



Genauigkeitsvergleiche der am Anfang orientierten, gestreckten, gleichseitigen, offenen Theodolitpolygonzüge und der Kreispolygonzüge bei gleicher Gesamtarbeitszeit und bei gleicher Wiederholungszahl der Winkelmessungen im Theodolitpolygonzug

Antál Tárczy-Hornoch ¹

¹ *H-9401 Sopron, POB 9, Hungary*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **64** (3–4), S. 105–111

1976

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Tarczy-Hornoch_VGI_197612,  
  Title = {Genauigkeitsvergleiche der am Anfang orientierten, gestreckten,  
    gleichseitigen, offenen Theodolitpolygonz{"u}ge und der Kreispolygonz{"  
    u}ge bei gleicher Gesamtarbeitszeit und bei gleicher Wiederholungszahl der  
    Winkelmessungen im Theodolitpolygonzug},  
  Author = {T{"a"}rczy-Hornoch, Ant{"a"}l},  
  Journal = {"Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und  
    Photogrammetrie"},  
  Pages = {105--111},  
  Number = {3--4},  
  Year = {1976},  
  Volume = {64}  
}
```



Abschließend wollen wir noch eines Umstandes gedenken, der in einer Zeit, wo wir um ein vereintes Europa ringen, besondere Beachtung verdient: Marinoni kann als ein typischer Vertreter des europäischen Menschen angesehen werden, der die Forderung des Universalismus der Wissenschaft in die Tat umsetzte.

Leipzig, 1808, Bd. VIII, S. 491; Galleria dei letterati ed artisti più illustri delle provincie austro-venete che fiorirono nel secolo XVIII, vol. II, Venedig 1824.

Nouvelle Biographie Générale depuis les temps les plus reculés jusqu'à nos jours, publiés par MM. Firmin Didot Frères, Bd. XXXIII, Paris 1860.

Genauigkeitsvergleiche der am Anfang orientierten, gestreckten, gleichseitigen, offenen Theodolitpolygonzüge und der Kreiselpolygonzüge bei gleicher Gesamtarbeitszeit und bei gleicher Wiederholungszahl der Winkelmessungen im Theodolitpolygonzug

Von *Antal Tárczy-Hornoch*, Sopron

Die Kreiselinstrumente haben die Verwendung der Kreiselpolygonzüge ins Leben gerufen, zumal in diesen Zügen die Richtungswinkel der einzelnen Seiten von den vorangehenden unabhängig meßbar sind. So wird der mittlere Querfehler $\pm m_{q, n, k}$ des Endpunktes n des gestreckten Zuges (Abb. 1) infolge der günstigen



Abb. 1

Fehlerfortpflanzung bei der gleich angenommenen Seitenlänge s und n Seiten, sowie m_k mittlerem Orientierungsfehler (im Bogenmaß, also dimensionslos):

$$m_{q, n, k} = \pm m_k s \sqrt{n}. \quad \dots (1)$$

Von den regelmäßigen Fehlern sehen wir hierbei ab.

Aber auch die Theodolitpolygonzüge haben ihre Vorteile in der größeren Genauigkeit und Schnelligkeit der einzelnen Winkelmessungen. Die Orientierung am Anfang des Polygonzuges ist bei den geodätischen Messungen, aber auch beim Bergbau mit Stollen in der Regel leicht möglich. Besonders bei letzterem muß man oft mit langen Polygonzügen rechnen. Wenn wir den mittleren Querfehler des Endpunktes n des gestreckten Theodolitpolygonzuges mit $\pm m_{q, n, t}$ und den mittleren Winkelfehler (im Bogenmaß) mit $\pm m_w$ bezeichnen, so wird in guter Näherung bekanntlich (vgl. [1] S. 596)

$$m_{q, n, t} = \pm m_w \cdot s \sqrt{\frac{n^3}{3}}. \quad \dots (2)$$

Es ist nicht uninteressant und es hat eine praktische Bedeutung, die günstigsten Verwendungsbereiche der Kreiselpolygonzüge und der Theodolitpolygonzüge zu untersuchen.

Die Längsfehler können in den untersuchten Polygonzügen gleich angenommen werden, weshalb wir sie hier nicht untersuchen. Es sei hier auch sogleich bemerkt, daß die Seitenlänge s in beiden Gln. (1) und (2) möglichst lang genommen werden soll. Dies haben wir in Verbindung mit den Kreispolygonzügen in [2] S. 117–118 bereits bewiesen. Die von den Bussolen- und Kompaßzügen übernommene, in den meisten älteren Lehrbüchern enthaltene Anschauung, daß für diese Züge die kürzeren Seiten günstiger wären, hat ihre Erklärung in der unrichtigen Deutung der hier unter (1) angegebenen Gleichung. Wird nämlich an Stelle der Seite s nur der p -te Teil, also s/p genommen, so werden an Stelle von n jetzt $p \cdot n$ Seiten und es wird mithin der bei der Seitenlänge s/p auftretende mittlere Querfehler $\pm m_{q, n, k, s/p}$ des Endpunktes jetzt

$$m_{q, n, k, s/p} = \pm m_k \frac{s}{p} \sqrt{pn} = \pm m_k s \sqrt{\frac{n}{p}}. \quad \dots (1a)$$

Dieser Wert ist in der Tat kleiner als $m_{q, n, k}$ nach Gl. (1). Wir müssen aber berücksichtigen, daß wir bei der Seitenlänge s/p nicht n , sondern $p \cdot n$ Seiten haben und deshalb $p \cdot n$ Richtungen zu messen sind. Verwendet man diese Zahl der Richtungsmessungen bei der Seitenlänge s , so kann jede Seite s dann p -mal orientiert werden, so daß der mittlere Querfehler des Endpunktes bei s Seitenlänge und je p -facher Orientierung

$$m_{q, n, k, s, p} = \pm m_k s \sqrt{\frac{n}{p}} \quad \dots (1b)$$

wird. Dabei entfallen im Falle der Gl. (1b) die p -fach mehr Instrumentanaufstellungen. Mithin sind auch bei den Kreispolygonzügen möglichst lange Seiten anzustreben und sie können deshalb in gegebenen Fällen im Theodolitpolygonzug und Kreispolygonzug möglichst lang und gleich lang angenommen werden.

Ein Vergleich der Gln. (1) und (2) zeigt sofort, daß im Falle, daß die mittleren Fehler m_k der Kreiselorientierungen und m_w der Winkelmessungen gleich groß wären, man von $n > 1$ angefangen für den Kreispolygonzug den kleineren mittleren Querfehler des Endpunktes erhalten würde. Nun ist aber nach dem heutigen Stand $|m_k| > |m_w|$ und außerdem braucht eine Kreiselorientierung wesentlich mehr t_k Zeit, als t_w einer Winkelmessung. Wenn das Verhältnis

$$\frac{t_k}{t_w} = f \quad \dots (3)$$

gegeben ist, so bedeutet dies, daß während einer Kreiselorientierung f Winkelmessungen gemacht werden können. Es können folglich alle Winkel des am Anfang orientierten Theodolitpolygonzuges im Vergleich zum Kreispolygonzug f -mal gemessen werden. Man erhält mithin den mittleren Querfehler $\pm m_{q, n, t}$ dieses Theodolitpolygonzuges mit der gleichen Meßzeit wie beim Kreispolygonzug aus Gl. (3) in

$$m_{q, n, t} = \pm \frac{m_w}{\sqrt{f}} s \sqrt{\frac{n^3}{3}}. \quad \dots (4)$$

Solange dieser dem absoluten Werte nach kleiner als $|m_{q, n, k}|$ nach Gl. (1) ist,

erscheint im Sinne der vorangegangenen der Theodolitpolygonzug günstiger als der Kreiselpolygonzug. Folglich:

$$|m_w| s \sqrt{\frac{n^3}{3f}} \leq |m_k| s \sqrt{n}. \quad \dots (5)$$

Daraus:

$$n \leq \frac{|m_k|}{|m_w|} \sqrt{3f}. \quad \dots (6)$$

Die Ungleichung gibt in n die Grenze der Anzahl der Polygonpunkte für die günstige Verwendung des am Anfang orientierten Theodolitpolygonzuges an. Wenn wir z. B. annehmen, daß die Kreiselorientierung fünfmal mehr Zeit in Anspruch nimmt als eine Winkelmessung, weiters $m_k = \pm 10''$ und $m_w = \pm 3''$ (beide in Altsekunden) sind, so wird aus der Beziehung (6)

$$n \leq \frac{10}{3} \sqrt{15} = \frac{10}{3} \sqrt{15} = 12,91 \doteq 13,$$

d. h. bis zu 13 Polygonpunkten ist in unserem Falle der Theodolitpolygonzug bei der gleichen Meßzeit günstiger. In der Tat ist $s = 100$ m vorausgesetzt bei $n = 12$ nach Gln. (1) und (4) noch $|m_{a,n,k}| = 16,8$ mm größer als $|m_{a,n,t}| = 15,6$ mm, während bei $n = 14$ umgekehrt $|m_{a,n,t}| = 19,7$ mm größer als $|m_{a,n,k}| = 18,1$ mm wird.

Wenn man an Stelle der Gl. (4) die streng richtige Beziehung

$$m_{a,n,t} = \pm s \frac{m_w}{\sqrt{f}} \sqrt{\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}} = \pm m_w s \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{f}} \sqrt{\frac{2n^2+3n+1}{6}} \quad \dots (4a)$$

verwendet, so wird an Stelle der Beziehung (5) hier

$$|m_w| s \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{f}} \sqrt{\frac{2n^2+3n+1}{6}} \leq |m_k| s \sqrt{n}$$

bzw.

$$2n^2 + 3n + 1 \leq \frac{m_k^2}{m_w^2} 6f$$

oder

$$2n^2 + 3n + 1 - \frac{m_k^2}{m_w^2} 6f \leq 0.$$

Daraus, unter Berücksichtigung, daß n nur einen positiven Wert haben kann:

$$n \leq \frac{-3 + \sqrt{9 - 8 + 48 \frac{m_k^2}{m_w^2} f}}{4} = \frac{-3 + \sqrt{48 \frac{m_k^2}{m_w^2} f + 1}}{4}. \quad \dots (6a)$$

Dies ist die strenge Beziehung für die Grenze der günstigen Verwendung des

Theodolitpolygonzuges. In unserem Beispiel mit $m_k = \pm 10''$, $m_w = \pm 3''$ und $f = 5$ wird daraus

$$n \leq \frac{-3 + \sqrt{2666,7 + 1}}{4} = 12,16$$

der strenge Wert, im Vergleich zu 12,91 nach der näherungsweise geltenden Beziehung (6). Die Abweichung ist hier 6%, wobei der strenge Wert n immer kleiner ist. Die Abweichung erscheint prozentuell (aber nur prozentuell!) größer, wenn n kleiner wird. Wenn z. B. $m_k = m_w$ und $f = 1$ sind, gibt die Beziehung (6) $n \leq 1,73$, während nach (6a) $n \leq 1$ wird. Aber auch hier ist der Unterschied zwischen dem strengen und dem Näherungswert meist zulässig.

Der Wert s der Seitenlänge hat auf n selbst keinen Einfluß. Dagegen nimmt n mit dem Verhältnis $\frac{|m_k|}{|m_w|}$ linear, mit f aber nur unter der Quadratwurzel zu. In unserem Beispiel wurden bei den gebräuchlichen Instrumenten $|m_k|$ sowie f eher zu klein und $|m_w|$ eher zu groß angenommen. Wenn z. B. m_k in $\pm 15''$, m_w in $\pm 2''$ und f in 7 angenommen werden muß, so wird $n \leq \frac{15}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot 7} = 34,36 \doteq 34$ [oder nach (6a) $33,62 \doteq 34$]. Aber selbst wenn $f = 5$ bleibt, wächst n bis $7,5 \cdot 3,87 \doteq 29$ [oder nach (6a) $28,29$]. In beiden Fällen ist der Kreiselpolygonzug bereits sehr oft unzumutbarer als der am Anfang orientierte Theodolitpolygonzug.

Um die Brauchbarkeit der Kreiselpolygonzüge zu erweitern, soll daher der mittlere Fehler der Kreisorientierung möglichst verkleinert werden, selbst dann, wenn dadurch f sich etwas vergrößert. Diese zulässige Vergrößerung kann leicht aus der Beziehung (6) hergeleitet werden, wenn der verkleinerte neue m_k mit $m_{k,n}$ und der vergrößerte neue f mit f_n bezeichnet wird. Durch Quadrierung von (6) wird

$$n^2 \leq \frac{m_k^2}{m_w^2} 3f \geq \frac{m_{k,n}^2}{m_w^2} 3f_n \quad \dots (7)$$

und daraus

$$f_n \leq \frac{m_k^2}{m_{k,n}^2} f.$$

Denselben Wert erhalten wir aus der strengen Beziehung (6):

$$n \leq \frac{-3 + \sqrt{48 \frac{m_k^2}{m_w^2} f + 1}}{4} \geq \frac{-3 + \sqrt{48 \frac{m_{k,n}^2}{m_w^2} f_n + 1}}{4}, \quad \dots (7a)$$

daraus

$$\sqrt{48 \frac{m_k^2}{m_w^2} f + 1} \geq \sqrt{48 \frac{m_{k,n}^2}{m_w^2} f_n + 1}$$

bzw.

$$48 \frac{m_k^2}{m_w^2} f + 1 \geq 48 \frac{m_{k,n}^2}{m_w^2} f_n + 1 \quad \text{und} \quad f_n \leq \frac{m_k^2}{m_{k,n}^2} f.$$

Bei Erfüllung dieser Bedingung verkleinert sich trotz der Vergrößerung von f_n die rechte Seite der Beziehung (6) bzw. (6a) und so auch n . Und dies bedeutet die

Verkleinerung des Bereiches der günstigen Anwendung des Theodolitpolygonzuges zugunsten des Kreiselpolygonzuges.

Man kann durch die hier angegebene Berechnung auch die Zeitunterschiede des Transportes und der Aufstellung zwischen den Kreiselinstrumenten und den Theodoliten berücksichtigen. Wenn dieser Zeitunterschied bei der Kreiselmessung für je einen Standpunkt Δt_k ausmacht, so ist in Gl. (3) t_k damit zu vergrößern, um den die Messung und die Aufstellung berücksichtigenden Faktor f_{m+a} zu erhalten. Mithin:

$$f_{m+a} = \frac{t_k + \Delta t_k}{t_w} \quad \dots (3a)$$

Man kann auch die Theodolitpolygonzüge und die Kreiselpolygonzüge miteinander am einfachsten so verbinden, daß man den Polygonzug mit einem Theodolitpolygonzug beginnt und mit dem Kreiselpolygonzug fortsetzt. In diesem Falle ist aber nicht der durch die Beziehung (6) bzw. (6a) bestimmte n -Wert maßgeblich, der die Gleichheit der beiden mittleren Querfehler sichert, sondern man muß den das Minimum von $m_{q,n}^2$ gebenden Wert x verwenden.

Es sei in Abb. 2 der gestreckte gleichseitige, in A orientierte Polygonzug dargestellt. Bis zum Punkt x soll er als Theodolitpolygonzug und von x als Kreiselpolygonzug gemessen werden.

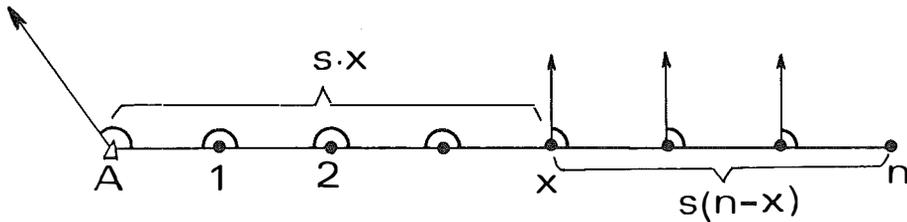


Abb. 2

Man mißt in der Regel auch den Winkel in x und gleicht die Winkel aus, wodurch der mittlere Querfehler des Endpunktes etwas herabgesetzt wird. Wir wollen hier aber davon absehen. Mit Hilfe der Gln. (1) und (4) wird dann, wenn an Stelle von n hier die zu bestimmende Unbekannte x , bzw. im Kreiselpolygonzug $n - x$ geschrieben wird,

$$m_{q,n}^2 = \frac{m_w^2}{f} s^2 \frac{x^3}{3} + m_k^2 s^2 (n - x) \quad \dots (8)$$

Um das Minimum von $m_{q,n}^2$ zu erhalten, wird der erste Differentialquotient nach x gleich Null gesetzt:

$$\frac{dm_{q,n}^2}{dx} = \frac{m_w^2}{f} s^2 x^2 - m_k^2 s^2 = 0.$$

Daraus:

$$x = \left| \frac{m_w}{m_k} \right| \sqrt{f} \quad \dots (9)$$

Bis zu diesem Punkt wird der Polygonzug vorteilhaft als Theodolitpolygonzug,

von hier als Kreiselpolygonzug gemessen. Der zweite Differentialquotient der Gl. (8) nach x zeigt, daß hier $m_{q,n}^2$ ein Minimum wird.

Wenn an Stelle von f die Winkel im Theodolitpolygonzug nur einmal gemessen werden, so erhalten wir sinngemäß

$$x = \frac{|m_k|}{|m_w|}, \quad \dots (9a)$$

also einen kleineren Wert.

Es soll hier auch ein praktisches Beispiel angeführt werden. Es sei ein Polygonzug mit $n = 20$, $m_w = \pm 3''$, $m_k = \pm 10''$, $s = 100$ m zu vermessen. f sei nach Gl. (3), bzw. (3a) hier 5.

Man erhält in diesem Falle nach Gl. (4) für den Theodolitpolygonzug

$$m_{q,n} = \pm \frac{3}{206265 \sqrt{5}} 100000 \sqrt{\frac{8000}{3}} = \pm 33,60 \text{ mm},$$

für den Kreiselpolygonzug

$$m_{q,n} = \pm \frac{10}{206265} 100000 \sqrt{20} = \pm 21,69 \text{ mm}.$$

Für den mit Theodolitpolygonzug verbundenen Kreiselpolygonzug, bei welchem nach Gl. (9) $x = 7,45 \approx 7$ ist, aus Gl. (8):

$$\begin{aligned} m_{q,n} &= \sqrt{\left(\frac{3}{206265}\right)^2 \frac{100000^2}{5} \frac{343}{3} + \left(\frac{10}{206265}\right)^2 100000^2 \cdot 13} = \\ &= 0,485 \sqrt{\frac{3 \cdot 343}{5} + 1300} = \pm 18,82 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Mit der gleichen, $20,5 = 100$ Winkelmessungen entsprechenden Zeit erreichen wir in der Tat im letzten Falle den kleinsten mittleren Querfehler des Endpunktes. Der Unterschied kann in gegebenen Fällen merklich größer sein.

Man kann den mittleren Querfehler des Endpunktes noch durch die günstigste Gewichtsverteilung der Messungen weiter herabsetzen. Hier soll nur kurz darauf hingewiesen werden.

Es sind noch andere Kombinationen der Theodolit- und Kreiselmessungen in Polygonzügen möglich, die gleichfalls günstig sein können. Hierauf soll gleichfalls in einer anderen Studie eingegangen werden.

Wenn die Seitenlängen im gestreckten Zug ungleich groß sind, so kann man in der Regel mit genügender Genauigkeit in den hier angegebenen Beziehungen die durchschnittliche Seitenlänge verwenden.

Aus den angestellten Untersuchungen geht hervor, daß man bei den Kreiselinstrumenten den mittleren Fehler m_k der einzelnen Richtungsmessungen sowie deren Meßzeit noch weiter herabsetzen muß, damit der Kreiselpolygonzug auch bei relativ kürzeren Zügen dem am Anfang orientierten Theodolitpolygonzug gleichwertig werde, ja diese übertreffe.

Zusammenfassung

Die Kreiselpolygonzüge haben eine günstige Fehlerfortpflanzung, aber in der Regel größere Richtungsfehler und längere Meßzeit; die Theodolitpolygonzüge haben entgegengesetzte Eigenschaften. Um Anhaltspunkte zu erhalten, wurden die am Anfang orientierten gestreckten gleichseitigen Polygonzüge und die Kreiselpolygonzüge auf den mittleren Querfehler des Endpunktes untersucht und es zeigt sich, daß in guter Näherung bei der gleichen Meßzeit bis zur durch die Beziehung (6) gegebenen Polygonpunktzahl n der Theodolitpolygonzug, darüber der Kreiselpolygonzug den kleineren mittleren Querfehler des Endpunktes liefert. Die strenge Beziehung hierfür ist unter (6a) angegeben. Man kann auch im Sinne der Gln. (8)–(9) vorteilhaft mit dem Theodolitpolygonzug beginnen und mit dem Kreiselpolygonzug fortsetzen.

Je größer der mittlere Fehler der Kreisrichtungen im Vergleich zu jenem der Winkelmessung ist, um so größer wird n , bzw. länger der Theodolitpolygonzugteil und umgekehrt.

Literatur

[1] *Jordan - Eggert - Berroth*: Handbuch der Vermessungskunde, Bd. II (10. Aufl.). Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart (1950).

[2] *Tarczy-Hornoch, A.*: Über die mittleren Fehler des Endpunktes bei offenen Polygonzügen. Mitt. a. d. Markscheidew. Jahrg. 76 (1969). S. 115–121.

Eine universelle Lösung des einfachen, räumlichen Vorwärtsschnittes für Kleincomputer

Von *Peter Waldhäusl* und *Günter Wagensommerer*, Wien

Zusammenfassung

Die in der Geodäsie üblichen Vorwärtsschnittlösungen haben den Nachteil, in der Nähe der Lotebene durch die Basis kein Ergebnis zuzulassen. Daher wird ein auf elementarer Vektorrechnung aufgebautes, allgemein gültiges Formelsystem für einen räumlichen Vorwärtsschnitt angegeben, das einfach genug ist, um an den Kleincomputern HP 67 bzw. HP 97 und, in einer vereinfachten Version, HP 65 oder SR 52 programmiert werden zu können. Die Programme werden kurz besprochen und Beispiele demonstriert.

Summary

The solution normally used in geodesy for the intersection of rays have the disadvantage to fail in the vertical plane of the base line.

Therefore universally valid formulae are presented for the spatial intersection, which are based upon elementary vector-algebra, simple enough to allow for programming for the pocket computer HP 67 resp. HP 97 and, using a simplified version, HP 65 or SR 52. The programs are shortly discussed and examples demonstrated.

1. Die Problemstellung

Die Methode des Vorwärtsschneidens als geodätische Punktbestimmung ist als rationelles Verfahren anerkannt, zumal Fälle auftreten, die andere Methoden ausschließen. Eine Teilmenge der zu bestimmenden Punkte kann jedoch in oder nahe