiniert ist, wenn man den Parameter  $w = q + iL$  aus  $\mathbf{R} \times (-\Lambda, +\Lambda)$  wählt, wobei  $0 < \Lambda \leq (1-e) \pi/2 \triangleq 82^\circ$  ist, und  $\Lambda$  die maximale halbe Streifenbreite darstellt.

$h_w$  ist im angegebenen Definitionsbereich differenzierbar mit der Ableitung

$$h_w'(z) = \frac{e^2 \cos z}{1 - e^2 \sin^2 z} \Big/ \operatorname{ch} \left( w + \frac{e}{2} \log \frac{1 + e \sin z}{1 - e \sin z} \right) \quad (10-2)$$

und diese läßt sich mit  $\operatorname{Im} z = y$  abschätzen durch

$$|h_w'(z)| \leq \frac{e^2 \operatorname{ch} y}{1 - e^2 \operatorname{ch}^2 y} \cdot \frac{1}{\cos \left( \Lambda + \frac{e\pi}{2} \right)} \quad (10-3)$$

Wird als Startwert der Iterationsfolge  $z_n = h_w(z_{n-1})$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$z_0 := h_w(0) = 2 \arctan [\exp(w)] - \frac{\pi}{2} = g^{-1}_{c, \operatorname{sph}}(w) \quad (10-4)$$

gewählt, so kann man mit Hilfe von (10-3) zeigen, daß man auf die größte offene Kreisscheibe  $B(z_0, r)$  um  $z_0$ , die noch im Definitionsbereich von  $h_w$  liegt, den Fixpunktsatz in der Fassung (Dieudonné, S. 264, 10.1.2) anwenden kann, sofern man die halbe Streifenbreite  $\Lambda$  kleiner als rund  $60^\circ$  wählt. („rund“ deshalb, weil knappere Abschätzungen zu einer größeren Streifenbreite führen, so daß es sich nicht lohnt,  $\Lambda$  auf Kommastellen anzugeben.)

Für solche  $w = q + iL$  aus  $\mathbf{R} \times (-\Lambda, +\Lambda)$  konvergiert also die zu  $h_w$  und Startwert  $z_0$ , vgl. (10-1) und (10-4), gehörige Iterationsfolge gegen [den in  $B(z_0, r)$  eindeutig bestimmten] Fixpunkt  $z^*$ , für den durch Auflösen der Fixpunktgleichung  $h_w(z^*) = z^*$  nach  $w$  die Bedingung  $g_c(z^*) = w$  sichtbar wird, also  $z^* = g_c^{-1}(w)$ .

Obwohl die konkrete Realisierung des Fixpunktsatzes seitenlange Abschätzungen erfordert, macht die analytische Fortsetzung  $g_c^{-1}$  von  $g^{-1}$  praktisch (zumindest für die geodätisch üblichen  $2 \times 3^\circ$ -Streifen) überhaupt keine Schwierigkeiten.

### 8. Praktischer Teil

Auf der Basis der Formel (9) wurde ein Programmsystem entworfen, das in Abhängigkeit von

a, b, B, L

die Gauß-Krüger-Koordinaten berechnet. Dieses Programmsystem wurde zahlreichen Tests unterzogen:

- Test 1:  $L = 0$ , Vergleich mit Meridianbogentafel.
- Test 2:  $b = a$ , Vergleich mit sphärischer Berechnung.
- Test 3:  $a$  und  $b$  für das Besselellipsoid,  $B$ ,  $L$  wie in der Tafel von Hubeny (S. 130 ff). Abbildung 4 zeigt einen Teil des Ausdrucks, in ähnlichem Layout wie die Hubeny-Tafel. Dabei treten gelegentlich Differenzen von 1 mm auf.

GAUSS-KRUEGERKOORDINATEN  
(BESSELLELLIPSOID)  
 $B=46.2$

L	X	Y
0.0	5117796.634	0.000
0.1	5117801.495	7717.438
0.2	5117816.078	15434.873
0.3	5117840.382	23152.307
0.4	5117874.409	30869.738
0.5	5117918.157	38587.166
0.6	5117971.629	46304.588
0.7	5118034.822	54022.005
0.8	5118107.739	61739.415
0.9	5118190.380	69456.818
1.0	5118282.744	77174.212
1.1	5118384.833	84891.597
1.2	5118496.647	92608.971
1.3	5118618.187	100326.334
1.4	5118749.453	108043.684
1.5	5118890.447	115761.021
1.6	5119041.167	123478.343
1.7	5119201.618	131195.651
1.8	5119371.799	138912.941
1.9	5119551.710	146630.215
2.0	5119741.352	154347.470

Abbildung 4

Das Listing für das erwähnte Programmsystem (ANSI-Fortran) umfaßt vier DIN-A4-Seiten, kann also hier schwerlich wiedergegeben werden; auf Wunsch können Kopien zur Verfügung gestellt werden.

**Literatur**

*Bröcker, Th. und K. Jänich:* Einführung in die Differentialtopologie. Heidelberger Taschenbücher Nr. 143, Springer, Berlin, 1973.

*Dieudonné, J.:* Grundzüge der modernen Analysis. Vieweg, Braunschweig, 1971.

*Frank, A.:* Beiträge zur winkeltreuen Abbildung des Erdellipsoids. ZfV, Heft 5, 69. Jg., Stuttgart, 1940.

*Gradshteyn, I. S. und I. M. Ryzhik:* Table of Integrals, Series, and Products. Academic Press, New York, 1965.

*Hubeny, K.:* Isotherme Koordinatensysteme und konforme Abbildungen des Rotationsellipsoids. Sonderheft 23 der ÖZfV, Wien, 1953.

*Knopp, K.:* Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Springer, Berlin, 1964.

*Tutschke, W.:* Grundlagen der Funktionentheorie. Vieweg, Braunschweig, 1969.

*Werner, H.:* Praktische Mathematik I. Springer, Berlin, 1975.