Paper-ID: VGI_197705

Ersatz der Helmerttransformation durch die Drei-Parameter-Transformation bei lokalen Umformungen

Gernot Windholz [1]

[1] *A-8950 Stainach 194*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **65** (2), S. 57–63

1977

BibTEX:

```
@ARTICLE{Windholz_VGI_197705,
Title = {Ersatz der Helmerttransformation durch die Drei-Parameter-
   Transformation bei lokalen Umformungen},
Author = {Windholz, Gernot},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen und
   Photogrammetrie},
Pages = {57--63},
Number = {2},
Year = {1977},
Volume = {65}
}
```

Die Gleichungen (2) und (3) gelten streng nur für ideal gefertigte Achsen, werden also in der Praxis durch Taumelfehler der Stehachse beeinflußt. Daher verläuft die Neigung nicht genau sinusförmig – ein Grund mehr, die grafische Lösung der Formel vorzuziehen. Aufgrund eingehender Untersuchungen [1] kann der mittlere Einfluß der Taumelfehler mit ± 1–2" angesetzt werden, die Stativverwindungen betragen etwa die Hälfte davon. Bei Visurneigungen bis 30° bleibt demnach die Meßgenauigkeit eines Sekundentheodolits von ± 1" fast erhalten.

Für steilere Visuren oder höchste Genauigkeitsansprüche sei empfohlen, nach der Hälfte der vorgesehenen Richtungssätze den Theodolitunterbau auf dem Stativ um 180° zu verdrehen. Im Mittel entfallen dadurch alle Taumelfehler mit ungerader Periode, außerdem wird eine eventuelle Dejustierung des optischen Lotes unwirksam.

Literatur

[1] *Gerstbach, G.:* Zur Azimutmessung mit Sekundentheodoliten. Ö.Z.f.V.u.Ph., Jg. 64, S. 53–68, Wien 1977.

[2] *Kern & Co. A.G.:* Sekundentheodolit Kern DKM2-A mit Kippachsmikrometer. Bulletin Nr. 24, Aarau 1976.

Ersatz der Helmerttransformation durch die Drei-Parameter-Transformation bei lokalen Umformungen

Von *Gernot Windholz,* Stainach

1. Einleitung

Prof. K. Kraus beschreibt in „Verschiedene Transformationen und Indikatoren zur Lokalisierung grober Datenfehler" (AVN 82, S. 23–34, 1975) unter anderem den Unterschied zwischen der Helmerttransformation und der Drei-Parameter-Transformation beim Aufsuchen grober Datenfehler. Unabhängig von den Vorteilen der Drei-Parameter-Transformation bei der Suche von groben Datenfehlern ist diese Transformation in bestimmten Fällen aber auch besser zur eigentlichen Transformation geeignet als die gebräuchliche Helmerttransformation.

Die Koordinatentransformation nach Helmert ist das Ergebnis einer Ausgleichsrechnung. Zur eindeutigen Bestimmung der vier Transformationselemente sind zwei idente Punkte in zwei Koordinatensystemen erforderlich. Jeder weitere Punkt liefert eine Überbestimmung und wird zur Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate verwendet.

Die Umformung des alten Systems in das neue erfolgt durch Drehung, Translation und Maßstabskorrektur in der Weise, daß nach der Transformation die Quadratsumme der Fehler der identen Punkte zu einem Minimum wird.

Die Maßstabskorrektur ist für die Transformation großräumiger Gebiete erforderlich. Sie bewirkt unter anderem eine Angleichung unterschiedlicher Projektionen.

Gänzlich anders liegen die Verhältnisse jedoch bei der kleinräumigen Transformation, wo Projektionsverzerrungen bzw. eine Reduktion auf das Meeresniveau nur eine untergeordnete Rolle spielen.

In der geodätischen Praxis tritt speziell durch das immer dichter werdende Festpunktfeld die Notwendigkeit auf, ältere, auf einem lokalen Koordinatensystem basierende Aufnahmen in ein übergeordnetes System überzuführen. Durch die Aufnahme einiger identer Punkte kann eine Transformation der gesamten alten Aufnahme oder Teile von ihr in das neue System erfolgen.

Da die Lage der Grenzpunkte erfahrungsgemäß nicht gänzlich unverändert bleibt, wird es, abgesehen von Meßungenauigkeiten, zu Differenzen zwischen den beiden Systemen kommen. Falls diese nicht zu groß sind, werden die Punkte zur Berechnung der Transformationselemente verwendet. Treten grobe Fehler auf, können die von K. Kraus in der einleitend zitierten Veröffentlichung angegebenen Indikatoren herangezogen werden.

Im Anschluß daran können die Fehler an den identen Punkten sowie der mittlere Punktlagefehler berechnet werden. Bei der Helmerttransformation wird jedoch der Einfluß, der durch eine fehlerhafte Maßstabskorrektur entsteht, nicht berücksichtigt. Es kann vorkommen, daß sämtliche Fehler verschwindend klein werden, die Dehnung oder Stauchung des alten Systems durch die Transformation aber zu beträchtlichen Flächenfehlern führt. Dieser Effekt tritt umso stärker und unkontrollierbarer auf, je kleiner der Bereich der identen Punkte im Vergleich zum gesamten zu transformierenden Gebiet ist.

Durch die Verwendung der Drei-Parameter-Transformation kann nun bei Beibehaltung der übrigen Vorzüge der Helmerttransformation die störende Auswirkung der Maßstabskorrektur ausgeschaltet werden.

2. Helmerttransformation

Die Transformationsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} y'' &= y' \,.\, v \,.\, \cos ß - x' \,.\, v \,.\, \sin ß + dy \\ x'' &= x' \,.\, v \,.\, \sin ß + y' \,.\, v \,.\, \cos ß + dx \end{aligned} \qquad (1)$$

wobei y'', x'' die transformierten Werte
y', x' die Werte im alten System
v den Maßstabsfaktor
$ß$ den Drehwinkel
und dy, dx die Verschiebungsanteile bedeuten.

Die Auflösung der mit Hilfe von Verbesserungsgleichungen aufgestellten Normalgleichungen liefert die Transformationselemente:

$$v \cdot \cos \beta = \frac{[xx' + yy'] - \frac{[x].[x']}{n} - \frac{[y].[y']}{n}}{[x'x' + y'y'] - \frac{[x']^2}{n} - \frac{[y']^2}{n}}$$

$$v \cdot \sin \beta = \frac{[xy' - yx'] - \frac{[x].[y']}{n} + \frac{[y].[x']}{n}}{[x'x' + y'y'] - \frac{[x']^2}{n} - \frac{[y']^2}{n}} \tag{2}$$

$$\text{und } dy = \frac{[y] + [x'] \cdot v \cdot \sin \beta - [y'] \cdot v \cdot \cos \beta}{n}$$

$$dx = \frac{[x] - [y'] \cdot v \cdot \sin \beta - [x'] \cdot v \cdot \cos \beta}{n} \tag{3}$$

y, x, y' und x' sind die Koordinaten im neuen bzw. alten System, n ist die Anzahl der identen Punkte.

Durch die Einführung von Schwerpunktskoordinaten im alten System ($\bar{y}'$ und $\bar{x}'$) ergibt sich eine Vereinfachung der Formeln (2) zu:

$$v \cdot \cos \beta = \frac{[x\bar{x}' + y\bar{y}']}{[\bar{x}'\bar{x}' + \bar{y}'\bar{y}']}$$

$$v \cdot \sin \beta = \frac{[x\bar{y}' - y\bar{x}']}{[\bar{x}'\bar{x}' + \bar{y}'\bar{y}']} \tag{2'}$$

Der Maßstabsfaktor v wird nirgends explizit berechnet und daher kaum beachtet.

3. Drei-Parameter-Transformation

Zur Elimination des Maßstabsfaktors stehen nun zwei Möglichkeiten zur Verfügung:

3.1. Direkte Methode: Ausschalten des Maßstabsfaktors durch das Aufstellen neuer Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned} y'' &= \bar{y}' \cdot \cos \beta - \bar{x}' \cdot \sin \beta + dy \\ x'' &= \bar{x}' \cdot \sin \beta + \bar{y}' \cdot \cos \beta + dx \end{aligned} \tag{4}$$

Die Auflösung erfolgt sinngemäß gleich wie die der Gleichungen (1) und führt zu folgenden Transformationselementen:

$$\cos \beta = \frac{[x\bar{x}' + y\bar{y}']}{\sqrt{[x\bar{x}' + y\bar{y}']^2 + [x\bar{y}' - y\bar{x}']^2}} \tag{5}$$

$$\sin ß = \frac{[x\bar{y}' - y\bar{x}']}{\sqrt{[x\bar{x}' + y\bar{y}']^2 + [x\bar{y}' - y\bar{x}']^2}}$$

$$\text{und } dy = \frac{[y]}{n} \qquad (6)$$

$$dx = \frac{[x]}{n}$$

wobei bei diesen Formeln die Koordinaten des alten Systems wiederum auf ihren Schwerpunkt bezogen sind.

3.2. Indirekte Methode: Ausschalten des Maßstabsfaktors nach der Berechnung der Transformationselemente mit Hilfe der Helmerttransformation:

$$\cos ß = \frac{v \,.\, \cos ß}{v}$$

$$\sin ß = \frac{v \,.\, \sin ß}{v} \qquad (7)$$

$$\text{mit } v = \sqrt{v^2 \,.\, \cos^2 ß + v^2 \,.\, \sin^2 ß}$$

Wenn man hier die Gleichungen (2') einsetzt, ergeben sich die Gleichungen (5).

Beide Methoden führen also zum gleichen Ziel, die zweite Methode gestattet jedoch bei Berücksichtigung der Gleichungen (7) die unveränderte Übernahme des Vordruckes V 246*).

Abschließend sei noch vermerkt, daß durch den Wegfall des Maßstabsfaktors bereits durch zwei idente Punkte eine Überbestimmung vorliegt und eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate erfolgt.

Je besser die Paßpunkte übereinstimmen, umso kleiner wird der Unterschied der beiden Transformationsmethoden. Die aufgezeigte Variante bietet dabei die Möglichkeit, durch die Verzerrungsfreiheit auch nicht sehr gut übereinstimmende Koordinatensysteme ineinander überzuführen. Dabei kann die Wahrung der zulässigen Fehlergrenzen durch die tatsächlichen Punktlagefehler kontrolliert werden.

An Hand von drei Beispielen wird nun gezeigt, wie sich die beiden Methoden auf die Ergebnisse der Transformation auswirken. Dazu wurden die Transformation nach Helmert sowie die Drei-Parameter-Transformation für die Olivetti P 203 programmiert. Eine Umschreibung auf andere Fabrikate bietet jedoch keine Schwierigkeiten.

*) Vordruck 246 vom Bundesvermessungsdienst vom 15. 4. 1948

4. Beispiele

1. Beispiel

a) Helmerttransformation

Eingabe der identen Punkte

Pkt. Nr.	Altes System		Neues System	
1	100.00	100.00	100.00	100.00
2	100.20	100.20–	100.00	100.00–
3	100.00–	100.00–	100.00–	100.00–
4	100.20–	100.20	100.00–	100.00

	Ausgabe der transformierten Werte				Fehler	
1	100.00	100.00	99.90	99.90	0.10–	0.10–
2	100.20	100.20–	100.10	100.10–	0.10	0.10–
3	100.00–	100.00–	99.90–	99.90–	0.10	0.10
4	100.20–	100.20	100.10–	100.10	0.10–	0.10

Fläche 40080 m^2 Fläche 40000 m^2

b) Drei-Parameter-Transformation

1	100.00	100.00	100.00	100.00
2	100.20	100.20–	100.00	100.00–
3	100.00–	100.00–	100.00–	100.00–
4	100.20–	100.20	100.00–	100.00

1	100.00	100.00	100.00	100.00	0.00–	0.00–
2	100.20	100.20–	100.20	100.20–	0.20	0.20–
3	100.00–	100.00–	100.00–	100.00–	0.00–	0.00–
4	100.20–	100.20	100.20–	100.20	0.20–	0.20

Fläche 40080 m^2 Fläche 40080 m^2

Bei der Transformation nach Helmert wird eine gleichmäßige Anpassung an auch offensichtlich fehlerhafte Punkte erzwungen. Es besteht keine Möglichkeit, die schlechter passenden Punkte aufgrund der Differenz von Soll- und Ist-Lage zu erkennen.

Bei der Drei-Parameter-Transformation sind die beiden schlecht passenden Punkte 2 und 4 sofort zu erkennen und können ausgeschieden werden.

Außerdem wird bei der Drei-Parameter-Transformation die Originalfläche des alten Systems unverändert in das neue System übertragen. Bei der Transformation mit Maßstabskorrektur tritt eine beträchtliche Flächenveränderung auf. Diese wird, wie das nächste Beispiel zeigt, bei Zusammenrücken der identen Punkte immer größer.

2. Beispiel:

a) Helmerttransformation

Eingabe der identen Punkte

Pkt. Nr.	Altes System		Neues System	
1	10.00	10.00	10.00	10.00
2	10.20	10.20–	10.00	10.00–
3	10.00–	10.00–	10.00–	10.00–
4	10.20–	10.20	10.00–	10.00

Ausgabe der transformierten Werte: Fehler

					Fehler	
1	10.00	10.00	9.90	9.90	0.10–	0.10–
2	10.20	10.20–	10.10	10.10–	0.10	0.10–
3	10.00–	10.00–	9.90–	9.90–	0.10	0.10
4	10.20–	10.20	10.10–	10.10	0.10–	0.10

Fläche 408 m^2 Fläche 400 m^2

b) Drei-Parameter-Transformation

1	10.00	10.00	10.00	10.00
2	10.20	10.20–	10.00	10.00–
3	10.00–	10.00–	10.00–	10.00–
4	10.20–	10.20	10.00–	10.00

1	10.00	10.00	10.00	10.00	0.00	0.00
2	10.20	10.20–	10.20	10.20–	0.20	0.20–
3	10.00–	10.00–	10.00–	10.00–	0.00–	0.00–
4	10.20–	10.20	10.20–	10.20	0.20–	0.20

Fläche 408 m^2 Fläche 408 m^2

3. Beispiel

a) Helmerttransformation

Eingabe der identen Punkte

Pkt. Nr.	Altes System		Neues System	
1	100.20	100.20	100.00	100.00
2	100.20	100.20–	100.00	100.00–
3	100.20–	100.20–	100.00–	100.00–
4	100.20–	100.20	100.00–	100.00

	Ausgabe der transformierten Werte				Fehler	
1	100.20	100.20	100.00	100.00	0.00–	0.00–
2	100.20	100.20–	100.00	100.00–	0.00–	0.00
3	100.20–	100.20–	100.00–	100.00–	0.00	0.00
4	100.20–	100.20	100.00–	100.00	0.00	0.00–

Fläche 40160 m² Fläche 40000 m²

b) Drei-Parameter-Transformation

1	100.20	100.20	100.00	100.00
2	100.20	100.20–	100.00	100.00–
3	100.20–	100.20–	100.00–	100.00–
4	100.20–	100.20	100.00–	100.00

1	100.20	100.20	100.20	100.20	0.20	0.20
2	100.20	100.20–	100.20	100.20–	0.20	0.20–
3	100.20–	100.20–	100.20–	100.20–	0.20–	0.20–
4	100.20–	100.20	100.20–	100.20	0.20–	0.20

Fläche 40160 m² Fläche 40160 m²

Dieses Beispiel zeigt, daß nach der gebräuchlichen Transformationsmethode ein Fehler unter Umständen gar nicht erkannt wird, obwohl er, wie die zweite Berechnungsmethode zeigt, bei allen identen Punkten vorhanden ist. Die erste Berechnung täuscht also eine Übereinstimmung der Punkte vor, die in Wirklichkeit nicht gegeben ist.

Von der photogrammetrischen Auswertung zur automatischen Zeichnung

Von *Erich Zachhuber,* Wien

Mit nachfolgender Ablaufschilderung (Beilage 1) soll gezeigt werden, welche zeitsparende, der Automation gerechtwerdende Methode für die zeichnerische Darstellung eines ausgewerteten Flugoperates durch die auch auf der Dienstvorschrift Nr. 8 „Die Österreichischen Meridianstreifen" beruhende Idee des Vorstandes der Abteilung K 5 (Elektronische Datenverarbeitung) des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, Sekt.-Rat Dipl.-Ing. Eugen Zimmermann erzielt wurde.

Die Verwirklichung dieser Idee geschah durch den Einsatz der Programme der Herren Dipl.-Ing. Eugen Zimmermann und Techn. Zentralinspektor Walter Schmitt.

Der Ablauf des Verfahrens ist historisch bedingt.