

Paper-ID: VGI_197707



Trassierung mit differenzierbarem Krümmungsverlauf

Erhart Ecker ¹

¹ *Fachhochschule Gießen, Wiesenstraße 14, D-6300 Gießen*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **65** (3–4), S. 97–108

1977

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Ecker_VGI_197707,  
Title = {Trassierung mit differenzierbarem Kr{"u}mmungsverlauf},  
Author = {Ecker, Erhart},  
Journal = {"0sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {97--108},  
Number = {3--4},  
Year = {1977},  
Volume = {65}  
}
```



Trassierung mit differenzierbarem Krümmungsverlauf

Von *Erhart Ecker*, Gießen

Zusammenfassung

Gesucht wird ein Übergangsbogen zwischen Kreisen verschiedener Krümmung oder zwischen Gerade und Kreis, mit der Eigenschaft, daß sich die Krümmung in Funktion der Bogenlänge längs der Bogenfolge in differenzierbarer Weise ändert.

Contents

A transition curve between two circles or between a straight line and a circle is derived which satisfies the basic requirement of differentiability as a function of the arc length.

1. Einleitung

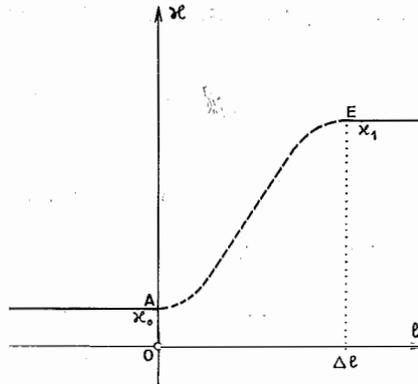
Die einfachsten Trassierungselemente für Bahnen und Straßen sind (im Grundriß gesehen) Gerade und Kreis. Diese Elemente kann man nun nicht unmittelbar aneinanderreihen, da sich dann an den Stoßstellen die Krümmung in unstetiger Weise ändert. Denn dies hat in Verbindung mit der Forderung, daß die Resultierende aus Fliehkraft und Schwerkraft zur Unterlage senkrecht steht, abrupte Änderungen der Querneigung zur Folge, neben anderen unerwünschten Konsequenzen.

Fügt man zwischen Gerade und Kreis oder zwischen Kreisen verschiedener Krümmung Übergangskurven ein, deren Krümmung sich proportional der Bogenlänge ändert, wird man mathematisch auf die sogenannte Klothoide geführt; diese Kurve beseitigt zwar die Sprünge in der Querneigung, nicht aber die Knicke.

Will man diese Knicke vermeiden, so muß man die Forderung nach einer differenzierbaren Änderung der Krümmung in Funktion der Bogenlänge erheben. Zudem läuft diese Forderung auf eine Steigerung der Lebensqualität hinaus, ohne zusätzliche Kosten zu verursachen. Alles in allem lohnt es sich, diese Forderung zu verfolgen.

Wir stellen uns also die Aufgabe, zwischen Kreisbögen mit vorgegebenen Radien ($1/\kappa_0$ bzw. $1/\kappa_1$) einen Übergangsbogen vorgegebener Länge Δl so einzurechnen, daß sich die Krümmung längs der zusammengesetzten Kurve Kreis-Übergangsbogen-Kreis in differenzierbarer Weise ändert, wie in Fig. 1 strichliert angedeutet ist.

Figur 1



2. Anforderungen

Hiermit sind die Anforderungen an die Krümmung in Funktion der Bogenlänge l festgelegt:

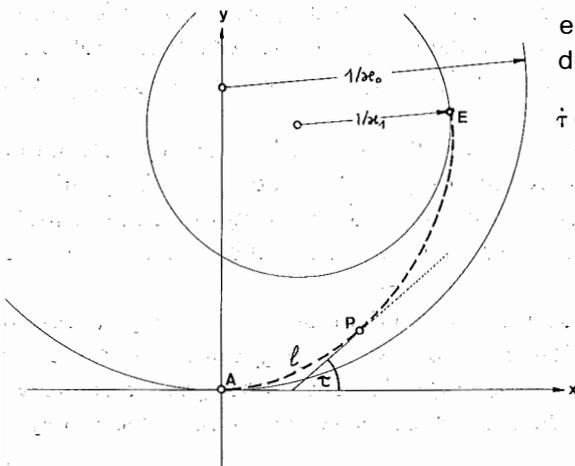
$$\left. \begin{aligned} l \mapsto \kappa(l) \text{ soll differenzierbar sein} \\ \kappa(0) = \kappa_0, \kappa(\Delta l) = \kappa_1, \\ \kappa'(0) = \kappa'(\Delta l) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ein den Bedingungen (1) genügendes Krümmungsgesetz $l \mapsto \kappa(l)$ legt den Übergangsbogen (zusammen mit den Angaben $\kappa_0, \kappa_1, \Delta l$) natürlich nur bis auf Kongruenz fest. Wir dürfen den Übergangsbogen daher so lagern, daß für die explizierte Darstellung $x \mapsto y(x)$ gilt: $y(0) = 0, y'(0) = 0$, bzw. für die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} l \mapsto (x(l), y(l)) \text{ gilt:} \\ (x(0), y(0)) = (0, 0), \dot{y}(0) = 0. \end{aligned}$$

Für den Tangentenwinkel τ ergibt sich bei dieser Lagerung des Übergangsbogens wegen

$$\dot{\tau}(l) = \frac{d\tau}{dl}(l) = \kappa(l) \quad (2)$$



Figur 2

die Beziehung

$$\tau(l) = \int_{\lambda=0}^l \dot{\tau}(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda=0}^l \kappa(\lambda) d\lambda, \quad 0 \leq l \leq \Delta l. \quad (3)$$

Das Krümmungsgesetz $l \mapsto \kappa(l)$ wird man innerhalb des durch (1) gegebenen Rahmens wegen (2) oder (3) natürlich so wählen, daß es eine möglichst elementare Stammfunktion hat. Dies nicht so sehr, um eine einfache Formel für den Tangentenwinkel τ zu haben, als vielmehr wegen

$$(\dot{x}(l), \dot{y}(l)) = (\cos\tau(l), \sin\tau(l)), \quad (4)$$

bzw.

$$(x(l), y(l)) = \left(\int_{\lambda=0}^l \cos\tau(\lambda) d\lambda, \int_{\lambda=0}^l \sin\tau(\lambda) d\lambda \right), \quad (5)$$

$0 \leq l \leq \Delta l$; d. h. je einfacher τ , desto einfacher die nachfolgende Integration zu den kartesischen Koordinaten des Übergangsbogens.

3. Auswahl

Wir haben also, vgl. Fig. 1, im l - κ -Diagramm den Ordinatenunterschied von κ_0 bis κ_1 in differenzierbarer Weise zu überbrücken, und dafür steht ein Abszissenabschnitt der Länge Δl zur Verfügung. Drei Möglichkeiten springen dabei sofort ins Auge: a) Anpassung mit einer Sinuslinie, b) Anpassung mit einem Ellipsenradius, c) Anpassung mit zwei Parabeln. Diese Ansätze sind in der folgenden Tabelle etwas weiter ausgeführt:

Fall	$\kappa(l)$	$\tau(l)$
a)	$\kappa_0 + \frac{\kappa_1 - \kappa_0}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi l}{\Delta l}\right) \right]$	$\frac{\kappa_0 + \kappa_1}{2} l - \frac{(\kappa_1 - \kappa_0)\Delta l}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi l}{\Delta l}\right)$
b)	$\sqrt{\kappa_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi l}{2\Delta l}\right) + \kappa_1^2 \sin^2\left(\frac{\pi l}{2\Delta l}\right)}$	$\frac{2\kappa_0\Delta l}{\pi} E\left(\frac{\pi l}{2\Delta l}, \frac{\kappa_0^2 - \kappa_1^2}{\kappa_0^2}\right)$
c)	$\begin{cases} \kappa_0 + al^b & , 0 \leq l \leq \Delta l/2 \\ \kappa_1 - a(\Delta l - l)^b & , \Delta l/2 < l \leq \Delta l \end{cases}$	$\begin{cases} \kappa_0 l + \frac{a}{b+1} l^{b+1} & , 0 \leq l \leq \Delta l/2 \\ \text{siehe (9)} & , \Delta l/2 < l \leq \Delta l \end{cases}$

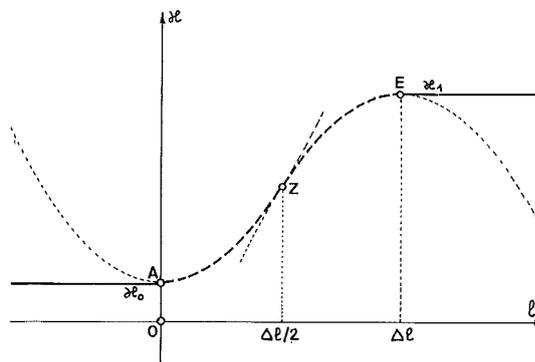
Im Hinblick auf (5) ist es wohl angezeigt, die Integration gliedweise auszuführen, und zwar am besten in der komplex zusammengefaßten Form

$$\begin{aligned} x(l) + iy(l) &= \int_0^l (\cos + i \sin)(\tau(\lambda)) d\lambda = \int_0^l \exp(i\tau(\lambda)) d\lambda \\ &= \int_0^l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\tau(\lambda))^n}{n!} d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^l \tau^n(\lambda) d\lambda; \end{aligned} \quad (6)$$

Konvergenzschwierigkeiten entstehen hier wegen der beständigen Konvergenz der Sinus- und Cosinusreihe nicht. Praktisch entstehen aber für große Argumente doch Schwierigkeiten, wegen des Alternierens der Glieder in der Sinus- und Cosinusreihe, was Stellenverlust zur Folge hat, so daß für große Argumente doppelte Genauigkeit erforderlich sein kann.

Unter dem Gesichtspunkt der gliedweisen Integration scheidet Fall a) als zu unwegsam aus. Fall b) ist wegen der mangelnden Anpassungsfähigkeit an die Grenzsituationen, daß κ_0 oder κ_1 null wird (Übergang Gerade-Kreis oder umgekehrt) unbrauchbar. Bleibt also nur Fall c), d. h. das Krümmungsgesetz

$$\kappa(l) = \begin{cases} \kappa_0 + al^b & 0 \leq l \leq \Delta l/2, \\ \kappa_1 - a(\Delta l - l)^b & \Delta l/2 < l \leq \Delta l, \end{cases} \quad (7)$$



Figur 3

das der Figur 3 entspricht. Der Ansatz beinhaltet $\kappa(0) = \kappa_0$, $\kappa(\Delta l) = \kappa_1$; für die Stetigkeit an der Stelle $\Delta l/2$ müssen sich die Parabeln in Z schneiden, also

$$\begin{aligned} \kappa\left(\frac{\Delta l}{2} - 0\right) &= \kappa\left(\frac{\Delta l}{2} + 0\right) \text{ sein, d. h.} \\ a &= \frac{\kappa_1 - \kappa_0}{2(\Delta l/2)^b}. \end{aligned} \quad (8)$$

Für die Ableitung der Krümmung ergibt sich

$$\kappa'(l) = \begin{cases} a b l^{b-1} & , 0 \leq l \leq \Delta/2 \\ a b (\Delta - l)^{b-1} & , \Delta/2 < l \leq \Delta \end{cases}$$

woraus einerseits $\kappa'(\Delta/2 - 0) = \kappa'(\Delta/2 + 0)$, also die Differenzierbarkeit bei $\Delta/2$, andererseits

$$b > 1 \Rightarrow \kappa'(0) = 0, \kappa'(\Delta) = 0$$

zu ersehen ist. Unser Krümmungsgesetz (7) erfüllt also die Rahmenbedingungen (1) nur für $b > 1$. Alle numerierten Formeln gelten aber auch für den Sonderfall $b = 1$ (affin-lineares Wachstum der Krümmung, Klothoide).

4. Diskussion

Aufgrund unseres Krümmungsgesetzes (7) überbrücken wir die Krümmung von κ_0 bis κ_1 auf der Strecke Δl in zwei Raten, und zwar von 0 bis $\Delta l/2$ mit dem Wachstum

$$\kappa(l) = \kappa_0 + a l^b,$$

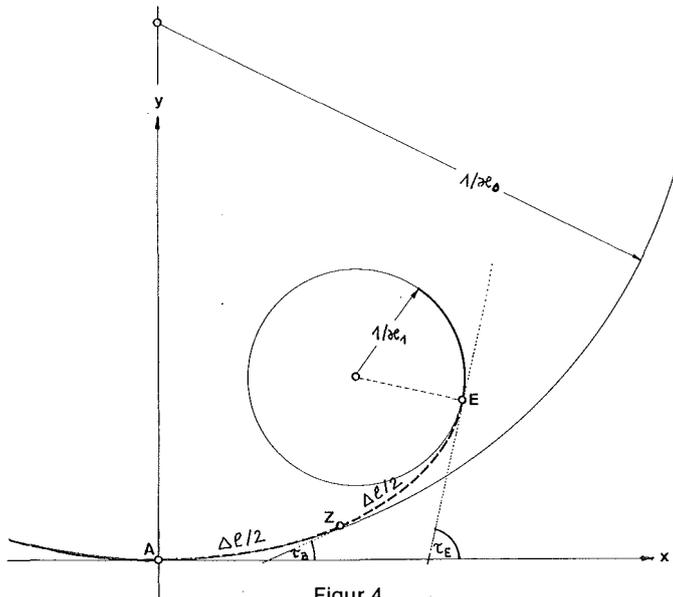
wobei im Zwischenpunkt Z die Krümmung

$$\kappa(\Delta l/2) = \frac{\kappa_0 + \kappa_1}{2}$$

auftritt, und von $\Delta l/2$ bis Δl mit dem gleichartigen Wachstumsgesetz

$$\kappa(l) = \kappa_1 - a (\Delta l - l)^b,$$

das die Änderung vom Wert $(\kappa_0 + \kappa_1)/2$ in Z bis zum Wert κ_1 in E besorgt.



Figur 4

Sieht man von Bewegungen und Spiegelungen in der Ebene ab, so ist die erste Hälfte des Übergangsbogens von A bis Z mit den Angaben $b, \kappa_0, \kappa_1, \Delta l$ gleich wie die zweite, von E aus gesehene Hälfte mit den Angaben $b, \kappa_1, \kappa_0, \Delta l$. Diese Bemerkung wird später für die praktische Rechnung wesentlich werden.

Für den Tangentenwinkel bekommt man gemäß (3) aus (7) die Formel

$$\tau(l) = \begin{cases} \kappa_0 l + \frac{a}{b+1} l^{b+1}, & 0 \leq l \leq \Delta l/2, \\ \tau(\Delta l/2) + \kappa_1 \cdot \left(1 - \frac{\Delta l}{2}\right) + \frac{a}{b+1} [(\Delta l - l)^{b+1} - (\Delta l/2)^{b+1}], & \frac{\Delta l}{2} < l \leq \Delta l. \end{cases} \quad (9)$$

Speziell ergibt sich für den Tangentenwinkel im Zwischen- und Endpunkt

$$\tau_Z = \tau(\Delta l/2) = \frac{\Delta l}{2} \left(\kappa_0 + \frac{\kappa_1 - \kappa_0}{2(b+1)} \right), \quad (10-1)$$

$$\tau_E = \tau(\Delta l) = \frac{\kappa_0 + \kappa_1}{2} \Delta l. \quad (10-2)$$

Zur Berechnung der kartesischen Koordinaten von Punkten auf der ersten Hälfte des Übergangsbogens ($0 \leq l \leq \Delta l/2$) gehen wir gemäß (6) vor:

$$\begin{aligned} \tau(l) &= \kappa_0 l + \frac{a}{b+1} l^{b+1}, \\ \tau^n(l) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{a}{b+1} \right)^k \kappa_0^{n-k} l^{n+bk}, \\ \int_{\lambda=0}^l \tau^n(\lambda) d\lambda &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{a}{b+1} \right)^k \kappa_0^{n-k} \frac{l^{n+bk+1}}{n+bk+1}, \end{aligned} \quad (11-1)$$

$$z(l) = x(l) + iy(l) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{\tau=0}^l \tau^n(\lambda) d\lambda, \quad 0 \leq l \leq \Delta l/2. \quad (11-2)$$

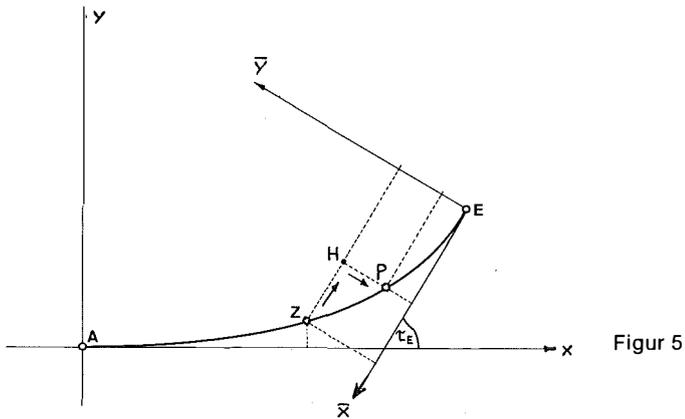
In der im 6. Abschnitt aufgelisteten COMPLEX FUNCTION $Z(\dots)$ sind für den Fall $0 \leq l \leq \Delta l/2$ die letzten beiden Zeilen programmiert, wobei die Summation in (11-2) abgebrochen wird, sobald zwei aufeinanderfolgende Glieder die Partialsumme praktisch nicht mehr ändern (genauer: Quadratsummennorm des letzten Gliederpaares / Betrag der Partialsumme $\leq RG$, wobei RG eine vorgegebene Größe ist).

Bei der Berechnung der kartesischen Koordinaten von Punkten auf der zweiten Hälfte des Übergangsbogens ($\Delta l/2 < l \leq \Delta l$) könnte man genau so vorgehen wie bei der ersten Hälfte, wobei als wesentlichster Unterschied die Notwendigkeit, den trinomischen Lehrsatz anzuwenden, auftritt.

Eine andere Möglichkeit ist die, für $l > \Delta l / 2$ mit der Bogenlänge $\Delta l - l$ und den Angaben $b, \kappa_1, \kappa_0, \Delta l$ das bereits vorhandene Programm von der Tangente in E her auszunützen, und den Rest durch eine Koordinatentransformation zu besorgen.

Sind \bar{x}_z, \bar{y}_z die Koordinaten des Zwischenpunktes Z im quergestrichenen System des Endpunktes E und \bar{x}, \bar{y} die des Punktes P im gleichen System, so bekommt man P im ursprünglichen System, indem man von Z um die Strecke $\bar{x}_z - \bar{x}$ unter dem Winkel τ_E nach H geht, und von dort um die Strecke $\bar{y}_z - \bar{y}$ unter dem Winkel $\tau_E - \pi/2$ weiter zum gesuchten Punkt P.

Das Ergebnis dieser Überlegung ist



$$x(l) + iy(l) = (x_z + iy_z) + [(\bar{x}_z + i\bar{y}_z) - (\bar{x} + i\bar{y})] \cdot \exp(i\tau_E), \quad \Delta l / 2 < l \leq \Delta l. \quad (12)$$

Diese Formel ist unter Benutzung der FUNCTION Z (...) in der SUBROUTINE KLOTHO (...) programmiert.

5. Querneigung

Durchfährt ein Fahrzeug mit konstanter Geschwindigkeit v den in Abschnitt 4 diskutierten Übergangsbogen, so ist, wenn t die Zeit bedeutet,

$$l(t) = vt,$$

womit für Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor in Funktion der Zeit die Darstellungen

$$\begin{aligned} (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) &= (x(l(t)), y(l(t))), \\ (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) &= v \cdot (\cos\tau(l(t)), \sin\tau(l(t))), \\ (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) &= v \cdot (-\sin\tau(l(t)), \cos\tau(l(t))) \cdot \frac{d\tau}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = \\ &= v^2 \kappa \cdot (-\sin\tau(l(t)), \cos\tau(l(t))) \end{aligned}$$

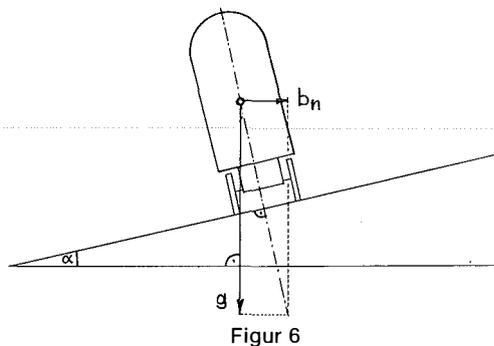
gelten.

Letzteres ist der Beschleunigungsvektor; da $(-\sin\tau, \cos\tau)$ der Normaleneinheitsvektor ist, sehen wir, daß das Fahrzeug bei konstanter Geschwindigkeit nur eine Normalbeschleunigung vom Betrag

$$b_n(l) = v^2 \kappa(l)$$

erleidet; soll die Unterlage des Fahrzeuges auf der Resultierenden aus Normal- und Erdbeschleunigung senkrecht stehen, so ist die Querneigung, vgl. Fig. 6, gemäß

$$\alpha(l) = \arctan\left(\frac{b_n}{g}\right) = \arctan\left(\frac{v^2}{g} \kappa(l)\right)$$



Figur 6

zu wählen. Damit ist, da \arctan und κ differenzierbar sind, auch die Querneigung α eine differenzierbare Funktion der Bogenlänge. Sprünge und Knicke treten also nun in Querneigung und Anrampung nicht mehr auf.

6. Programme

Im folgenden sind drei Unterprogramme aufgelistet, die zur Berechnung der kartesischen Koordinaten des Übergangsbogens dienen können.

```

COMPLEX FUNCTION Z (B, RK0, RK1, DL, RL, RG)
C
C   DIESES PROGRAMM BENÖTIGT DIE FUNCTION FAK
C   ES MUESSEN FÖLGENDE BEDINGUNGEN ERFUELLT SEIN
C   RK0, RK1, RL .GE.0.,
C       DL, RG .GT.0.,
C       B .GE.1..
C   ES ERGIBT SICH FUER
C   RK0 = RK1 = 0. .... GERADENSTUECK,
C   RK0 = RK1 .GT.0. .... KREISSTUECK,
C   RK0, RK1  VERSCHIE-
C   DEN .....UEBERGANGSBÖGEN, UND ZWAR

```

```

C          B = 1. ....KLØTHØIDE,
C          B.GT.1. ....KRUEMMUNGABLEITUNG AN DEN ENDEN
                DES UEBERGANGSBØGENS NULL.
COMPLEX PS, GL0, GL1, CRL, CRLN
A1 = 0.5*(RK1 - RK0) / ((B + 1.)*(0.5*DL)**B)
TØL = 1.E-50
IF (RL.GE.TØL) GØTØ 1
RLB = 0.
GØTØ 2
1  RLB = RL**B
2  AL = A1*RLB
   N = 0
   GL0 = RL* (1., 0.)
   PS = GL0
   CRL = RL* (0., 1.)
   FN = 1.
   RK0N = 1.
   ALN = 1.
   CRLN = (1., 0.)
3  N = N + 1
   REN = FLØAT (N)
   FN = FN*REN
   RK0N = RK0N*RK0
   ALN = ALN*AL
   CRLN = CRLN*CRL
   IF (ABS (RK0).GT.TØL) GØTØ 5
   H1 = ALN / (FN* (REN + 1. + B*REN))
   GØTØ 4
5  H1 = RK0N / (FN* (REN + 1.))
   IF (RL.LE.TØL.ØR.ABS (A1).LE.TØL) GØTØ 4
   RRK0 = 1./RK0
   ALK = 1.
   RK0NK = RK0N
   DØ 6 K = 1,N
   ALK = ALK*AL
   RK0NK = RK0NK*RRK0
   NK = N - K
   H2 = ALK*RK0NK / (FAK (K)*FAK (NK)*(REN + 1. + B*FLØAT (K)))
6  H1 = H1 + H2
4  GL1 = RL*CRLN*H1
   PS = PS + GL1
   VER = SQRT (CABS (GL0)**2 + CABS (GL; )**2)
   IF (VER.LE.RG*ABS (PS)) GØTØ 7
    
```

```

      GL0 = GL1
      GOTO 3
7     Z = PS
      RETURN
      END

```

Die Kompliziertheit der COMPLEX FUNCTION Z (..) beruht im wesentlichen darauf, daß alle Exponentiationen in Multiplikationen aufgelöst werden mußten, um auch die Randfälle $\kappa_0 = 0$, $\kappa_1 = 0$, $\kappa_0 = \kappa_1$ mitzuerfassen (vgl. 7. Beispiele). Das folgende Programm wird vom vorigen benötigt.

```

      REAL FUNCTION FAK (N)
C
C     BERECHNET N-FAKULTAET ALS REALGRÖESSE
      H = 1.
      IF (N.EQ.0) GOTO 2
      DO 1 I = 1, N
1     H = H*FLOAT (I)
2     FAK = H
      RETURN
      END

```

Die nun folgende SUBROUTINE KLOETHO führt, falls erforderlich, die erwähnte Koordinatentransformation durch und spaltet $z = x + iy$ in kartesische Koordinaten x , y auf.

```

      SUBROUTINE KLOETHO (B, RK0, RK1, DL, RL, RG, X, Y)
C
C     COMPLEX Z, ZL, ZZ, ZQZ, ZQL
      DLH = 0.5*DL
      IF (RL.LE.DLH) GOTO 1
      TAUE = DLH* (RK0 + RK1)
      ZZ = Z (B, RK0, RK1, DL, DLH, RG)
      ZQZ = Z (B, RK1, RK0, DL, DLH, RG)
      ZQL = Z (B, RK1, RK0, DL, DL-RL, RG)
      ZL = ZZ + CONJG (ZQZ-ZQL)*CEXP (TAUE*(0., 1.))
      GOTO 2
1     ZL = Z (B, RK0, RK1, DL, RL, RG)
2     X = REAL (ZL)
      Y = AIMAG (ZL)
      RETURN
      END

```

Für die praktische Arbeit wird man sich zweckmäßiger Weise noch einige

ergänzende Programme schreiben, die jedoch nach Erfordernis verschieden ausfallen werden (Trassenplanung, Absteckungsgrößen etc.).

7. Beispiele

Die obigen Programme wurden weitgehend getestet. Unter anderem wurden die Tests A, B, C, D ausgeführt.

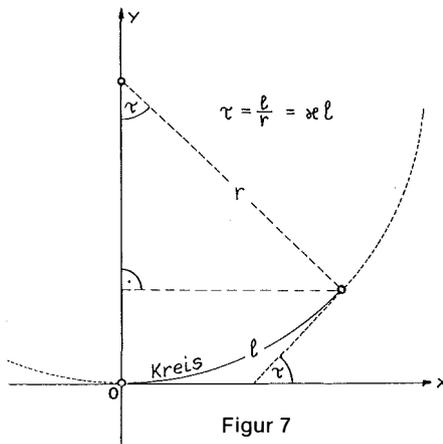
Test A: $\kappa_0 = 0.1 = 1/10, \kappa_1 = 0.2 = 1/5, \Delta l = 20, b = 1, 2.$

Es ist dies der Standardfall eines Übergangsbogens zwischen zwei Kreisen.

Test B: $\kappa_0 = 0, \kappa_1 = \Delta l = 4 = 1/0.25, b = 1, 2.$ Hier ergibt sich im Fall $b = 1$ wegen $\kappa_1 = \Delta l$ die Einheitsklothoide. Vergleich mit den kongruenten, vom Ende her gerechneten Übergangsbögen zu den Angaben $\kappa_0 = \Delta l = 4, \kappa_1 = 0, b = 1$ und 2.

Test C: $\kappa_0 = \kappa_1 = 1, \Delta l = n \cdot 2\pi.$ Es läßt sich durch Spezialisierung der entsprechenden Formeln leicht zeigen, daß die Funktion $z(l) = x(l) + iy(l)$, die ja außer von l auch noch von den Parametern $b, \kappa_0, \kappa_1, \Delta l$ abhängt, für $\kappa_0 = \kappa_1 =: \kappa > 0$ eine Parameterdarstellung des Kreises mit dem Radius $1/\kappa =: r$ liefert, siehe Figur 7, denn

$$z(l) = \frac{1}{i\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(il\kappa)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{i\kappa} (\exp(il\kappa) - 1) = r \sin \tau + i(r - r \cos \tau).$$



Figur 7

Der Testfall C ist besonders bemerkenswert, weil man an ihm wegen der Periodizität von $l \mapsto z(l)$ mit der Periode $2\pi/\kappa$ (= Umfang des Kreises) sehr gut den numerischen Zusammenbruch der Funktion $Z(\dots)$ infolge des schon erwähnten „exp(-x)-Effektes“ beobachten kann.

Test D: Die stetige Abhängigkeit der Funktion $l \mapsto z(b, \kappa_0, \kappa_1, \Delta l, l)$ vom Parameter b an der Stelle $b = 1$ kann in gewisser Weise durch Darstellung der Übergangskurve für $b = 2, 1.5, 1.1, 1.01, \dots, 1$ überprüft werden.

8. Zusammenfassung

Insgesamt löst für $b > 1$ die Übergangskurve mit dem Krümmungsgesetz $l \mapsto \kappa(l) = \kappa_0 + a l^b$, $0 \leq l \leq \Delta l/2$ (und einem entsprechenden im zweiten Teilintervall), das Problem des differenzierbaren Übergangs der Krümmung in einfacher Weise.

Der Fall $b = 1$ (Klothoide) ist als Sonderfall mitenthalten, in diesem Fall geht aber die Differenzierbarkeit der Krümmung an den Enden des Übergangsbogens verloren.

Soll die Trassierung mit differenzierbarem Krümmungsverlauf nicht allzu sehr von der mit Gerade, Kreis und Klothoide abweichen, besteht die Möglichkeit, b nur wenig größer als 1 zu wählen: die Schar der Krümmungsgesetze (7) mit dem Scharparameter b geht für $b \rightarrow 1$ stetig in den affin-linearen Fall der Klothoide über.

Das mehrfach angesprochene numerische Problem tritt (in Abhängigkeit der Stellenzahl bei der Rechnung) erst ein, wenn der Tangentenwinkel τ mehrere Vielfache von 2π beträgt (12stellige Testrechnungen: Zusammenbruch bei 7π). Für die in der Praxis vorkommenden Übergangsbögen ist dieses Problem also nicht von Bedeutung.

Über die Gauß-Krüger-Abbildung

Von *Erhart Ecker*, Gießen

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die bekannte konforme Gauß-Krüger-Abbildung des Rotationsellipsoids unter numerischen Aspekten untersucht.

Contents

In this paper the well-known Gauß-Krüger-map (transversal Mercator map) is discussed under numerical aspects.

1. Einleitung

Wir betrachten das abgeplattete Rotationsellipsoid mit den Halbachsen a , b , wobei $a > b > 0$, oder mit anderen Worten die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

wobei die Lösungen $X = (x, y, z)$ gerade die Punkte der Ellipsoidoberfläche bilden. Die Funktion