Über die Reichweite und Genauigkeit der Formeln nach Hristow zur Transformation ellipsoidisch-geographischer Koordinaten

Walter Welsch [1]

[1] *Lehrstuhl für Vermessungskunde der Hochschule der Bundeswehr München, Schwere-Reiter-Straße 35, D-8000 München 40*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **65** (1), S. 6–16

1977

Über die Reichweite und Genauigkeit der Formeln nach Hristow zur Transformation ellipsoidisch-geographischer Koordinaten

Von *Walter Welsch,* München

1. Einführung

Die Lageänderung eines geodätischen Netzes wird häufig auf geometrischer Grundlage zweidimensional-translativ durchgeführt. Hierbei wird das Netz geschlossen differentiell auf der Rechenfläche verschoben und verdreht. Oft wird auch eine Maßstabsänderung und der Übergang von einem Ellipsoid auf ein anderes notwendig. Formelsysteme für derartige Datumstransformationen wurden von Helmert [2], Hristow [3], Ölander [5], Bodemüller [1] u. a. entwickelt.

Grundlegend für vermittelnde Transformationen sind Helmerts Differentialgleichungen der geodätischen Linie auf dem Rotationsellipsoid [2]. Hristow [3] entwickelte für sie auf der Grundlage der Legendreschen Reihen rechentechnisch günstige Potenzreihen, die mit hinreichender Genauigkeit für die Transformation größerer Netze angewendet werden können und als translative Lotabweichungsgleichungen und zum Zusammenschluß von Landesnetzen zu einem einheitlichen Block Bedeutung gewannen.

Bei neueren Arbeiten besteht das Interesse, im Rahmen von Diagnoseausgleichungen Landesnetze oder kontinentale Netze vor einer Gesamtausgleichung blockweise zu untersuchen [4], [7]. Auch hier haben Hristows Formeln durch die anschließende Anfelderung eine gewisse Bedeutung.

Bei derart großräumigen Untersuchungen muß die Frage gestellt werden, ob es gerechtfertigt ist, auftretende Restklaffungen als Ergebnis einer Transformation ausschließlich mit der mehr oder minder guten Qualität der zusammengeschlossenen Netze zu begründen. Die Frage ist dann berechtigt, wenn auf Grund der Netzausdehnungen eine Verfälschung der Ergebnisse durch zu frühen Abbruch der Entwicklungen der Legendreschen Reihen und ihrer Taylorisierung zu befürchten ist. Restgliedabschätzungen zeigen, daß für größere Netzausdehnungen eine Erweiterung des bestehenden Formelsystems notwendig wird, wenn die ausgeglichenen geographischen Koordinaten und aus ihnen abgeleitete Azimute mit der üblichen Genauigkeit ausgewiesen werden sollen:

$$\begin{aligned} \varphi, \lambda &: 1'' \cdot 10^{-4} \\ \alpha &: 1'' \cdot 10^{-2} \quad (s = 100\ \text{km}). \end{aligned} \qquad \ldots (1)$$

Auf der Grundlage der weiterentwickelten Legendreschen Reihen [8] wurden deshalb die Hristowschen Potenzreihen soweit vorangetrieben, daß sie bis zur 6. Ordnung vollständig, in der 7. Ordnung noch in ihren sphärischen Anteilen vorliegen [6]. Die abgeleiteten Differentialquotienten unterscheiden sich in einigen Fällen von den Hristowschen Formeln. Der Grund liegt in der Vernachlässigung ellipsoidischer Ausdrücke in den Größen 3. Ordnung der Legendreschen Reihen. Hierauf hat auch schon Bodemüller [1] hingewiesen.

Im folgenden sei ein Überblick über die Reichweite und im Zusammenhang mit ihr über die erzielbare Transformationsgenauigkeit gegeben.

2. Glieder höherer Ordnung der Taylorentwicklung

Es ist abzuschätzen, welcher Fehler entsteht, wenn zur Berechnung der differentiellen Änderungen

$$d\varphi_2,\ d\lambda_2,\ d\alpha_{21} \qquad \ldots (2)$$

des zu transformierenden Punktes nur das vollständige Differential der Legendreschen Reihen verwendet wird, d. h. die Glieder O^2 und die höherer Ordnung bei der Taylorentwicklung nach den Veränderlichen

$$d\varphi_1,\ d\lambda_1,\ d\alpha_{12},\ \frac{ds}{s},\ \frac{da}{a},\ d\mathfrak{a} \qquad \ldots (3)$$

vernachlässigt werden. Die betragsmäßige Größe der Glieder O^2 hängt wesentlich von der Größe der Inkremente (3) ab.

Von den in den 2. Ableitungen auftretenden Größen nimmt der Ausdruck $\left(\frac{da}{a}\right)^2$ den größten Betrag an. Mit $s = 1000$ km als Entfernung des zu transformierenden Punktes vom Zentralpunkt der Transformation ergeben sich z. B. in einer Breite von $\varphi = 70°$ die folgenden Beträge:

$$\begin{aligned} |O^2(d\varphi_2)| &= |O^2(d\lambda_2)\cdot\cos\varphi| = 8'' \cdot 10^{-4}, \\ |O^2(d\alpha_{21})\cdot s| &= 2'' \cdot 10^{-2}. \end{aligned} \qquad \ldots (4)$$

Der nächstgrößere Ausdruck mit $\frac{da}{a} \cdot d\mathfrak{a}$ liegt bereits weit unter dieser Größenordnung.

Als Ergebnis der Abschätzung wird festgestellt, daß bei mittleren Entfernungen das vollständige Differential der Legendreschen Reihen nicht genügt und die Glieder O^2 der Taylorentwicklung nicht vernachlässigt werden dürfen, ohne die Genauigkeit (1) der Transformation einzuschränken.

3. Polarkoordinaten

In allen Differentialquotienten der Potenzreihen der Transformationsformeln treten Polarkoordinaten in der Form

$$s \cdot \sin\alpha,\ s \cdot \cos\alpha \qquad \ldots (5)$$

auf. Hristow betrachtet zu ihrer Elimination die Legendreschen Reihen als Potenzreihen dieser beiden Größen und gewinnt für sie Lösungen durch Reihenumkehr.

Für Netze mit Radien mittlerer Entfernung ist dieser Weg jedoch nicht mehr gangbar, da er zu großen Ungenauigkeiten führen würde, weil der Anwendungsbereich der Legendreschen Reihen i. a. auf kleine Entfernungen beschränkt ist und den Bereich der Pole überhaupt nicht mehr erfaßt. Auch die Gaußschen Mittelbreitenformeln können für den gedachten Zweck nicht verwendet werden.

Eine zufriedenstellende Lösung erzielt erst die Jordansche Lösung der 2. geodätischen Hauptaufgabe mit Hilfe des Polardreiecks.

Abbildung 1 zeigt die Maximalwerte ds_{max} und $d\alpha_{max}$ der Abweichungen der Polarkoordinaten von Sollwerten für Azimute von 0° bis 90° in den Breiten 0° bis 90° für s = 1000 km.

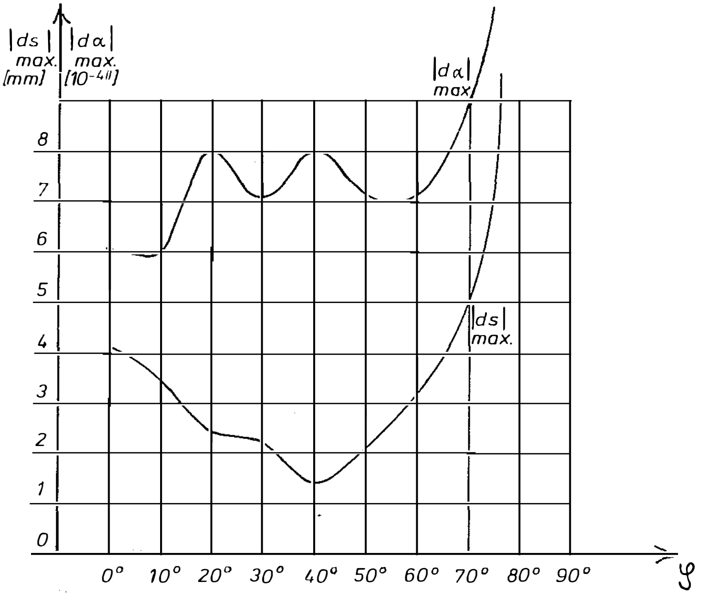

Abb. 1 Maximale Abweichungen der Polarkoordinaten (s = 1000 km)

In Abbildung 2 ist schließlich dargestellt, wie groß die Ungenauigkeiten der Transformationsformeln unter dem Einfluß von Ungenauigkeiten bei der Bestimmung der Polarkoordinaten mit Hilfe der Jordanschen Formeln werden können.

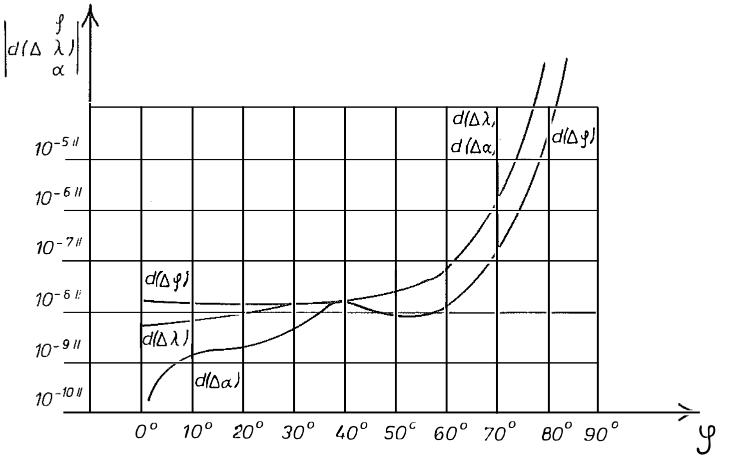

Abb. 2 Unschärfe der Transformationsformeln unter dem Einfluß der Ungenauigkeit der Polarkoordinaten (s = 1000 km)

4. *Restgliedabschätzungen*

Für die Größe der Differenzialquotienten bzw. für den Verwendungsbereich der aus ihnen gebildeten Potenzreihen gelten folgende allgemeine Gesichtspunkte:

Infolge ihrer Abhängigkeit von der geographischen Breite des Bezugspunktes der Transformation werden die Reihen in den Polen als singuläre Punkte des Koordinatensystems unbrauchbar; die Konvergenz nimmt bei Annäherung an die Pole deutlich ab, die Größe der Reihenglieder wächst über alle Grenzen.

Außer der geographischen Breite des Bezugspunktes ist auch noch die Entfernung s des zu transformierenden Punktes vom Bezugspunkt maßgebend; der in allen Gliedern auftretende Faktor $\frac{s^n}{N^n}$ bewirkt bei wachsendem s ganz allgemein eine Abnahme der Konvergenz mit einem Grenzwert für $s \rightarrow N$.

Zur Untersuchung, wie weit die Reihenentwicklungen im einzelnen brauchbar sind, wird jeweils das erste vernachlässigte Glied jeder Reihe als genähertes Restglied verwendet. Bezeichnet R_i das zu maximierende Restglied, so gilt als notwendige Bedingung für das Auffinden eines Maximalwertes, wenn das Azimut α bei konstanter Breite und gleichbleibender Entfernung s variieren soll:

$$\frac{\partial R_i}{\partial \alpha} = 0. \qquad \ldots (6)$$

Da es sich bei den Restgliedern um Funktionen höherer Ordnung handelt, treten natürlich mehrere Lösungen für (relative) Extremwerte auf. Aus ihnen wird dasjenige α ausgewählt, das nach Einsetzen in R_i dessen Maximalwert erzeugt.

In den folgenden Abbildungen 3 und 4 werden diese Maximalwerte der Restglieder 4. und 7. Ordnung (R_{IV} bzw. R_{VII}) dargestellt. Wenn man noch die Größe der Inkremente (3) berücksichtigt, kann die Genauigkeit der Hristowschen Formeln mit Hilfe von R_{IV} und die der weiterentwickelten Reihen mit Hilfe von R_{VII} abgeschätzt werden.

5. Beispiel und Anwendungsbereich

Zwei „identische Punkte", deren Koordinaten in beiden Systemen bekannt sind, werden vom Bessel- auf das Hayfordellipsoid übertragen.

Die geographischen Koordinaten der beiden Punkte sind folgende:

Punkt		Bessel	Hayford
München – Frauenkirche	φ	48° 8'22,5290"	48° 8'22,2273"
	λ	11 34 27,7335	11 34 26,4862
Schweitenkirchen	φ	48 30 26,6625	48 30 26,1736
	λ	11 36 31,5143	11 36 30,2443

Die Ellipsoiddimensionen werden angegeben mit:

Parameter	Bessel	Hayford
Große Halbachse a	6 377 397,155 m	6 378 388,0 m
Abplattung α	1 : 299,1528	1 : 297

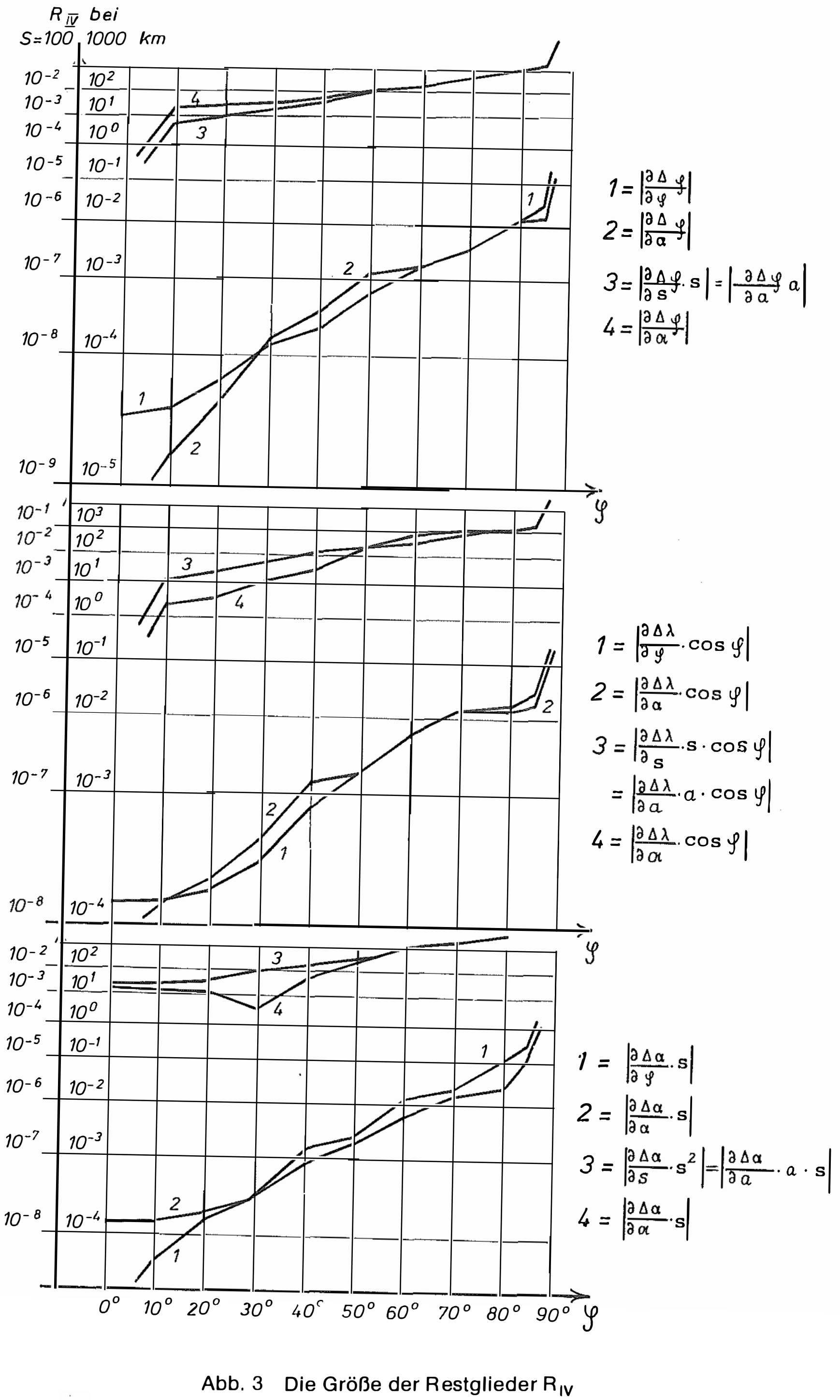

Abb. 3 Die Größe der Restglieder R_{IV}

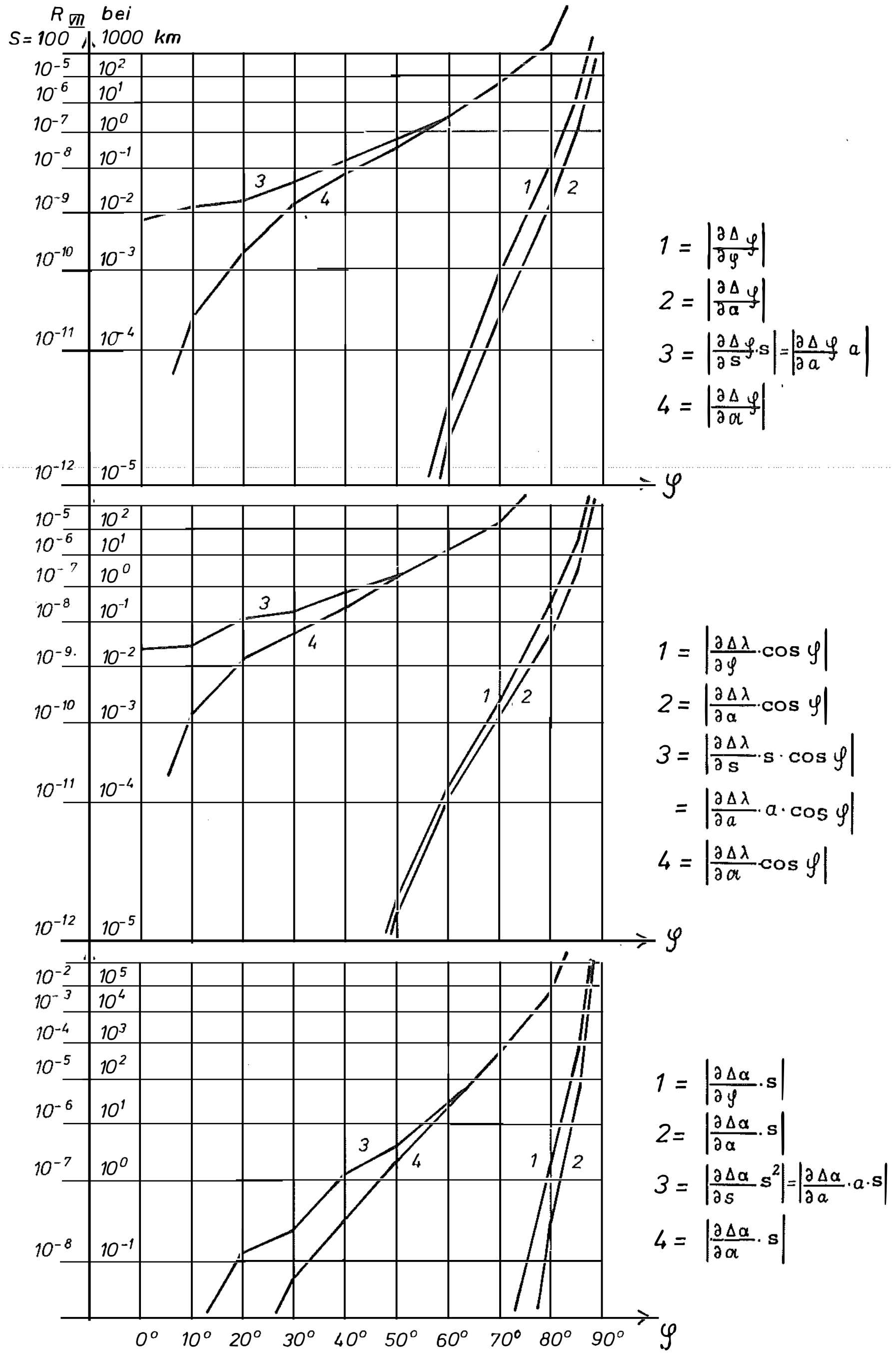

Abb. 4 Die Größe der Restglieder R_{VII}

Ein Vergleich der Koordinaten gibt sofort:

$$d\varphi_1 \approx -0{,}40''$$
$$d\lambda_1 \approx -1{,}26''$$

Die Berechnung der 2. geodätischen Hauptaufgabe auf beiden Ellipsoiden liefert:

$$d\alpha_{12} \approx -0{,}24''$$
$$\frac{s_H - s_B}{s_B} = \frac{ds}{s} \approx +\ 6 \cdot 10^{-6}.$$

Aus dem Vergleich der Ellipsoiddimensionen ergibt sich:

$$\frac{a_H - a_B}{a_B} = \frac{da}{a} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-4}; \quad d\alpha \approx 2{,}4 \cdot 10^{-5}.$$

Diese einem praktischen Beispiel entnommenen Richtwerte für die Größe der Transformationselemente seien der Abschätzung des Anwendungsbereiches zugrunde gelegt.

Die Betrachtung der Maximalwerte der Restglieder R_i (Abb. 3 und 4) zeigt in Verbindung mit den oben ermittelten Transformationskonstanten, daß als kritischer Wert die Größe $\left|\frac{\partial \Delta\lambda}{\partial a} \cdot a \cdot \cos\varphi \cdot \frac{da}{a}\right|$ anzusehen ist, weil sie als erste die geforderten Genauigkeiten (1) überschreitet. Da der Wert um etwa eine Zehnerpotenz größer ist als der nächstfolgende $\left|\frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \alpha} \cdot \cos\varphi \cdot d\alpha\right|$, kann mit seiner Hilfe der Anwendungsbereich B_{III} bis B_{VII} entsprechend der 5. bis 6. Ordnung der Reihenentwicklungen abgeschätzt werden.

Abbildung 5 zeigt die Verwendungsmöglichkeit der Transformationsformeln in verschiedenen Entwicklungsstufen. Als Ergebnis wird festgestellt, daß bei der Transformation geodätischer Netze in unseren Breiten (Mitteleuropa), in denen mittlere Entfernungen auftreten, die Reihenentwicklung der Differentialquotienten bis zur 6. Ordnung, zumindest aber bis zur 5. Ordnung, erforderlich ist.

Für geringere Genauigkeitsansprüche, nämlich

$$\varphi, \lambda: \quad 1'' \cdot 10^{-3} \qquad \ldots (7)$$
$$\qquad\quad 1'' \cdot 10^{-2} \qquad \ldots (8)$$

für Breite und Länge anstelle von (1), zeigt Abbildung 6 den Anwendungsbereich der bis zur 6. Ordnung entwickelten Transformationsformeln.

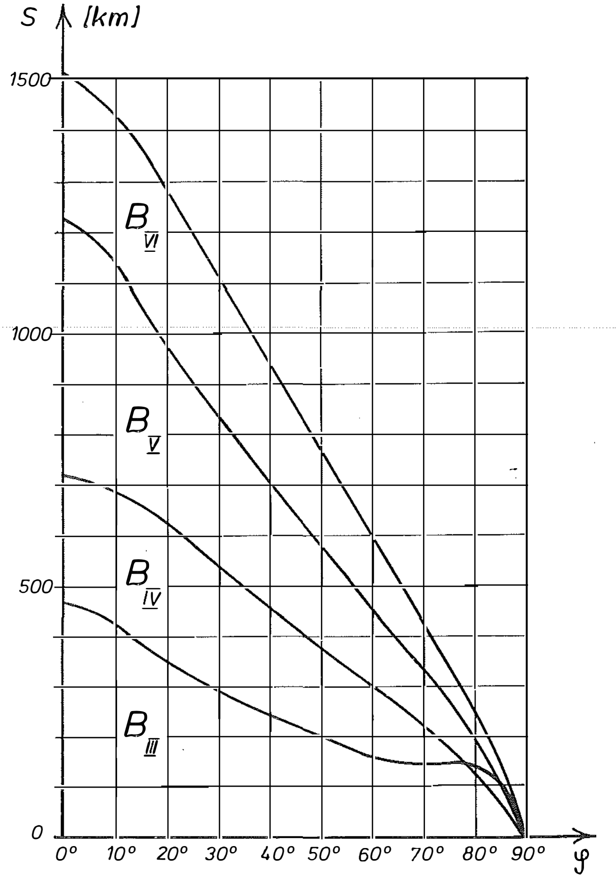

Abb. 5 Anwendungsbereich der Transformationsformeln für B_{III} bis B_{VI} bei Genauigkeitsforderungen nach (1)

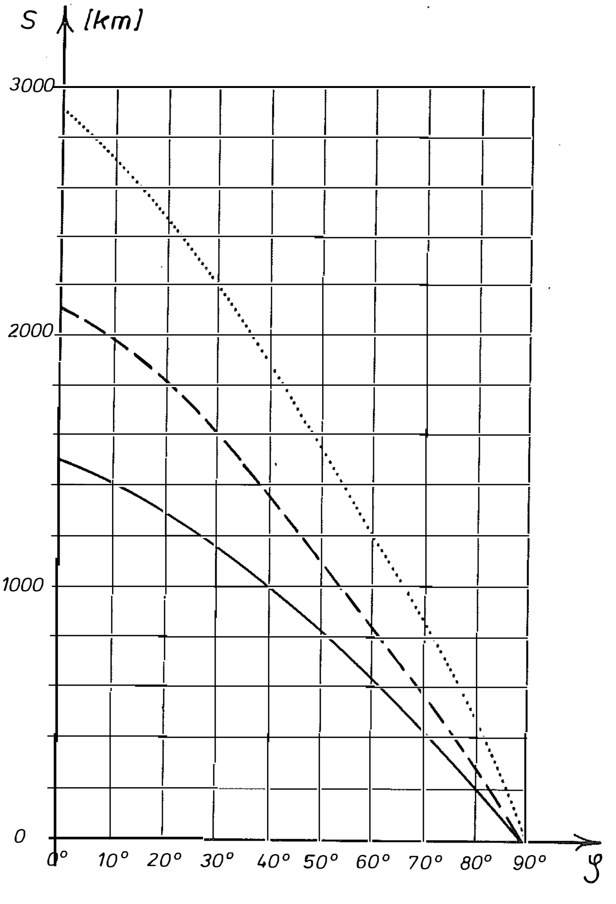

Abb. 6 Anwendungsbereich der bis zur 6. Ordnung entwickelten Transformationsformeln bei Genauigkeitsforderungen nach (1) ——, nach (7) – – – – und (8) ··········

6. Schlußbetrachtung

Die Untersuchung der zweidimensional-translativen Transformationsformeln nach Hristow zeigt, daß bei der Übertragung großräumiger Netze die Genauigkeit der Reihenentwicklung durchaus eine bedeutsame Rolle spielen kann. Es wird ein Diagramm vorgestellt, mit dessen Hilfe abgeschätzt werden kann, bis zu welcher Ordnung die Potenzreihen entwickelt sein müssen, um ein Netz mittlerer Ausdehnung in Abhängigkeit von der geographischen Breite des Zentralpunktes ohne Genauigkeitsverlust übertragen zu können. Auch die Abschätzung, mit welchen Genauigkeitsverlusten bei der Transformation von Netzen großer Ausdehnung gerechnet werden muß, ist mit Hilfe eines Diagramms möglich.

Die Betrachtungen machen auch deutlich, daß im Sinne heutiger Großraumvermessungen die Grenzen rein geometrischer Datumstransformationen klassischer Manier schnell erreicht sind.

Literatur

[1] *Bodemüller, H.*, Ellipsoidische Abbildungen von Rotationsellipsoiden mit Hilfe von Differentialformeln.
Mitteilungen des Chefs des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens 1944, Heft 6.

[2] *Helmert, F. R.*, Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie. Leipzig 1880.

[3] *Hristow, W. K.*, Änderungen der geographischen Koordinaten infolge Umorientierung eines geodätischen Netzes und Übergang zum anderen Referenzellipsoid. ZfV 1942.

[4] *Messerschmidt, E.*, Geodätische Lagebestimmung, in: Landesbericht der Bundesrepublik Deutschland über die in den Jahren 1971 bis 1974 ausgeführten Arbeiten. DGK, Reihe B, Heft Nr. 212.

[5] *Ölander, V. R.*, A Few Words Concerning the Formulas for the Simple Transformation of Coordinates. Bulletin Géodésique, No. 25, 1952.

[6] *Welsch, W.*, Beiträge zur Transformation geodätischer geographischer Koordinaten nach Hristow. München 1969.

[7] *Welsch, W.*, Ein Programm in Algol 60 zur Transformation geodätischer geographischer Koordinaten. DGK, Reihe B, Heft 168.

[8] *Welsch, W.*, Über die Weiterentwicklung der Legendreschen Reihen. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie 61 (1974) 4.